Funktionalanalysis I

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2023/24

Inhaltsverzeichnis

1 Banachalgebren

Die erste Hälte der Vorlesung orientiert sich an Meise und Vogt [7].

In dieser Vorlesung ist 0 keine natürliche Zahl, also $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Bilinearformen werden als $\langle \cdot, - \rangle$ und Sesquilinearformen als $(\cdot, -)$ geschrieben.

1.1 Wiederholung. Ein *Banachraum* ist ein vollständiger, normierter Raum, also einer in dem jede Cauchyfolge konvergiert.

Mit $L(E, F)$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen, linearen Abbildungen von einem normierten Raum E in einen normierten Raum F. Von dieser Notation gibt es zwei Spezialfälle: $L(E) = L(E, E)$ und $E' = L(E, \mathbb{K})$, wobei $\mathbb{K}$ der Grundkörper ist.

Eine lineare Abbildung $A\colon E \to F$ ist genau dann stetig, wenn

$$\|A\| \coloneqq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty.$$

In diesem Fall ist $\|A\|$ die *Operatornorm*.

Der folgende Satz wurde in der Einführung in die Funktionalanalysis bewiesen:

1.2 Theorem (Banachscher Isomorphiesatz). *Es sei $A\colon E \to F$ eine bijektive, stetige, lineare Abbildung zwischen zwei Banachräumen. Dann ist ihre Umkehrabbildung ebenfalls stetig.*

1.3 Definition. (a) Eine $\mathbb{C}$-*Algebra* ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum A mit einer Multiplikation $\cdot\colon A \times A \to A$, so dass A ein Ring mit Eins und der folgenden Eigenschaft ist

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall a, b \in A : \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b).$$

Die Eins wird mit e bezeichnet.

(b) Eine *normierte Algebra* ist eine $\mathbb{C}$-Algebra mit einer Norm, welche zusätzlich noch die folgenden Eigenschaften besitzt

  (i) $\forall a, b \in A : \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ (Submultiplikativität).

  (ii) $\|e\| = 1$.

(c) Eine *Banachalgebra* ist eine vollständige normierte Algebra.

1.4 Bemerkung. Sei A eine normierte Algebra. Dann ist die Multiplikation stetig.

1.5 Beispiel. (a) Sei E ein komplexer Banachraum. Dann ist $L(E)$ eine Banachalgebra. Im Fall $E = \mathbb{C}^N$ wurde sie in der Linearen Algebra studiert.

(b) Wenn K kompakt ist, dann ist $C(K)$ (komplexwertig) eine Banachalgebra.

1.6 Bezeichnung. Die Gruppe der invertierbaren Elemente in A wird mit $\mathcal{G}(A)$ bezeichnet.

1.7 Satz (Neumannsche Reihe). *Es seien A eine Banachalgebra und $a \in \mathcal{G}(A)$. Falls für $b \in A$ gilt*

$$\|a - b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|},$$

dann $b \in \mathcal{G}(A)$.

1.8 Korollar. *$\mathcal{G}(A)$ ist offen und die Umkehrabbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist stetig in $\mathcal{G}(A)$.*

1.9 Definition. Es sei A eine Banachalgebra und es sei $a \in A$. Das *Spektrum* von a besteht aus allen $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche $\lambda e - a \notin \mathcal{G}(A)$. Es wird mit $\sigma(a)$ bezeichnet. Sein Komplement $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ ist die *Resolventenmenge* von a.

Für $\lambda \in \rho(a)$ ist $R(\lambda, a) = (\lambda e - a)^{-1}$ die *Resolvente.*

1.10 Beispiel. In der Einführung in die Funktionalanalysis hatten wir das Spektrum bereits für den Speziallfall $A = L(E)$ erklärt.

1.11 Bemerkung. $\sigma(a)$ ist abgeschlossen. Für λ mit $|\lambda| > \|a\|$ ist $\lambda e - a$ invertierbar. Also $\sigma(a) \subset \overline{B}_{\|a\|}(0)$. Insbesondere ist $\sigma(a)$ kompakt. Aus dem Beweis der Neumannschen Reihe erhält man sofort

$$R(\lambda, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{\lambda^{j+1}}.$$

1.12 Lemma. *Seien A eine Banachalgebra, $a \in A$ und $z, \zeta \in \rho(a)$. Dann gelten*

(a) $R(z, a) - R(\zeta, a) = (\zeta - z)R(z, a)R(\zeta, a)$ *(Resolventenformel).*

(b) $\lim\limits_{\zeta \to z} \dfrac{1}{z - \zeta}(R(z, a) - R(\zeta, a)) = -R(z, a)^2.$

1.13 Satz. *Sei A eine Banachalgebra. Für jedes $a \in A$ ist $\sigma(a) \neq \emptyset$.*

Für den Beweis benötigen wir den Satz von Hahn-Banach aus der Einführung:

1.14 Theorem (Hahn-Banach). *Sei E ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $F \subset E$ ein Unterraum, und sei $y \in F'$. Dann existiert $Y \in E'$ mit $Y|_F = y$ und $\|Y\| = \|y\|$.*

1.15 Theorem (Satz von Gelfand und Mazur). *Wenn die Banachalgebra A ein Schiefkörper ist, dann ist sie gleich $\mathbb{C}e$.*

1.16 Lemma. *Seien A eine Banachalgebra und $a \in A$. Für ein komplexes Polynom $p = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j z^j \in \mathbb{C}[X]$ definieren wir $p(a) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j a^j \in A$. Dann $p(a) \in \mathcal{G}(A)$ genau dann, wenn $p(\mu) \neq 0$ für alle $\mu \in \sigma(a)$.*

1.17 Satz (Polynomieller Spektralkalkül). *Seien* A *eine Banachalgebra,* $a \in A$ *und* $p \in \mathbb{C}[X]$*. Dann* $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$*.*

1.18 Beispiel. Wenn $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$ diagonalisierbar ist, dann existieren Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathbb{C}$ und eine Transformationsmatrix $T \in GL_N(\mathbb{C})$, so dass

$$M = T \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_N \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Dann

$$p(M) = T \begin{pmatrix} p(\mu_1) & & & \\ & p(\mu_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\mu_N) \end{pmatrix} T^{-1}.$$

1.19 Definition. Sei A eine Banachalgebra. Für $a \in A$ definiert man den *Spektralradius* als

$$r(a) = \sup\{|z| \mid z \in \sigma(a)\}.$$

1.20 Satz (Spektralradiusformel). *Sei* A *eine Banachalgebra. Für* $a \in A$ *gilt*

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}.$$

Insbesondere $r(a) \leq \|a\|$*.*

Der Beweis benutzt das Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit aus der Einführung.

1.21 Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). *Seien* E *ein normierter Raum und* M *eine Teilmenge von* E*, so dass* $\sup_{x \in M} |\langle y, x \rangle| < \infty$ *für jedes* $y \in E'$*. Dann* $\sup_{x \in M} \|x\| < \infty$*.*

1.22 Lemma. *Es sei* A *eine Banachalgebra. Dann gelten:*

(a) $\operatorname{dist}(e, I) = 1$ *für jedes Ideal* I *in* A*.*

(b) Für jedes abgeschlossene Ideal I *in* A *ist* A/I *eine Banachalgebra.*

(c) Für jedes Ideal I *ist auch* $\overline{I}$ *ein Ideal.*

(d) Maximale Ideale sind abgeschlossen.

(e) Jedes Ideal ist in einem maximalen Ideal enthalten.

1.23 Definition. (a) Seien A, B Algebren. Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f\colon A \to B$ ist ein *Algebrenhomomorphismus*, wenn $f(e) = e$ und $f(ab) = f(a)f(b)$ für alle $a, b \in A$.

(b) Sei A eine Banachalgebra. Das *Spektrum* von A besteht aus allen stetigen Algebrenhomomorphismen von A nach $\mathbb{C}$. Man schreibt $\mathrm{Sp}(A)$.

1.24 Lemma. *Sei A eine kommutative Banachalgebra. Die maximalen Ideale in A sind genau die Kerne der Elemente von $\mathrm{Sp}(A)$.*

1.25 Satz. *Sei A eine kommutative Banachalgebra und sei $a \in A$. Dann $\sigma(a) = \{\varphi(a) \mid \varphi \in \mathrm{Sp}(A)\}$.*

1.26 Beispiel. Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und sei $H^\infty(\mathbb{D})$ der *Hardyraum*, also

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ holomorph} \mid \|f\|_\infty < \infty\},$$

versehen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$. Auf Blatt 1 wurde gezeigt, dass der Hardyraum eine Banachalgebra ist. Für $w \in \mathbb{D}$ sei $\delta_w(f) = f(w)$. Dann $\delta_w \in \mathrm{Sp}(H^\infty(\mathbb{D}))$.

1.27 Definition. Es sei A eine kommutative Banachalgebra. Für $a \in A$ ist die *Gelfand-Transformierte* $\hat{a}$ definiert als

$$\hat{a}\colon \mathrm{Sp}(A) \to \mathbb{C}, \quad \hat{a}(\varphi) = \varphi(a).$$

1.28 Satz. *Es sei A eine kommutative Banachalgebra. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Topologie τ auf $\mathrm{Sp}(A)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $(\mathrm{Sp}(A), \tau)$ *ist kompakt,*

(b) für jedes $a \in A$ ist $\hat{a}$ stetig.

Um diesen Satz zu beweisen, verwenden wir den Satz von Tychonoff aus der Topologie.

1.29 Theorem (Tychonoff). *Es sei M eine Menge und für jedes $m \in M$ sei K_m kompakt. Dann ist $\prod_{m \in M} K_m$ kompakt.*

$$T\colon \mathrm{Sp}(A) \to X, \quad \varphi \mapsto (\varphi(a))_{a \in A}.$$

1.30 Definition. Die in Satz 1.28 definierte Topologie ist die *Gelfand-Topologie*. Die Abbildung $\hat{\ }\colon A \to C(\mathrm{Sp}(A))$ ist die *Gelfand-Darstellung*.

Die Gelfand-Topologie ist die Einschränkung der schwach*-Topologie.

1.31 Satz. *Sei A eine kommutative Banachalgebra. Dann ist die Gelfand-Darstellung ein Algebrenhomomorphismus mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $\hat{a}(\operatorname{Sp} A) = \sigma(a), \ a \in A,$

(b) $\|\hat{a}\| = r(a), \ a \in A.$

1.32 Beispiel. Für $A = H^\infty(\mathbb{D})$ ist die Abbildung

$$J \colon \mathbb{D} \to \operatorname{Sp}(A), w \mapsto \delta_w,$$

injektiv und wegen $T(\delta_w) = (f(w))_{f \in A}$ auch stetig. Wir können die Umkehrabbildung sogar angeben, nämlich $w = \delta_w(\mathrm{id}_{\mathbb{D}})$. Also ist J ein Homöomorphismus auf sein Bild. Da $\mathbb{D}$ offen und $\operatorname{Sp}(A)$ kompakt ist, ist J nicht surjektiv.

Das *Corona-Theorem* von Lennart Carlson aus dem Jahr 1962 besagt, dass

$$\operatorname{Sp}(H^\infty(\mathbb{D})) = \overline{J(D)}.$$

2 C^*-Algebren

2.1 Definition. Eine C^*-Algebra ist eine Banachalgebra zusammen mit einer Involution $*\colon a \mapsto a^*$ mit den folgenden Eigenschaften

(a) $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$ und $(ab)^* = b^* a^*$ für $a, b \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) $\|a^* a\| = \|a\|^2$ für alle $a \in A$.

Der Begriff Involution bedeutet hier, dass $(a^*)^* = a$.

2.2 Beispiel. (a) $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ mit der Involution $z \mapsto \overline{z}$ ist eine C^*-Algebra.

(b) Für ein Kompaktum K ist $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ mit der Involution $f \mapsto \overline{f}$ eine C^*-Algebra.

(c) Sei H ein komplexer Hilbertraum. Dann hatten wir den zu $A \in L(H)$ adjungierten Operator $A^* \in L(H)$ definiert durch

$$(A^* x, y) = (x, Ay), \quad x, y \in H.$$

(d) Ein Spezialfall von (c) ist der Fall $H = \mathbb{C}^N$. Der Operator $A \in L(H)$ sei im Standardkoordinatensystem durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} \end{pmatrix}$$

dargestellt. Dann besitzt A^* die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_{1,1} & \overline{a}_{2,1} & \dots & \overline{a}_{N,1} \\ \overline{a}_{1,2} & \overline{a}_{2,2} & \dots & \overline{a}_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{1,N} & \overline{a}_{2,N} & \dots & \overline{a}_{N,N} \end{pmatrix}.$$

2.3 Lemma. *Sei A eine C^*-Algebra. Dann gelten*

(a) $\|a^*\| = \|a\|$ *für alle* $a \in A$.

(b) $e^* = e$.

(c) *Wenn* $a \in \mathcal{G}(A)$, *dann* $a^* \in \mathcal{G}(A)$ *und* $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

2.4 Definition. Ein Element a einer C^*-Algebra A heißt

(a) *normal*, wenn $aa^* = a^*a$,

(b) *selbstadjungiert*, wenn $a^* = a$,

(c) *unitär*, wenn $aa^* = a^*a = e$.

2.5 Bemerkung. (a) Selbstadjungierte und unitäre Elemente sind normal.

(b) Im endlich-dimensionalen Fall ist ein Operator genau dann selbstadjungiert, wenn seine Matrix hermitesch ist.

(c) Im endlich-dimensionalen Fall wurde in der Linearen Algebra gezeigt, dass ein $\mathbb{C}$-linearer Endomorphismus genau dann eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren hat, wenn er normal ist. Ein normaler Operator besitzt genau dann ausschließlich reelle Eigenwerte, wenn er selbstadjungiert ist.

(d) Für jedes a ist a^*a selbstadjungiert.

2.6 Satz. *Sei* A *eine* C^**-Algebra und sei* $a \in A$. *Dann* $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$.

2.7 Satz. *Sei* A *eine* C^**-Algebra und sei* $a \in A$ *selbstadjungiert. Dann* $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.

2.8 Satz. *Es sei* A *eine* C^**-Algebra und es sei* $a \in A$ *unitär. Dann* $\sigma(a) \subseteq S^1$.

Das zeigen Sie als Übungsaufgabe.

2.9 Satz. *Sei* A *eine* C^**-Algebra und sei* $a \in A$ *normal. Dann* $r(a) = \|a\|$.

2.10 Beispiel. Sei $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$ eine hermitesche Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$. Der $\mathbb{C}^N$ sei mit der euklidischen Norm versehen. Dann ist die Operatornorm des zu M gehörenden Endomorphismus gleich $\max\{-\lambda_1, \lambda_N\}$.

