Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 06.12.2023

Blatt 9

Übungen zur Funktionalanalysis I

1. Es sei
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^2),$$
es sei $\epsilon > 0$ und es sei $f\colon B_\epsilon(0) \to \mathbb{C}$ holomorph.
   (a) (8P) Bestimmen Sie den Operator $f(N)$ im Dunford-Riesz Kalkül, indem Sie für jedes $z \in \rho(N)$ die Resolvente $R(z, N)$ bestimmen und das Integral aus Definition 11.3 ausrechnen.
   (b) (2P) Bestimmen Sie $f(N)$ auch noch durch Anwendung von Satz 11.6.

   Hinweis: Es sollen alle vier Einträge von $f(N)$ durch Werte der Funktion f und ihrer Ableitungen ausgedrückt werden.

2. (10P) Es seien E ein Banachraum, $A \in L(E)$ und $\|A\| < r < |\lambda|$. Zeigen Sie
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r^+(0)} \frac{1}{\lambda - \zeta} R(\zeta, A)\,\mathrm{d}\zeta = R(\lambda, A).$$

3. (10P) Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, E ein Banachraum und $f\colon U \to E$ holomorph. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ existiert und für jedes $T \in E'$ die Gleichung
$$(T \circ f)^{(n)} = T \circ f^{(n)}$$
erfüllt.

4. (10P) Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, E ein Banachraum und es $f\colon U \to E$ holomorph. Für $z \in U$ sei $r > 0$ so gewählt, dass $\overline{B}_r(z) \subset U$. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$
$$\|f^{(n)}(z)\| \le \frac{n!}{r^n} \sup_{|\zeta - z| = r} \|f(\zeta)\|.$$

Abgabe: Mi, 13.12.2023, 12:20 im ILIAS