2.11 Satz. *Es sei* A *eine* C^**-Algebra und es seien* $\varphi \in \mathrm{Sp}(A)$ *und* $a \in A$. *Dann* $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$.

2.12 Definition. Ein Algebrenhomomorphismus $\Phi\colon A \to B$ zwischen zwei C^*-Algebren ist ein $*$*-Homomorphismus,* wenn $\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$ für alle $a \in A$.

2.13 Satz (Automatische Stetigkeit). *Es sei* A *eine kommutative* C^**-Algebra, es sei* B *eine* C^**-Algebra und es sei* $\Phi\colon A \to B$ *ein* C^**-Homomorphismus. Dann ist* Φ *stetig mit* $\|\Phi\| = 1$.

2.14 Definition. Es sei A eine C^*-Algebra und $\emptyset \neq M \subseteq A$. Dann ist

$$M' = \{x \in A \mid \forall m \in M : xm = mx\}$$

der *Kommutant* von M und $(M')'$ ist der *Bikommutant.*

2.15 Lemma. *(a)* M' *ist eine abgeschlossene Unteralgebra von* A.

(b) Wenn $M = M^*$, *dann* $M'^* = M'$ *und* $(M')'$ *ist eine* C^**-Unteralgebra von* A.

2.16 Lemma. *Wenn* $mn = nm$ *für alle* $n, m \in M$, *dann ist der Bikommutant* $(M')'$ *kommutativ.*

2.17 Lemma. *Es sei* A *eine* C^**-Algebra und es sei* $a \in A$ *normal. Dann ist* $B = (\{a, a^*\}')'$ *eine abgeschlossene, kommutative* C^**-Unteralgebra von* A, *die* a *und* $a*$ *enthält.*

Bezeichnet man mit σ_A *bzw-* σ_B *die Spektren in* A *bzw.* B, *so gilt* $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$ *für jedes* $b \in B$.

Im Beweis des nächsten Satzes benötigen wir das folgende Ergebnis aus der Einführung in die Funktionalanalysis.

2.18 Theorem (Weierstraßscher Approximationssatz). *Sei* $X \neq \emptyset$ *eine kompakte Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$. *Dann kann jede stetige Funktion auf* X *gleichmäßig durch Polynome approximiert werden.*

2.19 Satz. *Es sei* A *eine* C^**-Algebra und es sei* $a \in A$ *normal. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten* $*$*-Homomorphismus* $\Phi\colon C(\sigma(a)) \to A$ *mit* $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(a)}) = a$. *Dieser Homomorphismus ist eine Isometrie.*

Bemerkung. Statt $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(a)})$ schreibt man üblicherweise $\Phi(z)$. Das werde ich auch tun.

2.20 Theorem (Spektralabbildungssatz). *Es sei* A *eine* C^**-Algebra, es sei* $a \in A$ *normal und es sei* Φ *der zu* a *in Satz 2.19 konstruierte* $*$*-Homomorphismus. Dann gilt für jedes* $f \in C(\sigma(a))$

$$\sigma(\Phi(f)) = f(\sigma(a)).$$

Wir benötigen nun noch ein weiteres Ergebnis aus der Einführung in die Funktionalanalysis.

Man sagt, dass eine Unteralgebra B von $C(X, \mathbb{C})$ die *Punkte von* X *trennt*, wenn es zu jeder Wahl von $x \neq y$ in X ein $f \in B$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt.

2.21 Theorem (Satz von Stone-Weierstraß). *Seien* X *ein kompakter topologischer Raum und* A *eine abgeschlossene Unteralgebra von* $C(X, \mathbb{C})$ *mit den folgenden Eigenschaften*

(a) A *trennt die Punkte von* X,

(b) mit f *liegt auch* $\bar{f}$ *in* A.

Dann $A = C(X, \mathbb{C})$.

2.22 Theorem (Gelfand-Neumark). *Es sei* A *eine kommutative* C^**-Algebra. Dann ist die Gelfand-Darstellung* $\hat{\ }: A \to C(\mathrm{Sp}(A))$ *ein isometrischer* $*$*-Isomorphismus.*

2.23 Beispiel. Es sei K ein kompakter metrischer Raum. Dann ist die Abbildung $\Delta\colon K \to \mathrm{Sp}(C(K))$, $\Delta(x) = \delta_x$ mit $\delta_x(f) = f(x)$, offenbar wohldefiniert. Wir zeigen, dass sie bijektiv ist.

Es gilt $\hat{f} \circ \Delta = f$.

Im Fall eines allgemeinen topologischen Raums kann man das Lemma von Tietze-Urysohn verwenden, um die Injektivität zu zeigen.

2.24 Definition. Die *Wiener-Algebra* ist der Banachraum $\ell^1(\mathbb{Z})$ mit der Multiplikation

$$a * b = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k} b_k \right)_{j \in \mathbb{Z}} .$$

Bemerkung. (a) Die Eins dieser Multiplikation ist e_0.

(b) Wir müssen noch zeigen, dass $\|a * b\|_1 \le \|a\|_1 \|b\|_1$.

Dazu sei zuerst $\|a\|_1 = 1$. Dann $|a_j| \le 1$ für alle j, also

$$\|a\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|^2 \le \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| = \|a\|_1 = 1 = \|a\|_1^2.$$

Wegen der Homogenität der Normen folgt $\|a\|_2 \le \|a\|_1$. Nun folgt die Behauptung aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(c) Die Wiener-Algebra ist keine C^*-Algebra.

2.25 Lemma. *Für* $z \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *setzen wir* $\delta_z\colon \ell^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$, $\delta_z(a) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$. *Dann* $\delta_z \in \mathrm{Sp}(\ell^1(\mathbb{Z}))$.

2.26 Lemma. *Die Abbildung* $\Delta\colon S^1 \to \mathrm{Sp}(\ell^1(\mathbb{Z}))$, $z \mapsto \delta_z$, *ist ein Homöomorphismus.*

2.27 Lemma. *Wenn wir* $\mathrm{Sp}(\ell^1(\mathbb{Z})))$ *mit* S^1 *identifizieren, dann*

$$\widehat{\ell^1(\mathbb{Z})} = \left\{ f \in C(S^1) \;\middle|\; f \text{ hat eine absolut konvergente Fourierreihe} \right\}.$$

2.28 Lemma. *Die Gelfand-Darstellung* $\hat{\ }: \ell^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathrm{Sp}(A))$ *ist injektiv, aber nicht isometrisch.*

Bemerkung. Wegen des Satzes von Gelfand-Neumark ist die Gelfand-Darstellung einer C^*-Algebra eine Isometrie. Das zeigt, dass die Wiener-Algebra keine C^*-Algebra ist.

2.29 Theorem (Satz von Wiener). *Wenn* $f \in C(S^1)$ *eine absolut konvergente Fourierreihe hat und* $f(z) \neq 0$ *für alle* $z \in S^1$, *dann besitzt auch* $\frac{1}{f}$ *eine absolut konvergente Fourierreihe.*

3 Der Rieszsche Darstellungssatz für Maße

Mit $C_c(X)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger.

3.1 Bezeichnung. Es sei K ein kompakter topologischer Raum.

(a) Für $f \in C(K)$ schreiben wir $f \geq 0$, wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in K$. Mit $\mathbb{1}$ bezeichnen wir die Funktion $x \mapsto 1$.

(b) Ein Funktional $T \in C(K)'$ heißt *positiv,* wenn $T(f) \geq 0$ für alle $f \geq 0$. Es heißt *normalisiert,* wenn $T\mathbb{1} = 1$.

Wir erinnern uns an einige Definitionen aus der Maßtheorie.

3.2 Definition. Ein *äußeres Maß* auf einer Menge X ist eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) Für $A \subseteq B \subseteq X$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(c) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(X)$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Den kompletten Beweis des folgenden Satzes findet man in Rudin, *Real and Complex Analysis*, Theorem 2.14. Der Beweis benötigt die Existenz einer stetigen Partition der Eins, welche wir in der Analysis III nur im $\mathbb{R}^N$ gezeigt hatten.

3.3 Theorem (Rieszscher Darstellungssatz für Maße). *Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und es sei Λ ein positives lineares Funktional auf $C_c(X)$. Dann gibt es eine σ-Algebra $\mathcal{M}$ in X, welche die Borelmengen enthält, und ein eindeutig bestimmtes Maß μ auf $\mathcal{M}$, so dass*

(a) $\Lambda f = \int f \, d\mu$ *für jedes* $f \in C_c(X)$.

Dieses Maß hat die zusätzlichen Eigenschaften

(b) $\mu(K) < \infty$ *für jedes kompakte* $K \subseteq X$.

(c) $\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subseteq V,\ V \text{ offen}\}$ *für jedes* $E \in \mathcal{M}$.

(d) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E,\ K \text{ kompakt}\}$ *für alle offenen* $E \subset X$ *sowie alle* $E \in \mathcal{M}$ *mit* $\mu(E) < \infty$.

(e) μ *ist ein vollständiges Maß.*

3.4 Beispiel. Für $X = \mathbb{R}$ und dem Riemann-Integral $\Lambda(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $f \in C_c(\mathbb{R})$, erhält man das eindimensionale Lebesguemaß.

3.5 Definition. Ein *signiertes* (bzw. *komplexes*) Borelmaß auf einem topologischen Raum X ist eine Abbildung μ von der σ-Algebra der Borelmengen nach $\mathbb{R}$ (bzw. nach $\mathbb{C}$), so dass:

(a) Es existiert $C > 0$, so dass
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| \leq C,$$
für alle Folgen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Borelmengen, welche $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = X$ und $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$ erfüllen.

(b) Falls $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Borelmengen mit $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$ ist, so gilt
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

3.6 Lemma. *Für ein signiertes Borelmaß* μ *erklären wir zwei (positive) Borelmaße durch*
$$\mu_+(A) := \sup_{B\subseteq A} \mu(B), \qquad \mu_-(A) := -\inf_{B\subseteq A} \mu(B).$$
Dann $\mu(A) = \mu_+(A) - \mu_-(A)$.

3.7 Definition. Für ein signiertes Maß μ und eine messbare Funktion f definieren wir
$$\int f\,d\mu = \int f\,d\mu_+ - \int f\,d\mu_-.$$
Für ein komplexes Maß definieren wir $\int f\,d\mu = \int f\,d(\operatorname{Re}\mu) + i\int f\,d(\operatorname{Im}\mu)$.

3.8 Satz. *Es sei* $T \in C(X,\mathbb{R})'$. *Dann existieren positive Funktionale* T_+ *und* T_-, *so dass* $T = T_+ - T_-$.

3.9 Theorem. *Es sei* X *ein kompakter topologischer Raum und es sei* $T \in C(X)'$ *ein* ($\mathbb{C}$-*wertiges) stetig lineares Funktional. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes, komplexes Maß* μ *auf* X, *so dass*
$$T(f) = \int f\,d\mu, \quad f \in C(X).$$

4 Beschränkte normale Operatorn auf Hilberträumen

Für einen Hilbertraum H ist $L(H)$ eine C^*-Algebra. Die Sätze aus dem vorigen Abschnitt sind also anwendbar. Im Fall normaler Operatorn auf Hilberträumen kann man den Kalkül sogar auf Borel-messbare Funktionen, z. B. charakteristische Funktionen Borel-messbarer Mengen, ausdehnen.

4.1 Definition. Es sei X ein kompakter metrischer Raum. Wir setzen

$$\mathcal{M}^\infty(X) = \{f \in \ell^\infty(X) \mid f \text{ Borel-messbar}\}$$

und versehen diesen Raum mit der Supremumsnorm, der punktweisen Multiplikation und der Involution $f \mapsto \overline{f}$.

4.2 Satz. *$\mathcal{M}^\infty(X)$ ist eine C^*-Algebra.*

4.3 Definition. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Abbildungen $f_n \in \ell^\infty(X)$ *konvergiert beschränkt punktweise* gegen $f \in \ell^\infty(X)$, wenn sie punktweise gegen f konvergiert und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in X} |f_n(x)| < \infty.$$

4.4 Lemma. *Es sei X ein kompakter metrischer Raum. Dann ist $\mathcal{M}^\infty(X)$ die kleinste Teilmenge von $\ell^\infty(X)$ mit den folgenden Eigenschaften*

(a) $C(X) \subseteq M$.

(b) M *ist abgeschlossen unter beschränkt punktweiser Konvergenz.*

4.5 Definition. Seien X ein kompakter metrischer und H ein Hilbertraum. Eine Abbildung $\Psi\colon \mathcal{M}^\infty(X) \to L(H)$ heißt w-stetig, wenn für alle $x, y \in H$ und jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}^\infty(X)$, welche beschränkt punktweise gegen f konvergiert, gilt, dass $\lim_{n\to\infty}(\Psi(f_n)x, y) = (\Psi(f)x, y)$.

Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $L(\mathbb{C})$ und erklären somit auch die w-Stetigkeit von Abbildungen nach $\mathbb{C}$.

4.6 Korollar. *w-stetige Abbildungen sind eindeutig durch ihre Werte auf den Funktionen $f \in C(X)$ bestimmt.*

4.7 Definition. Eine Abbildung $\beta \colon E \times E \to \mathbb{K}$ ist eine *Bilinearform,* wenn sie in beiden Komponenten linear ist, und eine *Sesquilinearform,* wenn sie in der ersten Komponente linear und in der zweiten konjugiert linear ist.

Eine weitere Wiederholung aus der Einführung in die Funktionalanalysis:

4.8 Theorem (Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit). *Seien* E *ein Banachraum und* F *ein normierter Raum. Sei* $\mathcal{A} \subset L(E,F)$ *so, dass* $\sup_{A\in\mathcal{A}}\|Ax\| < \infty$ *für jedes* $x \in E$*. Dann* $\sup_{A\in\mathcal{A}}\|A\| < \infty$*.*

4.9 Lemma. *Es sei* E *ein Banachraum und* $\beta \colon E \times E \to \mathbb{K}$ *eine Bilinearform oder eine Sesquilinearform. Sie ist genau dann stetig, wenn es ein* $C > 0$ *gibt, so dass*

$$|\beta(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|.$$

4.10 Satz (Lax-Milgram). *Es sei* H *ein Hilbertraum und es sei* β *eine stetige Sesquilinearform auf* H*. Dann gibt es genau eine Abbildung* $T \colon H \to H$*, so dass*

$$\beta(x,y) = (Tx,y)$$

für alle $x, y \in H$*. Es gelten* $T \in L(H)$ *und* $\|T\| = \sup\{|\beta(x,y| \mid \|x\|, \|y\| \leq 1\}$*.*

4.11 Satz. *Es sei* $A \in L(H)$ *normal. Dann gibt es genau einen w-stetigen $*$-Homomorphismus* $\Psi \colon \mathcal{M}^\infty(\sigma(A)) \to L(H)$*, für welchen* $\Psi(z) = A$ *gilt. Dieser Homomorphismus ist stetig mit* $\|\Psi\| = 1$*.*

4.12 Definition. Der Algebrenhomomorphismus $\Psi \colon \mathcal{M}^\infty(\sigma(A)) \to L(H)$ aus Satz 4.11 ist der *Funktionalkalkül* des normalen Operators A.

4.13 Lemma. *Es sei* $A \in L(H)$ *normal.*

(a) Die Elemente von $\operatorname{Bild}(\Psi)$ *kommutieren miteinander, also auch mit* A *und* A^**. Speziell sind sie alle normal.*

(b) Falls $f \in \mathcal{M}^\infty(\sigma(A))$ *reellwertig ist, so ist* $\Psi(f)$ *selbstadjungiert.*

4.14 Definition. (a) Es sei E ein k-Vektorraum. Eine k-lineare Abbildung $P \colon E \to E$ heißt *Projektion,* wenn $P^2 = P$.

(b) Es sei H ein Hilbertraum. Eine Projektion $P \colon H \to H$ heißt *orthogonal,* wenn $\operatorname{Bild}(P) \perp \ker P$.

Wir hatten in der Einführung gezeigt:

4.15 Satz. *Es sei* $P \colon H \to H$ *eine Projektion.*

(a) Falls P *orthogonal ist, so ist* P *ist stetig.*

(b) *Falls* P *orthogonal ist, so gilt* $P = 0$ *oder* $\|P\| = 1$.

(c) *Falls* P *stetig ist, so ist* P *genau dann selbstadjungiert, wenn* P *orthogonal ist.*

4.16 Bezeichnung. (a) Wir bezeichnen die Borelmengen eines topologischen Raums X mit $\mathcal{B}(X)$.

(b) Wenn Ψ der Funktionalkalkül eines normalen Operators $A \in L(H)$ ist, dann definieren wir für $M \in \mathcal{B}(\sigma(A))$

$$E(M) = \Psi(\chi_M).$$

4.17 Lemma. *(a) Für* $M \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ *ist* $E(M)$ *eine orthogonale Projektion mit* $AE(M) = E(M)A$.

(b) *Die Einschränkung* A_M *von* A *auf* $\mathrm{Bild}(E(M))$ *bildet* $\mathrm{Bild}(E(M))$ *in sich ab und es gilt* $\sigma(A_M) \subseteq \overline{M}$.

(c) *Falls* M *nicht-leer und offen ist, dann* $E(M) \neq 0$.

4.18 Definition. Es seien Y ein lokalkompakter, σ-kompakter, topologischer Raum und H ein Hilbertraum. Ein *Spektralmaß* auf Y ist eine Abbildung $E \colon \mathcal{B}(Y) \to L(H)$ mit den folgenden Eigenschaften

(a) $E(\emptyset) = 0$, $E(Y) = \mathrm{id}_H$ und für jedes $M \in \mathcal{B}(Y)$ ist $E(M)$ eine orthogonale Projektion.

(b) $E(M_1 \cap M_2) = E(M_1)E(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(Y)$.

(c) Falls $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(Y)$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, dann $E(M_1 \cup M_2) = E(M_1) + E(M_2)$.

(d) Für jedes $x \in H$ wird durch $E_{x,x}(M) = (E(M)x, x)$ ein Borelmaß auf Y gegeben.

4.19 Satz. *Sei* $A \in L(H)$ *normal und sei* Ψ *sein Funktionalkalkül. Dann wird durch* $E(M) = \Psi(\chi_M)$ *ein Spektralmaß auf* $\sigma(A)$ *gegeben. Für* $f \in \mathcal{M}^\infty(\sigma(A))$ *und* $x \in H$ *gilt*

$$(\Psi(f)x, x) = \int f \, dE_{x,x}.$$

4.20 Lemma. *Es seien* $A, B \in L(H)$, *so dass* $(Ax, x) = (Bx, x)$ *für alle* $x \in H$. *Dann* $A = B$.

Bemerkung. Wir haben vorausgesetzt, dass H ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Im Fall von $\mathbb{R}$-Vektorräumen gilt die Aussage i. a. nicht. Ein Beispiel wird gegeben durch

$$A(x_j)_{j \in \mathbb{N}} = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, x_5, \dots).$$

4.21 Lemma. *Für einen kompakten topologischen Raum* X *sei sei* $\mathcal{T}(X)$ *die lineare Hülle von* $\{\chi_M \mid M \in \mathcal{B}(Y)\}$. *Dann ist* $\mathcal{T}(X)$ *dicht in* $\mathcal{M}^\infty(X)$.

4.22 Satz. *Es sei* E *ein Spektralmaß auf* Y *und es sei* $f \in \mathcal{M}^\infty(Y)$. *Dann existiert ein eindeutig bestimmter Operator* $\int f \, dE \in L(H)$ *mit den folgenden beiden Eigenschaften*

(a) Für jedes $x \in H$ *gilt* $\big((\int f \, dE)x, x\big) = \int f \, dE_{x,x}$.

(b) Für jedes $x \in H$ *gilt* $\big\|(\int f \, dE)x\big\|^2 = \int |f|^2 \, dE_{x,x}$.

4.23 Definition. $\int f \, dE$ ist das Integral von f nach dem Spektralmaß.

4.24 Theorem (Spektralsatz für normale Operatoren). *Ist* $A \in L(H)$ *normal, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß* E *auf* $\sigma(A)$, *für welches* $A = \int z \, dE$.

5 Das Spektralmaß

5.1 Theorem (Fuglede (1949)). *Sei* A *eine* C^**-Algebra und seien* $a, b \in A$*, wobei* a *normal ist. Falls* $ab = ba$*, so gilt auch* $a^*b = ba^*$.

5.2 Satz. *Es sei* $A \in L(H)$ *normal und es sei* E *sein Spektralmaß. Ein Operator* $B \in L(H)$ *vertauscht genau dann mit* A*, wenn* $BE(M) = E(M)B$ *für alle* $M \in \mathcal{B}(\sigma(A)))$.

5.3 Definition. Ein Operator $A \in L(H)$ heißt *positiv*, wenn $(Ax, x) \geq 0$ für alle $x \in H$ gilt. Man schreibt dann $A \geq 0$. Ferner schreibt man $A \leq B$, wenn $B - A$ positiv ist.

5.4 Satz. *Sei* $A \in L(H)$ *ein normaler Operator, sei* $\Psi\colon \mathcal{M}^\infty(\sigma(A)) \to L(H)$ *sein Funktionalkalkül und sei* $f \in \mathcal{M}^\infty(\sigma(A))$*. Falls* $f \geq 0$*, so ist* $\Psi(f)$ *positiv.*

Insbesondere ist $E(M)$ *positiv, wenn* $M \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ *und* E *das Spektralmaß bezeichnet.*

5.5 Lemma. *Ein Operator* $A \in L(H)$ *ist genau dann selbstadjungiert, wenn* $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ *für jedes* $x \in H$.

5.6 Bezeichnung. Sei H ein Hilbertraum und sei $E \subseteq H$ ein Unterraum. Den Raum $E^\perp = \{y \in H \mid \forall x \in E : (y, x) = 0\}$ bezeichnen wir als *Orthogonalraum* von E in H.

5.7 Satz. *Es seien* G, H *Hilberträume und es sei* $A \in L(G, H)$*. Dann gilt* $(\operatorname{Bild} A)^\perp = \ker A^*$.

Das ist ein Spezialfall von Satz 11.8 der Einführung in die Funktionalanalysis.

5.8 Satz. $A \in L(H)$ *ist genau dann positiv, wenn* A *selbstadjungiert ist und* $\sigma(A) \subset [0, \infty[$.

5.9 Beispiel. Sei $A \in L(H)$ positiv. Dann hat A eine eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel.

5.10 Bemerkung. In Lemma 4.17 (c) wurde gezeigt, dass $E(M) \neq 0$, falls M eine offene Teilmenge von $\sigma(A)$ ist. (Dabei ist “offen” in der Relativtopologie zu verstehen.)

Das können wir mit Satz 5.4 auch wie folgt sehen: Wenn M offen ist, dann gibt es $0 \neq f \in C(\sigma(A))$ mit $0 \leq f \leq \chi_M$. Wegen Satz 2.19 ist der stetige Funktionalkalkül eine Isometrie, also $\Phi(f) \neq 0$. Aus Satz 5.4 folgt dann $0 \leq \Phi(f^2) = \Psi(f^2) \leq E(M)$ und schließlich für ein x mit $\Phi(f)x \neq 0$

$$0 \leq \big((\Phi(f^2) - E(M))x, x\big) = \big(\Phi(f)x, \Phi(f)x\big) - \big(E(M)x, x\big).$$

Also $(E(M)x, x) \geq \|\Phi(f)x\|^2 > 0$.

5.11 Satz. *Es sei* $A \in L(H)$ *normal mit Spektralmaß* E. *Dann ist* λ *genau dann ein Eigenwert von* A, *wenn* $E(\{\lambda\}) \neq 0$. *In diesem Fall ist* $\operatorname{Bild}(E(\{\lambda\}))$ *der zugehörige Eigenraum.*

5.12 Korollar. *Es sei* $A \in L(H)$ *normal und es sei* $z \in \sigma(A)$ *ein isolierter Punkt. Dann ist* z *ein Eigenwert von* A.

Die Umkehrung gilt nicht.

5.13 Definition. Es seien G, H Hilberträume und $G_0 \subseteq G$, $H_0 \subseteq H$ abgeschlossene Unterräume. Eine Abbildung $U \in L(H, G)$ ist eine *partielle Isometrie,* wenn $U|_{H_0}\colon H_0 \to G_0$ ein isometrischer Isomorphismus ist und $U|_{H_0^\perp} = 0$.

5.14 Lemma. *Für* U *wie in der Definition gelten*

$$U^*|_{G_0} = (U|_{H_0})^{-1} \quad \textit{und} \quad U^*|_{G_0^\perp} = 0.$$

Ferner ist U^* *ebenfalls eine partielle Isometrie.*

5.15 Satz (Polarzerlegung). *Seien* G, H *Hilberträume und sei* $A \in L(H, G)$. *Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Darstellung* $A = UP$, *wobei* $P \in L(H)$ *positiv und* $U \in L(H, G)$ *eine partielle Isometrie von* $\overline{\operatorname{Bild}(P)}$ *nach* $\overline{\operatorname{Bild}(A)}$ *ist. Es gelten* $P^2 = A^*A$ *und* $P = U^*A$.

5.16 Beispiel. Sei $A\colon H \to G$ ein kompakter Operator zwischen unendlich-dimensionalen Hilberträumen (oder ein linearer Operator zwischen endlich-dimensionalen Hilberträumen). Dann besitzt A eine Singulärwertzerlegung, nämlich eine Nullfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ sowie Orthonormalbasen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in G, so dass

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x, e_n)f_n, \quad x \in H.$$

Dann wird die Polarzerlegung gegeben durch

$$Pe_n = |s_n|e_n, \quad Ue_n = \frac{s_n}{|s_n|}f_n.$$

5.17 Korollar. *Jeder invertierbare Operator* $A \in L(H)$ *besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung* $A = UP$, *wobei* $P \in L(H)$ *positiv und invertierbar und* $U \in L(H)$ *unitär ist.*

5.18 Bemerkung. Sei $A \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann ist e^{iA} unitär.

5.19 Satz. *Sei* $U \in L(H)$ *unitär. Dann existiert ein eindeutig bestimmter injektiver, positiver Operator* $A \in L(H)$ *mit* $\sigma(A) \subseteq [0, 2\pi]$, *so dass* $U = e^{iA}$.

6 $*$-Darstellungen normaler, beschränkter Operatoren

Dieser Abschnitt orientiert sich am Aufbaukurs [3] von Kaballo.

6.1 Definition. Es sei A eine C^*-Algebra. Eine $*$-*Darstellung* von A auf einem Hilbertraum H ist ein $*$-Homomorphismus $\Psi\colon A \to L(H)$. (Insbesondere also $\Psi(1) = \mathrm{id}_H$.)

Ein abgeschlossener Unterraum $V \subset H$ heißt Ψ-*invariant*, wenn $\Psi(a)V \subseteq V$ für alle $a \in A$. In diesem Fall definiert $\Psi_V\colon a \mapsto \Psi(a)|_V$ eine $*$-Darstellung von A auf $L(V)$.

Eine $*$-Darstellung heißt *zyklisch*, falls ein Vektor $\xi \in H$ existiert, so dass

$$\overline{\{\Psi(a)\xi \mid a \in A\}} = H.$$

In diesem Fall ist ξ ein *zyklischer Vektor*.

6.2 Beispiel. Es sei $T \in L(H)$ ein normaler Operator und es sei $\Phi\colon C(\sigma(T)) \to L(H)$ sein stetiger Funktionalkalkül. Dann ist Φ eine $*$-Darstellung von $C(\sigma(T))$ auf H.

Wir nehmen nun an, dass A einen Eigenwert λ besitzt und bezeichnen mit V den zugehörigen Eigenraum. Dieser Unterraum ist Φ-invariant, wie man wie folgt sieht:

Nach Satz 5.11 gilt $V = E(\{\lambda\})$, wobei E das Spektralmaß von T ist. Wenn $x \in V$, dann $x = E(\{\lambda\})x$, da $E(\{\lambda\})$ eine orthogonale Projektion ist. Für $f \in C(\sigma(T))$ gilt

$$\Phi(f)x = \Psi(f)x = \Psi(f)E(\{\lambda\})x = \Psi(f\chi_{\{\lambda\}})x = \Psi(\chi_{\{\lambda\}}f)x = E(\{\lambda\})\Psi(f)x \in V.$$

6.3 Lemma. *Wenn V Ψ-invariant ist, dann ist auch $V^\perp$ Ψ-invariant.*

6.4 Bemerkung. (a) Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und sei $\Psi\colon C(K) \to L(H)$ eine $*$-Darstellung. Dann wird für jedes $x \in H$ durch

$$\Psi_x\colon f \mapsto (\Psi(f)x, x)$$

ein positives, lineares Funktional erklärt. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz für Maße folgt die Existenz eines Borelmaß μ_x auf K mit

$$(\Psi(f)x, x) = \int_K f\, d\mu_x \;\forall f \in C(K).$$

Es gilt $\mu(K) = (\Psi(1)x, x) = \|x\|^2$.

(b) Für $f \in C(K)$, $x \in H$ und μ_x wie in (a) definieren wir den Multiplikationsoperator $M_f^x \colon L^2(K, \mu_x) \to L^2(K, \mu_x)$ durch $M_f^x(\varphi) = f\varphi$. So erhalten wir eine $*$-Darstellung $\Delta^x \colon C(K) \to L(L^2(K, \mu_x))$ mittels $\Delta(f) = M_f^x$.

(c) $C(K)$ ist dicht im $L^2(K, \mu_x)$. Das wird in Rudin, *Real and Complex Analysis*, Theorem 3.14, gezeigt.

6.5 Satz. *Sei* $x \in H$ *ein zyklischer Vektor einer* $*$*-Darstellung* $\Psi \colon C(K) \to L(H)$. *Dann existiert ein unitärer Operator* $U \colon H \to L^2(K, \mu_x)$ *mit* $U\Psi(f)U^{-1} = \Delta^x(f)$ *für alle* $f \in C(K)$.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\;U\;} & L^2(K, \mu_x) \\ {\scriptstyle \Psi(f)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle M_f^x = \Delta^x(f)} \\ H & \xrightarrow{\;U\;} & L^2(K, \mu_x) \end{array}$$

6.6 Definition. Für $k \in \mathbb{N}$ sei H_i ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, -)_k$. Die ℓ^2-*direkte Summe* der H_i wird gegeben durch

$$\bigoplus_{k=1}^{\infty}{}_{\ell^2} H_k = \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \prod_{k=1}^{\infty} H_k \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k^2 < \infty \right\}.$$

Sie wird versehen mit dem Skalarprodukt $((x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k, y_k)_k$.

6.7 Lemma. $\bigoplus_{k=1}^{\infty}{}_{\ell^2} H_k$ *ist ein Hilbertraum.*

6.8 Bemerkung. Wenn die H_k paarweise orthogonale, abgeschlossene Unterräume eines Hilbertraums H sind und der einzige Vektor, der zu allen H_k orthogonal ist, der Nullvektor ist, dann ist $\bigoplus_{k=1}^{\infty}{}_{\ell^2} H_k$ isometrisch isomorph zu H und man identifiziert die beiden Räume.

6.9 Definition. Ein normierter Raum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare, dichte Teilmenge enthält.

6.10 Beispiel. Für offenes $U \subseteq R^n$ und $1 \leq p < \infty$ ist $L^2(U)$ separabel.

6.11 Satz. *Sei* H *ein separabler Hilbertraum und sei* $\Psi \colon C(K) \to L(H)$ *eine* $*$-*Darstellung. Dann gibt es abgeschlossene, paarweise orthogonale Unterräume* H_i, $i \in I$, *wobei* I *höchstens abzählbar ist, so dass*

(a) $\bigoplus_{i \in I}{}_{\ell^2} H_i = H$,

(b) für jedes i *ist* H_i Ψ*-invariant,*

(c) für jedes i *ist* $\Psi|_{H_i}$ *zyklisch.*

6.12 Theorem. *Sei* H *ein separabler Hilbertraum und sei* $\Psi\colon C(K) \to L(H)$ *eine* $*$*-Darstellung. Dann existieren eine höchstens abzählbare Familie* $(\mu_i)_{i\in I}$ *endlicher Borelmaße auf* K *und ein unitärer Operator* $U\colon H \to \bigoplus_{i\in I}{}_{\ell^2} L^2(K,\mu_i)$ *mit* $U\Psi(f)U^{-1} = \Delta^I(f)$ *für alle* $f \in C(K)$*, wobei*

$$\Delta^I(f)((\varphi_i)_{i\in I}) = (f\varphi_i)_{i\in I}, \qquad f \in C(K),\ (\varphi_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}{}_{\ell^2} L^2(K,\mu_i).$$

7 Sobolewräume

Dieser Abschnitt orientiert sich an Evans, *Partial Differential Equations.*

7.1 Bezeichnung. Für $U \subseteq \mathbb{R}^N$ bezeichnen wir mit $L^1_{loc}(U)$ den Raum aller Lebesgue-messbaren Funktionen f auf U, so dass für jedes Kompaktum $K \subset U$ gilt $\int_K |f| \, d\lambda_N < \infty$. Wir benötigen keine Topologie auf $L^1_{loc}(U)$.

Mittels der Hölderschen Ungleichung sieht man, dass für $1 \leq p < \infty$ gilt $L^p(U) \subset L^1_{loc}(U)$.

Mit $\mathcal{D}(U) = C_c^\infty(U)$ bezeichnen wir den Raum aller C^∞-Funktionen auf U, deren Träger kompakt in U ist.

7.2 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und seien $u, v \in L^1_{loc}(U)$. Man sagt, v sei die *schwache Ableitung* von u zum Multiindex α, wenn für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt

$$\int_U u \, \varphi^{(\alpha)} \, d\lambda_n = (-1)^{|\alpha|} \int v \, \varphi \, d\lambda_n.$$

Man schreibt dann $v = D^\alpha u$.

Bemerkung. $v \in L^1_{loc}(U)$ ist also genau dann die schwache Ableitung von $u \in L^1_{loc}(U)$, wenn die durch v gegebene Distribution gleich der Ableitung der durch u gegebenen Distribution ist.

7.3 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $k \in \mathbb{N}_0$ und sei $1 \leq p < \infty$. Der *Sobolewraum* $W^{k,p}(U)$ besteht aus allen $u \in L^p(U)$, deren sämtliche Ableitungen $D^\alpha u$ mit $|\alpha| \leq k$ im schwachen Sinne existieren und in $L^p(U)$ liegen.

Der Raum $W^{k,2}(U)$ wird auch mit $H^k(U)$ bezeichnet.

7.4 Beispiel. $f(x) = |x|^3$. Für $1 \leq p < \infty$ gilt $f \in W^{3,p}(]-1,1[)$.

$f'(x) = 3x|x|$ und $f''(x) = 6|x|$ gilt sogar im klassischen Sinn. Ferner ist $f'''(x) = 6 \operatorname{signum}(x)$ im schwchen Sinn. Um das zu sehen, sei $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$. Dann

$$\begin{aligned} \int_{]-1,1[} 6|x|\varphi'(x) \, d\lambda_1(x) &= 6\int_{-1}^0 (-x)\varphi'(x) \, dx + 6\int_0^1 x\varphi'(x) \, dx \\ &= 6\int_{-1}^0 \varphi(x) \, dx - 6\int_0^1 \varphi(x) \, dx = -\int_{]-1,1[} 6 \operatorname{signum}(x)\varphi(x) \, d\lambda_1(x). \end{aligned}$$

7.5 Definition. Für $1 \leq p < \infty$ wird $W^{k,p}(U)$ versehen mit der Norm

$$\|u\|_{k,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p\Big)^{1/p}.$$

$H^k(U)$ wird versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{H^k(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(U)}.$$

7.6 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $p \in [1, \infty[$ ist $W^{k,p}(U)$ ein Banachraum und $H^k(U)$ ein Hilbertraum.*

7.7 Satz (Leibnizsche Formel). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, sei $g \in \mathcal{D}(U)$ und sei $u \in W^{k,p}(U)$. Dann $gu \in W^{k,p}(U)$ und für $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt*

$$D^\alpha(gu) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta(g) D^{\alpha-\beta}(u).$$

7.8 Theorem. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $k \in \mathbb{N}_0$ und sei $1 \leq p < \infty$. Zu jedem $u \in W^{k,p}(U)$ gibt es eine Folge $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $W^{k,p}(U) \cap C^\infty(U)$, die in $W^{k,p}(U)$ gegen u konvergiert.*

7.9 Theorem. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Ferner seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Dann existiert zu jedem $u \in W^{k,p}(U)$ eine Folge $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $C^\infty(\overline{U})$, welche in $W^{k,p}(U)$ gegen u konvergiert.*

Bemerkung. Der Satz gilt auch noch, wenn der Rand nur stetig ist. Zitate findet man in Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Abschnitt 1.4.2. Der Satz gilt also auch für Polytope.

Den folgenden Spursatz und seine Folgerungen findet man in § 5.5 des Buchs von Evans.

7.10 Theorem (Spursatz (engl.: trace theorem)). *Es sei $1 \leq p < \infty$ und es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Dann existieren $C > 0$ und ein stetiger linearer Operator*

$$T \colon W^{1,p}(G) \to L^p(\partial G),$$

so dass

$$\begin{aligned} Tu &= u|_{\partial G} && \textit{falls } u \in C^1(\overline{G}), \\ \|Tu\|_{L^p(\partial G)} &\leq C\|u\|_{W^{1,p}(G)} && \textit{falls } u \in W^{1,p}(G). \end{aligned}$$

7.11 Definition. Man bezeichnet Tu als *Spur* von u auf dem Rand.

7.12 Theorem (Divergenzsatz). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine beschränkte offene Menge mit* C^1*-Rand, sei* $1 \leq p < \infty$.

(a) Es sei $u \in W^{1,p}(U)$. *Dann gilt für* $j = 1, \dots, n$

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_j} d\lambda_n = \int_{\partial U} u\nu_j d\sigma,$$

wobei ν_j *die* j*-te Komponente der äußeren Einheitsnormalen ist.*

(b) Es sei $u \in W^{1,p}(U, \mathbb{R}^n)$, *d. h. die Komponenten von* u *seien in* $W^{1,p}(U)$. *Dann gilt*

$$\int_U \operatorname{div} u \, d\lambda_n = \int_{\partial U} \langle u, \nu \rangle \, d\sigma.$$

7.13 Korollar (Partielle Integration). *Sei* $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ *ein beschränktes Intervall, sei* $g \in \mathcal{D}(I)$ *und sei* $u \in W^{1,p}(I)$. *Dann*

$$\int_I g' u \, d\lambda_1 = - \int_I g u' \, d\lambda_1.$$

7.14 Theorem. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine beschränkte offene Menge mit* C^1*-Rand und sei* $1 \leq p < \infty$. *Seien* $f, g \in W^{2,p}(U)$ *und* $h \in W^{1,p}(U)$. *Dann*

(a)

$$\int_U h \, \Delta \overline{g} \, d\lambda_n = - \int_U \langle \nabla h, \nabla g \rangle \, d\lambda_n + \int_{\partial U} h \, \langle \nabla \overline{g}, \nu \rangle \, d\sigma.$$

(b)

$$\int_U (f \, \Delta g - g \, \Delta f) d\lambda_n = \int_{\partial U} (f \, \langle \nabla g, \nu \rangle - g \, \langle \nabla f, \nu \rangle) \, d\sigma.$$

7.15 Definition. Mit $W_0^{k,p}(U)$ wird der Abschluss von $\mathcal{D}(U)$ in $W^{k,p}(U)$ bezeichnet. Statt $W_0^{k,2}(U)$ schreibt man auch $H_0^k(U)$.

7.16 Beispiel. (a) $W_0^{0,p}(U) = W^{0,p}(U) = L^p(U)$.

(b) $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

7.17 Theorem. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine beschränkte offene Menge mit* C^1*-Rand und sei*

$$T \colon W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

der Spuroperator. Dann gilt

$$W_0^{1,p}(U) = \ker T.$$

8 Unbeschränkte Operatoren

8.1 Definition. Es seien E und F zwei Banachräume. Ein *Operator* A von E nach F ist eine lineare Abbildung A von einem Unterraum $D(A)$ von E mit Werten in F. $D(A)$ ist der *Definitionsbereich* von A, $R(A) = \{Ax \mid x \in D(A)\}$ ist sein *Bild*. Der normierte Raum $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\}$ ist der *Graph* von A.

Der Operator A ist *dicht definiert*, wenn sein Definitionsbereich dicht ist.

Sind A und B zwei Operatoren von E nach F und gilt $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$, so bezeichnet man B als *Erweiterung* von A und A als *Einschränkung* von B.

8.2 Definition. Ein Operator A von E nach F heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph abgeschlossen ist. Er heißt *abschließbar*, wenn $\overline{\mathcal{G}(A)}$ Graph eines Operators B ist. In diesem Fall ist B die *Abschließung* von A. Wir schreiben dann $\overline{A}$.

Bemerkung. (a) $\overline{A}$ ist also definiert durch $\mathcal{G}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{G}(A)}$.

(b) A ist genau dann abschließbar, wenn es einen Operator B gibt mit $\overline{\mathcal{G}(A)} \subseteq \mathcal{G}(B)$.

8.3 Beispiel. Es sei $D(A) := \mathcal{D}[0,1]$. Auf $D(A)$ definieren wir durch $Af := if'$ einen unbeschränkten Operator in $E := L^2[0,1]$. Er ist abschließbar. Genauer gelten $D(\overline{A}) = H_0^1[0,1]$ und $\overline{A}f = if'$.

Ein wichtiger Satz aus der Einführung in die Funktionalanalysis ist:

8.4 Theorem (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *E und F seien Banachräume und $A\colon E \to F$ sei linear. Wenn $\mathcal{G}(A)$ abgeschlossen ist, dann ist A stetig.*

8.5 Lemma. *Wenn A abgeschlossen mit $D(A) = E$ ist, dann ist A stetig.*

8.6 Definition. Es sei A ein injektiver Operator von E nach F. Dann wird durch

$$\mathcal{G}(A^{-1}) = \{(Ax, x) \mid x \in D(A)\}$$

ein Operator mit Definitionsbereich $D(A^{-1}) = \operatorname{Bild} A$ erklärt. A^{-1} ist der *Inverse* zu A.

Offenbar ist A^{-1} genau dann abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist.

8.7 Definition. Für Operatoren A, B von E nach F definieren wir $A+B$ auf $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ durch $(A+B)(x) = Ax + Bx$.

Bemerkung. Es ist im allgemeinen nicht klar, dass $D(A+B)$ nicht-trivial ist. Sinn macht die Definition hauptsächlich, wenn einer der beiden Operatoren stetig ist.

8.8 Lemma. A *und* B *seien Operatoren von* E *nach* F*. Falls* A *abgeschlossen und* B *beschränkt ist, so ist* $A + B$ *abgeschlossen.*

8.9 Definition. Sei A ein Operator in E. Die *Resolventenmenge* $\rho(A)$ besteht aus denjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die $z\,\mathrm{id} - A$ injektiv ist mit $\mathrm{Bild}(z\,\mathrm{id} - A) = E$. Die Menge $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt *Spektrum* von A. Für $z \in \rho(A)$ bezeichnet man $R(z, A) = (\mathrm{id}\, z - A)^{-1}$ als *Resolvente* von A in z.

8.10 Lemma. *Falls* A *abgeschlossen ist, so gilt* $R(z, A) \in L(E)$ *für* $z \in \rho(A)$.

8.11 Satz. *Wenn* A *ein abgeschlossener Operator ist, dann ist* $\sigma(A)$ *abgeschlossen.*

8.12 Satz. *Sei* A *ein abgeschlossener Operator in* E *mit* $\sigma(A) = \emptyset$*. Dann* $A^{-1} \in L(E)$ *und* $\sigma(A^{-1}) = \{0\}$.

9 Wegintegrale in Banachräumen

Bei den Kapiteln über holomorphe Abbildungen mit Werten in Banachräumen orientiere ich mich an einem Skript von Werner Balser https://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/balser/Skripten/Funktionentheorie-Master.pdf

9.1 Bezeichnung. Eine *Zerlegung* eines Intervalls $[a, b]$ ist ein Tupel $(t_0, t_1, \ldots, t_N)$, so dass $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$. Eine Zerlegung $\mathcal{Z}_1$ ist eine *Verfeinerung* einer Zerlegung $\mathcal{Z}$, wenn $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}_1$.

9.2 Definition. Es seien E ein Banachraum, $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stetiger Weg und es sei $f\colon \mathrm{Bild}(\gamma) \to E$ eine Abbildung.

(a) Wenn $\mathcal{Z} = (t_0, \ldots, t_N)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ ist und für $k = 1, \ldots, N$ ein $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ gewählt ist, dann bezeichnen wir

$$S(f, \gamma, \mathcal{Z}, \tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\tau_k))\big(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\big)$$

als *Riemann-Summe*.

(b) Man sagt, dass das *Wegintegral* $\int_\gamma f(z)\,dz$ von f über γ existiert, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\epsilon > 0$ gibt, so dass für jede Verfeinerung $\mathcal{Z} = (t_0, \ldots, t_N)$ von $\mathcal{Z}_\epsilon$ und jede Wahl von Zwischenpunkten $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ gilt

$$\left\| \int_\gamma f(z)\,dz - S(f, \gamma, \mathcal{Z}, \tau) \right\| < \epsilon$$

9.3 Lemma. *Es sei* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ *stückweise* C^1 *und es sei* $f\colon \mathrm{Bild}(\gamma) \to E$ *so, dass* $T \circ f$ *stetig ist für alle* $T \in E'$. *Dann gilt*

$$\left\| \int_\gamma f(z)\,d(z) \right\| \le L \sup_{a \le t \le b} \|f(\gamma(t))\|,$$

wobei L *die Länge von* γ *ist.*

9.4 Bemerkung. Im Beweis haben wir für $T \in E'$ mitbewiesen:

$$T\left(\int_\gamma f(z)\,dz \right) = \int_\gamma T \circ f(z)\,dz.$$

9.5 Satz. *Es seien* E *ein Banachraum,* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ *ein stückweiser* C^1*-Weg und* $f\colon \mathrm{Bild}(\gamma) \to E$ *stetig. Dann existiert das Wegintegral* $\int_\gamma f(z)\,dz$*. Es hängt nicht von der Auswahl der* $\mathcal{Z}_\epsilon$ *ab.*

Bemerkung. Insbesondere stimmt für $E = \mathbb{C}$ das Wegintegral in diesem Sinn mit dem Wegintegral aus der Funktionentheorie überein.

10 Vektorwertige holomorphe Abbildungen

10.1 Definition. Es seien E ein Banachraum, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to E$ eine Abbildung.

(a) f heißt *holomorph*, wenn für jedes $z_0 \in U$ der Grenzwert

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0} \left(f(z) - f(z_0)\right)$$

existiert.

(b) f heißt *schwach holomorph*, wenn für jedes $T \in E'$ die Funktion $T \circ f$ holomorph ist.

10.2 Bemerkung. Wenn f holomorph ist, dann ist f auch schwach holomorph. Für jedes $T \in E'$ gilt $(T \circ f)' = T \circ f'$.

10.3 Satz. *Es seien* $U \subseteq \mathbb{C}$, E *ein Banachraum und es sei* $f\colon U \to E$ *schwach holomorph. Dann ist* f *stetig.*

10.4 Definition. Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ Wege in $\mathbb{C}$ und $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$. Formale Summen der Form $T = \sum_{j=1}^{n} m_j \gamma_j$ heißen *Ketten.* Sie heißen *Zyklen,* wenn alle γ_j geschlossen sind.

10.5 Definition. Es sei $T = \sum_{j=1}^{n} m_j \gamma_j$ eine Kette aus stückweisen C^1-Wegen. Dann definiert man

(a) $\displaystyle\int_T f = \sum_{j=1}^{n} m_j \int_{\gamma_j} f.$

(b) $\displaystyle\mathrm{Bild}(T) = \bigcup_{\substack{j=1 \\ m_j \neq 0}}^{n} \mathrm{Bild}(\gamma_j).$

Ist T sogar ein Zyklus, so setzt man für $z \notin \mathrm{Bild}(T)$

$$\mathrm{Ind}_T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{j=1}^{n} m_j \,\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(z).$$

$\mathrm{Ind}_Z(z)$ ist die *Umlaufzahl* des Zykels T um z_0.

10.6 Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es seien T und S Zyklen aus stückweisen C^1-Wegen.

(a) T in U heißt *nullhomolog* in U, (i. Z. $T \sim 0$), wenn für jedes $a \in \mathbb{C} \setminus U$ gilt $\mathrm{Ind}_T(a) = 0$.

(b) T und S in U heißen *homolog* in U (i. Z. $T \sim S$), wenn $T - S \sim 0$.

10.7 Theorem (Cauchysche Integralformel, skalarer Fall). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph auf U, sei T ein nullhomologer Zyklus aus stückweisen C^1-Wegen in U. Dann gelten*

(a) Für alle $z \in U \setminus \mathrm{Bild}(T)$: $f(z)\,\mathrm{Ind}_T(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_T \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$.

(b) $\displaystyle\int_T f = 0$.

10.8 Theorem (Cauchysche Integralformel, vektorwertiger Fall). *Es seien E ein Banachraum, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \to E$ schwach holomorph und T ein nullhomologer Zyklus aus stückweisen C^1-Wegen in U. Dann gilt für jedes $z \in U \setminus \mathrm{Bild}(T)$*

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

10.9 Satz. *Es seien E ein Banachraum, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to E$ eine Abbildung. Dann sind gleichwertig:*

(a) f ist schwach holomorph.

(b) Für jeden geschlossenen, nullhomologen stückweisen C^1-Weg in U gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

(c) Für jeden nullhomologen Zyklus T aus stückweisen C^1-Wegen in U und jedes $z \in U \setminus \mathrm{Bild}(T)$ gilt

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

10.10 Theorem. *Es seien E ein Banachraum und $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f\colon U \to E$ ist genau dann schwach holomorph, wenn sie holomorph ist.*

Beweis. Sei $z_0 \in U$ gegeben. Dann existiert $\epsilon > 0$, so dass $\overline{B}_\epsilon(z_0) \subset U$. Es sei γ der positiv orientierte Rand von $B_\epsilon(z_0)$. Da γ in einer konvexen Menge der Form $B_r(z_0)$ liegt, ist γ nullhomolog in U. Da f nach Satz 10.3 stetig ist, existiert

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta.$$

Wir definieren $g\colon B_\epsilon(z_0) \to E$ durch

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z - z_0}\big(f(z) - f(z_0)\big), & z \neq z_0, \\ A, & z = z_0. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass g schwach holomorph ist. Für $Y \in E'$ gilt wegen der skalaren Cauchyschen Integralformel für die erste Ableitung

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} Y \circ g(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{Y(f(z)) - Y(f(z_0))}{z - z_0} = (Y \circ f)'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{Y \circ f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta = Y(A).$$

Wegen Satz 10.3 ist g daher stetig, also

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} g(z) = A. \qquad \square$$

Mit demselben Beweis wie für Satz 9.12 meiner Funktionentheorie von 2022 zeigt zeigt man:

10.11 Satz. *Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und es sei $\gamma\colon [a, b] \to U$ ein (stetiger) Weg. Dann gibt es ein $r > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:*

Für je zwei Unterteilungen, deren Feinheiten kleiner als r sind, stimmen die Wegintegrale von f über die durch die Unterteilungen definierten Polygonzüge überein.

Wenn γ ein C^1-Weg ist, dann stimmen diese Wegintegrale mit $\int_\gamma f$ überein.

10.12 Definition. Auf diese Weise definiert man das Integral einer holomorphen Funktion über einen stetigen Weg als das Integral über den Polygonzug zu einer hinreichend feinen Unterteilung.

Bemerkung. Damit sind dann auch Umlaufzahl und Homologie für stetige Wege erklärt. Ein Gebiet G ist *einfach zusammenhängend,* wenn jeder Zyklus in G nullhomolog ist.

10.13 Definition. Eine holomorphe Funktion $F\colon U \to E$ heißt *Stammfunktion* von f, wenn $F' = f$.

10.14 Satz. *Wenn $f\colon U \to E$ eine Stammfunktion F besitzt und $\gamma\colon [a, b] \to U$ ein Weg ist, dann*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

10.15 Satz. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n\colon U \to E$ holomorph. Für ein Kompaktum $K \subset U$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_{K,n} = \sup_{z \in K} \|f_n(z)\|$. Falls $\sum_{n=0}^\infty a_{K,n}$ für jedes Kompaktum $K \subset U$ konvergiert, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n(z)$ gegen* *eine holomorphe Funktion auf* U, *und zwar absolut und gleichmäßig auf jedem Kompaktum in* U.

Für jeden Zyklus T *in* U *gilt*

$$\int_T \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_T f_n(z)\, dz.$$

10.16 Satz. *Es sei* $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen und es sei* $f\colon U \to E$ *holomorph. Für* $z_0 \in U$ *sei* $R = \sup\{r > 0 \mid B_r(z_0) \subseteq U\}$. *Für* $0 < r < R$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *setzen wir*

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r^+(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

(a) f_n *hängt nicht von* r *ab.*

(b) Für jedes $z \in B_r(z_0)$ *gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n f_n,$$

wobei für jedes $r < R$ *die Reihe absolut und gleichmäßig in* $\overline{B}_r(z_0)$ *konvergiert.*

10.17 Lemma (Differentiation unter dem Integral). *Seien* $U, V \subset \mathbb{C}$ *offen, sei* $f\colon U \times V \to E$ *stetig und für jedes* $\zeta \in U$ *sei die Funktion* $z \mapsto f(\zeta, z)$ *in* V *holomorph mit Ableitung* $f_z(\zeta, z)$. *Die Abbildung* $f_z\colon U \times V \to E$ *sei ebenfalls stetig. Dann ist die Funktion* $G(z) = \int_\gamma f(\zeta, z) d\zeta$ *holomorph mit* $G'(z) = \int_\gamma f_z(\zeta, z) d\zeta$.

11 Dunford-Riesz Kalkül

Der Dunford-Riesz Kalkül ist ein Funktionalkalkül für nicht notwendig normale Operatoren.

11.1 Beispiel. Der Volterra-Operator ist gegeben durch

$$V\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1], \quad V(f)(x) = \int_{[0,x]} f \, d\lambda_1.$$

In der Einführung wurde gezeigt, dass er kompakt ist und dass $\sigma(V) = \{0\}$. Wäre er normal, so würde aus dem stetigen Funktionkalkül folgen, dass V verschwindet.

11.2 Satz. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $K \subset U$ kompakt. Dann gibt es einen in U nullhomologen Zyklus T, so dass $\mathrm{Ind}_T(z) = 1$ für alle $z \in K$.*

Den Beweis findet man in Remmert, “Funktionentheorie 2”, Kapitel 12, § 4.

Zusammen mit der Resolventengleichung hatten wir gezeigt

$$\lim_{\zeta \to z} \frac{1}{z - \zeta}(R(z,a) - R(\zeta,a)) = -R(z,a)^2.$$

Für festes a ist die Resolvente $R(\cdot, a)\colon \rho(a) \to A$ also eine holomorphe Abbildung.

11.3 Definition. Es sei $A \in L(E)$, es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Obermenge von $\sigma(A)$ und es sei T ein in U nullhomologer Zyklus, so dass $\mathrm{Ind}_T(z) = 1$ für alle $z \in \sigma(A)$. Für eine holomorphe Abbildung $f\colon U \to \mathbb{C}$ setzen wir

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_T f(\zeta) R(\zeta, A) \, d\zeta \in L(E).$$

11.4 Lemma. *Die Definition von $F(A)$ hängt nicht von der Wahl von T ab.*

11.5 Beispiel. Sei $f = \mathrm{id}_U$. Dann sollte $f(A) = A$ herauskommen. Um das zu sehen, müssen wir $\int_T \zeta R(\zeta, A) \, d\zeta$ ausrechnen. In Bemerkung 1.11 hatten wir gesehen, dass $R(\zeta, A) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta^{-j-1} A^j$ falls $|\zeta| > \|A\|$.

Da f eine ganze Funktion ist, können wir für T eine Kreislinie mit hinreichend großem Radius wählen. Dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \sum_{j=0}^{\infty} \zeta \frac{A^j}{\zeta^{j+1}} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} A^j \int_T \frac{1}{\zeta^j} \, d\zeta = A.$$

Eine Verallgemeinerung des Beispiels ist

11.6 Satz. *Sei* $A \in L(E)$*, sei* $\sigma(A) \subset B_R(0)$ *und sei* $f\colon B_R(0) \to \mathbb{C}$ *holomorph mit Taylorentwicklung* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$*. Dann*

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n.$$

Wenn $\sigma(A)$ nicht zusammenhängend ist, dann ist es möglich, das Spektrum zu trennen. Wir hatten das in der Einführung in die Funktionalanalysis bei den kompakten Operatoren so ähnlich gemacht. Ich orientiere mich an Kapitel III, § 6, Abschnitt 4 von Kato [5].

11.7 Bezeichnung. Sei $A \in L(E)$, sei $\sigma(A) = M \cup N$ für disjunkte, abgeschlossene Mengen M und N. Dann gibt es offene und disjunkte Teilmengen V und $\widetilde{V}$ von $\mathbb{C}$, so dass $M \subset V$ und $N \subset \widetilde{V}$. Wir setzen $U = V \cup \widetilde{V}$. Dann sind χ_V und $\chi_{\widetilde{V}}$ holomorph in U. Wir setzen

$$P = \chi_V(A) \quad \text{und} \quad \widetilde{P} = \chi_{\widetilde{V}}(A).$$

11.8 Bezeichnung. Für offenes $U \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(U)$ den Raum der holomorphen Funktionen.

11.9 Satz. *Es sei* $A \in L(E)$*, es sei* $U \subseteq \mathbb{C}$ *eine offene Obermenge von* $\sigma(A)$*. Der Dunford-Riesz Kalkül* $f \mapsto f(A)$ *ist ein Algebrenhomomorphismus von* $\mathcal{O}(U)$ *nach* $L(E)$*.*

11.10 Korollar. P *und* $\widetilde{P}$ *wie in 11.7 sind Projektionen.*

11.11 Bemerkung. $P + \widetilde{P} = \mathrm{id}_E$, denn $\chi_V + \chi_{\widetilde{V}} = 1$.

Wir setzen $E_1 = \mathrm{Bild}(P)$ und $E_2 = \mathrm{Bild}(\widetilde{P})$.

11.12 Lemma. E_1 *und* E_2 *sind abgeschlossen und es gilt* $E = E_1 \oplus E_2$ *(d. h.* $E = E_1 + E_2$ *und* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$*).*

11.13 Lemma. *Es gilt* $AP = PA$ *und* $R(z, A)P = PR(z, A)$ *für alle* $z \in \rho(A)$*. Setzt man also* $A_1 = PA\colon E_1 \to E_1$ *und* $A_2 = \widetilde{P}A\colon E_2 \to E_2$*, so gilt* $A = A_1 + A_2$*.*

11.14 Satz. $\sigma(A_1) = M$ *und* $\sigma(A_2) = N$*.*

12 Abstrakte Funktionalkalküle

Quelle für diesen und folgende Abschnitte: M. Haase, *The Functional Calculus for Sectorial Operators* [2]

12.1 Definition. (a) Ein *Monoid* ist eine Menge $\mathcal{M}$ zusammen mit einer Multiplikation $*\colon \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, so dass

(i) $a * b = b * a$ für alle $a, b \in \mathcal{M}$,

(ii) $a * (b * c) = (a * b) * c$ für alle $a, b, c \in \mathcal{M}$,

(iii) es gibt $1 \in \mathcal{M}$, so dass $1 * a = a$ für alle $a \in \mathcal{M}$.

(b) Ein $\mathbb{C}$-Monoid ist ein Monoid mit einer skalaren Multiplikation $\cdot\colon \mathbb{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, so dass

(i) $\lambda \cdot (a * b) = (\lambda \cdot a) * b$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathcal{M}$

(ii) $1 \cdot a = a$ für alle $a \in \mathcal{M}$.

Den Stern schreiben wir meistens nicht hin.

12.2 Beispiel. (a) $\mathbb{C}$-Algebren sind $\mathbb{C}$-Monoide.

(b) Wir versehen die Riemannsche Zahlensphäre $\hat{\mathbb{C}}$ mit der Multiplikation

$$ab = \begin{cases} ab, & a, b \in \mathbb{C}, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist ein $\mathbb{C}$-Monoid.

12.3 Definition. Es sei $\mathcal{M}$ ein $\mathbb{C}$-Monoid und es sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$ eine $\mathbb{C}$-Algebra, möglicherweise ohne Eins. Dann ist $\mathcal{E}$ eine Unteralgebra, wenn die Multiplikation auf $\mathcal{E}$ Einschränkung der Multiplikation auf $\mathcal{M}$ ist.

Bemerkung. Die Eins eines Monoids ist eindeutig. Daher stimmt die Eins von $\mathcal{E}$ mit der von $\mathcal{M}$ überein, wenn $\mathcal{E}$ eine hat.

12.4 Definition. Es seien $\mathcal{M}$ ein $\mathbb{C}$-Monoid, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$ eine Unteralgebra, X ein Banachraum und $\Phi\colon \mathcal{E} \to L(X)$ ein Algebrenhomomorphismus. Das Tripel $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ ist ein *abstrakter Funktionalkalkül.*

$$\operatorname{Reg}(\mathcal{E}) = \{e \in \mathcal{E} \mid \Phi(e) \text{ ist injektiv}\}$$

ist die Menge der *Regularisierer.* Ein abstrakter Funktionalkalkül heißt *eigentlich,* wenn er mindestens einen Regularisierer besitzt. Ein $f \in \mathcal{M}$ heißt *regularisierbar,* wenn es ein $e \in \mathrm{Reg}(\mathcal{E})$ gibt, für welches $ef \in \mathcal{E}$. Die Menge der regularisierbaren Elemente schreiben wir als $\mathcal{M}_r$. Den Homomorphismus Φ bezeichnet man als *Primärkalkül.*

12.5 Bezeichnung. Es seien A und B (möglicherweise unbeschränkte) Operatoren in X. Dann ist AB definiert auf $D(AB) = \{x \in D(B) \mid Bx \in D(A)\}$ durch $ABx = A(Bx)$.

Das Distributivgesetz gilt dann in der Form $AB + AC \subseteq A(B + C)$.

12.6 Definition. Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ ein eigentlicher, abstrakter Funktionalkalkül. Für $f \in \mathcal{M}_r$ definieren wir

$$\Psi(f) = \Phi(e)^{-1}\Phi(ef), \tag{12.1}$$

wobei $e \in \mathcal{E}$ ein beliebiger Regularisierer ist. Man bezeichnet Ψ als *erweiterten Funktionalkalkül* zum Primärkalkül Φ.

Bemerkung. (a) Die Gleichung (12.1) ist wie folgt zu verstehen: $\Phi(e) \in L(X)$ ist injektiv und stetig. Daher ist $\Phi(e)^{-1}$ erklärt als unbeschränkter Operator mit abgeschlossenem Graphen.

(b) Für $f \in \mathcal{E}$ gilt $\Psi(f) = \Phi(e)^{-1}\Phi(ef) = \Phi(e)^{-1}\Phi(e)\Phi(f) = \Phi(f)$.

12.7 Beispiel. Es sei $A \in L(L^2[0,1])$ gegeben durch $Af(x) = xf(x)$ und es sei $\Phi\colon \mathcal{M}^\infty([0,1]) \to L(L^2[0,1])$ der messbare Funktionalkalkül. Wenn wir mit $\mathcal{M}([0,1])$ die Borel-messbaren Funktionen bezeichnen, dann ist $(\mathcal{M}^\infty([0,1]), \mathcal{M}([0,1]), \Phi)$ ein abstrakter Funktionalkalkül. Wegen $\Phi(1) = \mathrm{id}_H$ ist er eigentlich.

$f \in \mathcal{M}^\infty([0,1])$ ist genau dann ein Regularisierer, wenn f nur auf einer Lebesgue-Nullmenge verschwindet. Die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist daher durch den Regularisierer $x \mapsto x$ regularisierbar. $\Psi(g)$ ist der durch

$$D(A) = \left\{h \in \middle| \, hg \in L^2[0,1]\right\}, \quad Ah = hg$$

definierte unbeschränkte Operator.

12.8 Lemma. *Die Setzung* (12.1) *hängt nicht von der Wahl des Regularisierers e ab.*

12.9 Bezeichnung. Es sei A ein (möglicherweise unbeschränkter) Operator in E und es sei $B \in L(E)$. Wir sagen, dass A mit B *vertauscht,* wenn $BA \subseteq AB$.

12.10 Beispiel. Es sei $B \in L(X)$ injektiv mit dichtem Bild, aber nicht surjektiv. Dann ist $A = B^{-1}$ ein dicht definierter Operator, der nicht beschränkt ist. Es gilt $D(B^{-1}B) = E$, aber $D(BB^{-1}) = \text{Bild}(B)$. Also ist $AB = \text{id}_E$ eine echte Erweiterung von BA. Die Operatoren A und A^{-1} vertauschen.

12.11 Lemma. *Es seien $A, B \in L(X)$, wobei A injektiv ist. Falls $AB = BA$, so vertauschen A^{-1} und B.*

Für die nächsten Lemmata sei $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \varphi)$ ein abstrakter Funktionalkalkül mit Erweiterung Ψ.

12.12 Lemma. *Wenn $T \in L(X)$ mit allen $\Phi(e)$, $e \in \mathcal{E}$, vertauscht, dann auch mit allen $\Psi(f)$, $f \in \mathcal{M}_r$.*

12.13 Lemma. $1 \in \mathcal{M}_r$ *und* $\Psi(1) = \text{id}_E$.

Das ist eine Übungsaufgabe.

12.14 Lemma. *Für $f, g \in \mathcal{M}_r$ gelten $\Psi(f)\Psi(g) \subseteq \Psi(fg)$ und $D(\Psi(f)\Psi(g)) = D(\Psi(g)) \cap D(\Psi(fg))$. Falls $\Psi(g)$ beschränkt ist, gilt die Gleichheit.*

12.15 Lemma. *Seien $f, g \in \mathcal{M}_r$.*

(a) Es gibt $e \in \mathcal{E}$ mit $ef, eg \in \mathcal{E}$.

(b) Falls es ein $h \in \mathcal{M}_r$ gibt, so dass $ef + eg = eh$ für einen gemeinsamen Regularisierer e, so gilt $\Psi(f) + \Psi(g) \subseteq \Psi(h)$.

(c) Falls mit den Bezeichnungen von (b) einer der beiden Operatoren $\Psi(f)$ oder $\Psi(g)$ beschränkt ist, so gilt $\Psi(f) + \Psi(g) = \Psi(h)$.

12.16 Korollar. *Wenn $\mathcal{M}$ eine Algebra und $\mathcal{E}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{M}$ ist, dann gilt $\Psi(f) + \Psi(g) \subseteq \Psi(f + g)$ für alle $f, g \in \mathcal{M}_r$. Falls $\Psi(f)$ oder $\Psi(g)$ beschränkt ist, gilt die Gleichheit.*

12.17 Lemma. *Es seien $f, g \in \mathcal{M}_r$ mit $fg = 1$. Dann ist $\Psi(f)$ injektiv und es gilt $\Psi(f)^{-1} = \Psi(g)$.*

12.18 Lemma. *Seien $f, g \in \mathcal{M}_r$ und seien $\Psi(f)$ und $\Psi(g)$ beide beschränkt und injektiv. Dann*

$$\Psi(f)^{-1}\Psi(g)^{-1} = \Psi(g)^{-1}\Psi(f)^{-1}.$$

12.19 Lemma. *Für $f \in \mathcal{M}_r$ sei $\Psi(f)$ injektiv und beschränkt. Dann gilt für jedes $g \in \mathcal{M}_r$*

$$\Psi(f)^{-1}\Psi(g)\Psi(f) = \Psi(g).$$

12.20 Lemma. *Es seien* $f \in \mathcal{M}_r$ *und* $g \in \mathcal{M}$ *mit* $fg = 1$. *Dann ist* $g \in \mathcal{M}_r$ *genau dann, wenn* $\Psi(f)$ *injektiv ist.*

In diesem Fall gilt $\Psi(g) = \Psi(f)^{-1}$.

12.21 Definition. Eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L(E,F)$ *konvergiert stark* (engl. "strongly") gegen $T \in L(E,F)$, wenn $\lim_{n\to\infty}\|T_n x - Tx\| = 0$ für jedes $x \in E$.

12.22 Lemma. *Es sei* $f \in \mathcal{M}_r$ *und es sei* F *ein Unterraum von* $D(\Psi(f))$. *Ferner gebe es eine Folge* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{E}$, *so dass* $(\Phi(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *stark gegen* id_X *konvergiert und* $\mathrm{Bild}(\Phi(e_n)) \subseteq F$ *für alle* n. *Dann ist*

$$\{(x, \Psi(f)x) \mid x \in F\}$$

dicht in $\mathcal{G}(\Psi(f))$.

12.23 Definition. Für $w \in \mathbb{C}$ führen wir auf $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}(B_{1/n}(w))$ eine Äquivalenzrelation ein: $f \sim g$ genau dann, wenn es $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f, g \in \mathcal{O}(B_{1/n}(w))$ und $f(z) = g(z)$ für alle $z \in B_{1/n}(w)$. Die Äquivalenzklassen sind die *Keime* holomorpher Funktionen in w.

Die Menge alle Keime ist eine Algebra mit punktweiser Addition und Multiplikation. Man bezeichnet sie als den *Halm* der *Garbe* der holomorphen Funktionen in w und schreibt $\mathcal{O}_w$ für den Halm.

Bemerkung. $\mathcal{O}_0$ ist als $\mathbb{C}$-Algebra isomorph zum Raum der konvergenten Potenzreihen. Wir benötigen keine Topologie auf $\mathcal{O}_0$.

12.24 Bezeichnung. Die Algebra $\mathcal{O}_0$ ist ein Integritätsring. Ihr Quotientenkörper ist der Körper $\mathcal{M}_0$ der Keime meromorpher Funktionen in 0. Er ist als Algebra isomorph zur Algebra der konvergenten Laurentreihen mit endlichem Hauptteil.

12.25 Beispiel. Es ist $\mathcal{O}_0$ eine Unteralgebra des Monoids $\mathcal{M}_0$. Es sei $A \in L(X)$ ein injektiver Operator mit $\sigma(A) = \{0\}$. Da der Dunford-Riesz Kalkül ein Algebrenhomomorphismus ist, können wir wie folgt einen Primärkalkül erklären:

$$\Phi\colon \mathcal{O}_0 \to L(X), \quad \Phi(e) = \int_{\partial B_\epsilon^+(0)} e(\zeta) R(\zeta, A)\, d\zeta,$$

wobei $\epsilon < \frac{1}{n}$ für ein n mit $e \in \mathcal{O}(B_{1/n}(0))$.

Der abstrakte Funktionalkalkül $(\mathcal{O}_0, \mathcal{M}_0, \Phi)$ ist eigentlich, denn $\Phi(1)$ ist injektiv.

Es sei $f \in \mathcal{M}_0$. Man zeigt leicht, dass $f = \frac{a}{e}$ für ein $a \in \mathcal{O}_0$ und e ein Monom $\zeta \mapsto \zeta^n$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\Phi(e) = A^n$. Da A injektiv ist, ist e ein Regularisierer.

Wir haben gezeigt, dass alle Elemente von $\mathcal{M}_0$ regularisierbar sind.

12.26 Beispiel. Im vorigen Beispiel untersuchen wir jetzt $X = C[0,1]$ und als A den Volterra-Operator $Vg(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Dann $D(\Phi(\zeta)^{-1}) = \{f \in C^1[0,1] \mid f(0) = 0\}$ und $\Phi(\zeta)^{-1}g = g'$ für $g \in C^1[0,1]$. Das bedeutet

$$\Psi\left(\frac{1}{\zeta}\right) g = \Phi(\zeta)^{-1}\Phi\left(\zeta\frac{1}{\zeta}\right) g = \Phi(\zeta)^{-1}g = g'.$$

Wir lösen als Beispiel für gegebenes $h \in C[0,1]$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'' = -y + h, \quad y(0) = y'(0) = 0. \tag{12.2}$$

Für $f(\zeta) = \frac{4}{\zeta^2} + 1$ wollen wir also $\Psi(f)g = h$ lösen. Wegen des beschränkten Teils von Lemma 12.14 gilt $\Psi(f)\Psi(\frac{1}{f}) = \mathrm{id}$, also $g = \Psi(\frac{1}{f})\,h$.

12.27 Definition. Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ ein eigentlicher, abstrakter Funktionalkalkül über dem Banachraum X.

(a) Wir setzen $\mathcal{M}_b = \{f \in \mathcal{M}_r \mid \Psi(f) \in L(X)\}$.

(b) Eine Unteralgebra $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}_b$ heißt *zulässig,* wenn $\{f \in \mathcal{D} \mid \Psi(f) \text{ injektiv}\} \neq \emptyset$.

(c) Wenn $\mathcal{D}$ eine zulässige Unteralgebra von $\mathcal{M}$ ist, dann ist $(\mathcal{D}, \mathcal{M}, \Phi)$ ebenfalls ein eigentlicher, abstrakter Funktionalkalkül. Wir bezeichnen die Menge seiner regularisierbaren Elemente mit

$$\langle \mathcal{D} \rangle = \{f \in \mathcal{M} \mid \exists d \in \mathcal{D} : df \in \mathcal{D},\ \Psi(d) \text{ injektiv}\}.$$

12.28 Bemerkung. $\langle \mathcal{D} \rangle \subseteq \mathcal{M}_r$.

12.29 Beispiel. In Beispiel 12.25 hatten wir für einen Operator A mit $\sigma(A) = \{0\}$ den abstrakten Funktionalkalkül $(\mathcal{O}_0, \mathcal{M}_0, \Phi)$ betrachtet. Wir setzen $\mathcal{D} = \mathbb{C}[Z]$. Wir behaupten $\langle \mathbb{C}[Z] \rangle = (\mathcal{M}_0)_r = \mathcal{M}_0$.

Die Inklusion $\subseteq$ haben wir gerade gemacht. Bei der Untersuchung von 12.25 hatten wir gesehen, dass wir mit Regularisierern auskommen, die Monome sind.

12.30 Lemma. *Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ ein eigentlicher, abstrakter Funktionalkalkül und es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}_b$ eine zulässige Unteralgebra. Es seien $f \in \mathcal{M}$ und $g \in \langle \mathcal{D} \rangle$, so dass $\Psi(g)$ injektiv und $fg \in \langle \mathcal{D} \rangle$. Dann $f \in \langle \mathcal{D} \rangle$ und $\Psi(f) = \Psi(d)^{-1}\Psi(df)$ für jedes $d \in \mathcal{D}$.*

12.31 Bezeichnung. Ein *Erzeuger* eines abstrakten Funktionalkalküls ist eine zulässige Unteralgebra $\mathcal{D}$, so dass $\langle \mathcal{D} \rangle = \mathcal{M}_r$.

12.32 Korollar. *Es seien $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ zulässige Unteralgebren eines abstrakten Funktionalkalküls. Falls $\mathcal{D}' \subseteq \langle \mathcal{D} \rangle$, so auch $\langle \mathcal{D}' \rangle \subseteq \langle \mathcal{D} \rangle$.*

12.33 Definition. Es seien $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ und $(\mathcal{E}', \mathcal{M}', \Phi')$ abstrakte Funktionalkalküle über demselben Banachraum X. Ein Monoidhomomorphismus $\theta\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, dessen Einschränkung $\theta\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ ein Algebrenhomomorphismus ist, ist ein *Morphismus* der abstrakten Funktionalkalküle, wenn $\Phi' \circ \theta = \Phi$.

12.34 Satz. *Es sei $\theta\colon (\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi) \to (\mathcal{E}', \mathcal{M}', \Phi')$ ein Morphismus abstrakter Funktionalkalküle und es seien Ψ bzw. Ψ' die jeweiligen Erweiterungen. Denn gelten $\theta(\mathcal{M}_{\mathrm{r}}) \subseteq (\mathcal{M}')_{\mathrm{r}}$ und $\Psi' \circ \theta = \Psi$.*

13 Meromorphe Funktionalkalküle

Bezeichnung. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}(\Omega)$ bzw. $\mathcal{M}(\Omega)$ die Algebren der holomorphen bzw. der meromorphen Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

13.1 Definition. Es sei X ein Banachraum, es sei A ein Operator in X, es sei $\mathcal{E}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ eine Unteralgebra und es sei $\Phi\colon \mathcal{E}(\Omega) \to L(X)$ ein Algebrenhomomorphismus. Der abstrakte Funktionalkalkül $(\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{M}(\Omega), \Phi)$ ist ein *meromorpher Funktionalkalkül* für A, wenn

(a) $\mathrm{id}_\Omega \in \mathcal{M}(\Omega)_r$ und $\Psi(\mathrm{id}_\Omega) = A$.

(b) Wenn $T \in L(X)$ mit A kommutiert, dann auch mit allen $\Phi(e)$, $e \in \mathcal{E}(\Omega)$.

13.2 Bezeichnung. In diesem Fall bezeichnet man die Menge der regularisierbaren Elemente mit $\mathcal{M}(\Omega)_A$ anstelle von $\mathcal{M}(\Omega)_r$ und schreibt $f(A)$ anstelle von $\Psi(f)$, falls $f \in \mathcal{M}(\Omega)_A$.

Außerdem setzt man

$$H(A) = \{f \in \mathcal{M}(\Omega)_A \mid f(A) \in L(X)\}.$$

13.3 Satz. *Wenn $T \in L(X)$ mit A kommutiert, dann auch mit allen $f(A)$, $f \in \mathcal{M}(\Omega)_A$.*

Wenn $f \in H(A)$, dann vertauscht A mit $f(A)$.

Man beachte, dass "vertauschen" im Sinne von 12.9 gemeint ist.

13.4 Satz. *Die Abbildung $f \mapsto f(A)$ ist ein Algebrenhomomorphismus $H(A) \to L(X)$.*

13.5 Satz. *Sei $f \in\mapsto M(\Omega)_A$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\frac{1}{\lambda - f(z)} \in \mathcal{M}(\Omega)_A \Leftrightarrow \lambda\, \mathrm{id}_X - f(A) \textit{ injektiv.}$$

In diesem Fall gilt $(\lambda\, \mathrm{id}_x - f(A))^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda - f(z)}\right)(A)$.

Insbesondere $\lambda \in \rho(f(A))$ genau dann, wenn $\frac{1}{\lambda - f(z)} \in H(A)$.

13.6 Satz (Abstrakte Kettenregel). *Es seien $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{C}$ offen, sei A ein Operator in X, so dass $(\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{M}(\Omega), \Phi)$ ein meromorpher Funktionalkalkül für A ist (A ist* *dann automatisch abgeschlossen). Sei ferner* $g\colon \Omega \to \Omega'$ *holomorph mit* $g \in \mathcal{M}(\Omega)_A$ *und sei* $(\mathcal{E}(\Omega'), \mathcal{M}(\Omega'), \Phi')$ *ein meromorpher Funktionalkalkül für* $g(A)$*. Falls für alle* $f \in \mathcal{E}(\Omega')$ *gilt*

$$f \circ g \in \mathcal{M}(\Omega)_A \quad \textit{und} \quad (f \circ g)(A) = f(g(A)),$$

dann gilt diese Aussage auch für alle $f \in \mathcal{M}(\Omega')_{g(A)}$.

14 Die Resolventengleichung für unbeschränkte Operatoren

Nach Anhang A des Buchs von Haase

14.1 Lemma. *Sei* B *ein injektiver Operator in einem Banachraum* X *und sei* $\nu \in \mathbb{C}$ *so, dass auch* $\mathrm{id}_X + \nu B^{-1}$ *injektiv ist. Dann*

$$\mathrm{id}_X - \left(\mathrm{id}_X + \nu B^{-1}\right)^{-1} = \nu(\nu \, \mathrm{id}_X + B)^{-1}.$$

14.2 Lemma. *Sei* A *ein Operator in einem Banachraum* X *und seien* $\lambda, \mu \in \rho(A)$*. Dann*

$$\mathrm{id}_X - \left(\mathrm{id}_X + (\lambda - \mu)R(\mu, A)\right)^{-1} = (\lambda - \mu)R(\lambda, A).$$

14.3 Satz (Resolventengleichung). *Sei* A *ein abgeschlossener Operator in einem Banachraum* X*. Für* $\mu \in \rho(A)$ *gelten* $\operatorname{dist}(\mu, \sigma(A)) \geq \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}$ *und für* λ *mit* $|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}$ *gilt*

$$R(\lambda, A) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R(\mu, A)^{k+1}.$$

Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ *gilt die Resolventengleichung*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A).$$

15 Sektorielle Operatoren

15.1 Bezeichnung. Für $0 \leq \omega \leq \pi$ definieren wir den Sektor S_ω durch

$$S_\omega = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0,\ |\arg z| < \omega\}, & \omega > 0, \\ ]0, \infty[, & \omega = 0. \end{cases}$$

15.2 Definition. Sei $0 \leq \omega < \pi$ und sei X ein Banachraum. Ein Operator A (beschränkt oder unbeschränkt) heißt *sektoriell* vom Winkel ω, wenn

(a) $\sigma(A) \subseteq \overline{S}_\omega$ und

(b) $M(A, \omega') := \sup\left\{\|\lambda R(\lambda, A)\| \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}_{\omega'}\right\} < \infty$ für alle $\omega' \in]\omega, \pi[$.

Die Menge aller sektoriellen Operatoren vom Winkel ω bezeichnen wir mit $\mathrm{Sect}(\omega)$.

Ein Operator heißt *quasi-sektoriell,* wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass $C\,\mathrm{id}_X + A$ sektoriell ist.

Für einen sektoriellen Operator A bezeichnen wir

$$\omega_A = \inf\{0 \leq \omega < \pi \mid A \in \mathrm{Sect}(\omega)\}$$

als *Spektralwinkel* von A.

Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ heißt *gleichmäßig sektoriell* vom Winkel ω, wenn $A_i \in \mathrm{Sect}(\omega)$ für jedes i und für jedes $\omega' \in]\omega, \pi[$ gilt, dass $\sup_{i \in I} M(A_i, \omega') < \infty$.

15.3 Beispiel. Der Operator $N \in L(\mathbb{C}^2)$ sei gegeben durch die nilpotente Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Auf Blatt 9 wird für $t \in]0, \infty[$ gezeigt, dass

$$R(t, N) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Daher ist die Forderung (b) aus der Definition der sektoriellen Operatoren verletzt.

15.4 Bezeichnung. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und es sei

$$\mathcal{N} = \{f\colon X \to \mathbb{C}\ \mu\text{-messbar} \mid f = 0\ \mu\text{-fast überall}\}.$$

(a) Wir setzen

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f\colon X \to \mathbb{C}\ \mu\text{-messbar} \mid \|f\|_\infty < \infty\}$$

wobei

$$\|f\|_\infty = \inf\left\{ \sup_{x\in X\setminus N} |f(x)| \;\middle|\; N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0 \right\}.$$

Schließlich setzen wir

$$L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu) \,/\, \mathcal{N}.$$

(b) Für $1 \leq p \leq \infty$ und $a \in L^\infty(\mu)$ definieren wir wie folgt einen *Multiplikationsoperator*

$$M_a \colon L^p(\mu) \to L^p(\mu), \quad f \mapsto af.$$

(c) Für $a \in L^\infty(\mu)$ definieren wir den *wesentlichen Wertebereich* durch

$$\operatorname{essrange}(a) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \forall \epsilon > 0 : \mu\big(a^{-1}(B_\epsilon(\lambda))\big) > 0\right\}.$$

15.5 Bemerkung. (a) Der *Träger* eines Borelmaßes ν ist das Komplement von

$$\bigcup_{\substack{G \text{ offen} \\ \nu(G)=0}} G.$$

Der Träger ist also der Träger der Distribution $\varphi \mapsto \int \varphi \, d\mu$.

(b) Sei $a \in L^\infty(\mu)$. Durch $A \mapsto \mu\big(a^{-1}(A)\big)$ wird ein Borelmaß auf $\mathbb{C}$ gegeben. Sein Träger ist gleich $\operatorname{essrange}(a)$.

15.6 Lemma. *(a)* $M_a \in L(L^p(\mu))$ *für* $1 \leq p \leq \infty$.

(b) $\operatorname{essrange}(a)$ *ist abgeschlossen.*

(c) $\sigma(M_a) = \operatorname{essrange}(a)$.

Aussage (b) folgt aus der Bemerkung, alles andere wird auf Blatt 11 gezeigt.

15.7 Theorem. *Für* $\lambda \in \rho(M_a)$ *gilt*

$$\|R(\lambda, M_a)\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \operatorname{essrange}(a))}.$$

Das ist ebenfalls auf Blatt 11.

15.8 Satz. *Für* $a \in L^\infty(\mu)$ *ist* $M_a \in L(L^p(\mu))$ *genau dann sektoriell vom Winkel* ω*, wenn* $\operatorname{essrange}(a) \subset \overline{S}_\omega$.

15.9 Theorem. *Sei* H *ein separabler Hilbertraum und sei* $A \in L(H)$ *normal. Dann ist* A *genau dann sektoriell vom Winkel* ω*, wenn* $\sigma(A) \subset \overline{S}_\omega$.

Bemerkung. Der Satz gilt auch ohne die Voraussetzung der Separabilität. Wir benötigen sie nur, weil wir diese Voraussetzung auch bei Theorem 6.12 gemacht hatten.

15.10 Korollar. *Stetige positive Operatoren auf Hilberträumen sind sektoriell. Stetige selbstadjungierte Operatoren mit nach unten beschränktem Spektrum sind quasi-sektoriell.*

Die Definition des sektoriellen Operators stammt von Kato [4]. Sie heißen dort allerdings *Operatorn von der Klasse* (ω, M). Die folgende Definition stammt von Komatsu [6].

15.11 Definition. Ein Operator A ist *nicht-negativ,* wenn $]-\infty, 0[\subset \rho(A)$ und

$$\sup_{t>0} \left\| t(t+A)^{-1} \right\| < \infty.$$

15.12 Satz. *Es sei A ein abgeschlossener Operator in einem Banachraum X. Dann ist A genau dann sektoriell, wenn A nicht-negativ ist.*

Der Spektralwinkel beträgt höchstens $\pi - \arctan\left(\frac{1}{M(A)}\right)$, wobei

$$M(A) := \sup_{t>0} \| tR(-t, A) \|.$$

15.13 Lemma. *Für $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ gilt*

$$M(A, \varphi) = \inf_{\omega<\omega'<\varphi} M(A, \omega').$$

15.14 Satz. *Es sei $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ ein abgeschlossener, injektiver Operator in einem Banachraum X. Dann $A^{-1} \in \mathrm{Sect}(\omega)$ mit*

$$M(A^{-1}, \omega') \leq 1 + M(A, \omega'), \quad \omega < \omega' < \pi.$$

Ferner gilt für alle $\lambda \neq 0$ die Fundamentalgleichung

$$\lambda(\lambda \,\mathrm{id}_X + A^{-1})^{-1} = \mathrm{id}_X - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} + A \right)^{-1}.$$

15.15 Satz. *Sei $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ ein abgeschlossener Operator im Banachraum X, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $x \in X$.*

(a) Es sind gleichwertig

(i) $x \in \overline{D(A)}$,

(ii) $\lim_{t\to\infty} t^n (t+A)^{-n} x = x$,

(iii) $\lim_{t\to\infty} A^n (t+A)^{-n} x = 0$.

(b) Es sind gleichwertig

(i) $x \in \overline{\mathrm{Bild}(A)}$,

(ii) $\lim_{t\to 0} t^n (t+A)^{-n} x = 0$,

(iii) $\lim_{t\to 0} A^n(t+A)^{-n}x = x$.

15.16 Korollar. *Sei* A *ein abgeschlossener, sektorieller Operator im Banachraum* X. *Dann* $\ker(A) \cap \overline{\mathrm{Bild}(A)} = \{0\}$.

Speziell ist A *injektiv, wenn* A *dichtes Bild hat.*

Für alle folgenden Aussagen sei $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ ein abgeschlossener Operator im Banachraum X.

15.17 Satz. *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\ker(A^n) = \ker(A)$.

15.18 Lemma. *Die Familien* $(A+\delta)_{\delta\geq 0}$, $(rA)_{r\geq 0}$ *und* $((A+\delta)R(-\epsilon-\delta, A))_{\delta\geq 0,\epsilon>0}$ *sind gleichmäßig sektoriell vom Winkel* ω. *Für* $\omega < \omega' < \pi$ *gelten*

$$M(A+\delta, \omega') \leq c(\omega')M(A, \omega') \qquad \text{für } c(\omega') = \begin{cases} \frac{1}{\sin(\omega')}, & \omega' \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$M(rA, \omega') \leq M(A, \omega').$$

15.19 Lemma. *Seien* $\epsilon > 0$ *und* $n, m \in \mathbb{N}$. *Dann ist* x *genau dann in* $D(A^m)$, *wenn* $\big(A(A+\epsilon)^{-1}\big)^n x \in D(A^m)$.

Wir benötigen zwei weitere Ergebnisse aus der Einführung in die Funktionalanalysis:

15.20 Definition. Sei E ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* genau dann *schwach* gegen $x \in E$, wenn für jedes $T \in E'$ gilt $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$.

15.21 Definition. Ein Banachraum X ist *reflexiv,* wenn die folgende Abbildung surjektiv ist

$$J\colon X \to X'', \quad J(x)(y) = y(x).$$

Bemerkung. Alle ℓ^p und alle $L^p(\mu)$ mit $1 < p < \infty$, sowie alle Hilberträume sind reflexiv.

15.22 Theorem (Hilbert-Banach). *In einem reflexiven Raum* E *besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

15.23 Theorem (Mazur). *Es sei* E *ein normierter Raum, es sei* $C \subset E$ *eine konvexe, abgeschlossene Menge, und es sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* C. *Wenn* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *schwach gegen* x *konvergiert, so gilt* $x \in C$.

15.24 Satz. *Wenn* X *reflexiv ist, dann ist* A *dicht definiert und es gilt*

$$X = \ker(A) \oplus \overline{\mathrm{Bild}(A)}.$$

15.25 Lemma. *Falls* $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *mit* $|\arg(\lambda)| < \pi - \omega$, *so gilt* $\lambda A \in \mathrm{Sect}(\omega + \omega)$ *mit* $M(\lambda A, \omega') \leq M(A, \omega' - |\arg(\lambda)|)$.

15.26 Beispiel. Wir betrachten den Ableitungsoperator im $L^1(\mathbb{R})$ mit $D(A) = W^{1,1}(\mathbb{R})$ und $Af = f'$. Sei $g \in L^1(\mathbb{R})$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und definiere f durch

$$f(x) = \int_{]-\infty,0]} e^{\lambda t} g(x-t)\, d\lambda_1(t) = \int_{[x,\infty[} e^{\lambda(x-y)} g(y)\, d\lambda_1(y).$$

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f'\varphi\, d\lambda_1 &= -\int_{\mathbb{R}} \int_{[x,\infty[} e^{\lambda x} e^{-\lambda y} g(y) \varphi'(x)\, d\lambda_1(y)\, d\lambda_1(x) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} g(y) \int_{-\infty}^{y} e^{\lambda x} \varphi'(x)\, dx\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} g(y) \left(e^{\lambda y} \varphi(y) - \lambda \int_{-\infty}^{y} e^{\lambda x} \varphi(x)\, dx \right) d\lambda_1(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y)\, d\lambda_1(y) - \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_{[x,\infty[} e^{\lambda(x-y)} g(y)\, d\lambda_1(y) \varphi(x)\, d\lambda_1(x).
\end{aligned}$$

Für $\operatorname{Re}\lambda < 0$ wählt man

$$f(x) = -\int_{[0,\infty[} e^{\lambda t} g(x-t)\, d\lambda_1(t).$$

Setzen wir $Tg = -\int_{[0,\infty[} e^{\lambda t} g(x-t)\, d\lambda_1(t)$, dann haben wir gezeigt, dass $(\lambda - A)Tg = g$. Wir müssen noch zeigen, dass $T(\lambda - A)f = f$ für $f \in D(A)$. Sei dazu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

beliebig

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} T(\lambda - A)(f)\varphi \, d\lambda_1 &= -\int_{\mathbb{R}} \int_{[0,\infty[} e^{\lambda t}\big(\lambda f(x-t) - f'(x-t)\big) \, d\lambda_1(t)\varphi(x) \, d\lambda_1(x) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \int_{[0,\infty[} e^{\lambda t}\lambda f(x-t) \, d\lambda_1(t)\varphi(x) \, d\lambda_1(x) \\
&\quad + \int_{[0,\infty[} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f'(x-t) \, d\lambda_1(x) e^{\lambda t} \, d\lambda_1(t) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \int_{[0,\infty[} e^{\lambda t}\lambda f(x-t) \, d\lambda_1(t)\varphi(x) \, d\lambda_1(x) \\
&\quad + \int_{[0,\infty[} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y+t) f'(y) \, d\lambda_1(y) e^{\lambda t} \, d\lambda_1(t) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \int_{[0,\infty[} e^{\lambda t}\lambda f(x-t) \, d\lambda_1(t)\varphi(x) \, d\lambda_1(x) \\
&\quad - \int_{[0,\infty[} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(y+t) f(y) \, d\lambda_1(y) e^{\lambda t} \, d\lambda_1(t) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \int_{[0,\infty[} e^{\lambda t}\lambda f(x-t) \, d\lambda_1(t)\varphi(x) \, d\lambda_1(x) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \varphi'(y+t) e^{\lambda t} \, d\lambda_1(t) f(y) \, d\lambda_1(y) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \int_{[0,\infty[} e^{\lambda t}\lambda f(x-t) \, dt\varphi(x) \, d\lambda_1(x) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} \left(-\varphi(y) - \int_0^{\infty} \varphi(y+t)\lambda e^{\lambda t} \, dt\right) f(y) \, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(y) \, d\lambda_1(y).
\end{aligned}
$$

Schließlich

$$
\begin{aligned}
\|f\|_1 &\le \int_{\mathbb{R}} \int_{]-\infty,0]} e^{\operatorname{Re}\lambda t} |g(x-t)| \, dt \, dx \\
&= \int_{]-\infty,0]} \int_{\mathbb{R}} e^{\operatorname{Re}\lambda t} |g(y)| \, dy \, dt \\
&= -\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \|g\|_1.
\end{aligned}
$$

Das zeigt $f \in L^1(\mathbb{R})$ und auch $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ für jedes $\omega > \frac{\pi}{2}$, denn dann kann $|\lambda|$ in $\mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}$ durch $-\operatorname{Re}\lambda$ abgeschätzt werden.

16 Dunford-Riesz Klassen

16.1 Definition. Es sei $0 < \varphi \le \pi$. Eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(S_\varphi)$ besitzt den *polynomiellen Grenzwert* $g \in \mathbb{C}$, wenn es $\alpha, C > 0$ gibt, so dass $|f(z)-g| \le C|z|^\alpha$ für alle hinreichend kleinen $z \in S_\varphi$. Sie besitzt den polynomiellen Grenzwert ∞, wenn $\frac{1}{f}$ den polynomiellen Grenzwert 0 besitzt. Sie besitzt den polynomiellen Grenzwert d in ∞, wenn $f\left(\frac{1}{z}\right)$ den polynomiellen Grenzwert d in 0 besitzt.

f heißt *regulär fallend* in 0 bzw. in ∞, wenn f den polynomiellen Grenzwert 0 in 0 bzw. in ∞ besitzt.

16.2 Beispiel. $\sqrt{z}$ ist in jedem S_φ regulär fallend in 0. Wenn $\varphi < \frac{\pi}{2}$, dann ist e^{-z} in S_φ regulär fallend in ∞.

16.3 Bezeichnung. Für offenes $U \subseteq \mathbb{C}$ ist

$$H^\infty(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f \text{ beschränkt}\},$$

versehen mit der Supremumsnorm, eine Banachalgebra.

16.4 Definition. Sei $0 < \varphi \le \pi$. Man bezeichnet

$$H_0^\infty(S_\varphi) = \{f \in H^\infty(S_\varphi) \mid f \text{ fällt regulär in } 0 \text{ und } \infty\}$$

als *Dunford-Riesz Klasse* auf S_φ.

Bemerkung. (a) Die Dunford-Riesz Klassen sind Ideale in den jeweiligen Banachalgebren $H^\infty(S_\varphi)$.

(b) $\frac{z}{1+z^2} \in H_0^\infty(S_\varphi)$ für jedes $\varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Wegen des Satzes von Liouville enthält keine Dunford-Riesz Klasse eine von Null verschwindende ganze Funktion.

Man beachte, dass $\frac{1}{1+z} \notin H_0^\infty(S_\varphi)$, weswegen der noch zu konstruierende Funktionalkalkül noch nicht einmal Resolventen enthalten würd.

16.5 Definition. Die *erweiterte Dunford-Riesz Klasse* $\mathcal{E}(S_\varphi)$ ist die Lineare Hülle von $H_0^\infty(S_\varphi)$, $\frac{1}{1+z}$ und den konstanten Funktionen.

16.6 Lemma. *$\mathcal{E}(S_\varphi)$ ist eine Algebra.*

16.7 Lemma. *$f \in \mathcal{O}(S_\varphi)$ liegt genau dann in $\mathcal{E}(\varphi)$, wenn f beschränkt ist und endliche polynomielle Grenzwerte in 0 und ∞ besitzt.*

16.8 Lemma. *$H_0^\infty(S_\varphi)$ und $\mathcal{E}(S_\varphi)$ sind invariant unter der Abbildung $f \mapsto f\big(\frac{1}{z}\big)$.*

16.9 Beispiel. Seien $0 < \operatorname{Re}\beta < \operatorname{Re}\alpha$ und sei $0 < \varphi < \pi$. Dann

$$\frac{z^\beta}{(1+z)^\alpha} \in H_0^\infty(S_\varphi), \quad \frac{1}{(1+z)^\alpha} \in \mathcal{E}(S_\varphi) \quad \text{und} \quad \frac{z^\alpha}{(1+z)^\alpha} \in \mathcal{E}(S_\varphi).$$

Das folgt alles aus dem vorvorigen Lemma.

16.10 Lemma. *Sei $\psi \in H_0^\infty(S_\varphi)$. Setze*

$$h(z) = \int_0^1 \psi(sz)\frac{ds}{s} \quad \textit{und} \quad g(z) = \int_1^\infty \psi(sz)\frac{ds}{s}.$$

Dann $g, h \in \mathcal{E}(S_\varphi)$.

17 Der Primärkalkül des natürlichen Funktionalkalküls

Es sei $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ ein sektorieller Operator in einem Banachraum X. Er ist dann automatisch abgeschlossen, weil er eine Resolvente hat und diese Resolvente einen abgeschlossenen Graphen besitzt.

17.1 Bezeichnung. Mit Γ_φ wird der positive orientierte Rand von S_φ bezeichnet (also mit fallendem Imaginärteil).

Sei $\omega < \varphi < \pi$, sei $f \in H_0^\infty(S_\varphi)$ und sei $\omega < \omega' < \varphi$. Man sieht sofort, dass das Integral

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega'}} f(z) R(z, A) \, dz$$

existiert. Aus dem Cauchychen Integralsatz 10.8 folgt die Unabhängigkeit dieser Definition von der Wahl von ω'.

17.2 Satz. *Die Abbildung* $h \colon H_0^\infty(S_\varphi) \to L(X)$, $f \mapsto f(A)$, *ist ein Algebrenhomomorphismus.*

17.3 Lemma. *Wenn* B *ein abgeschlossener Operator in* X *ist, der mit allen Resolventen von* A *vertauscht, dann vertauscht* B *mit allen* $f(A)$.

17.4 Lemma. *Sei* $\lambda \notin \overline{S_\varphi}$. *Dann wird durch* $g_\lambda(z) := \frac{f(z)}{\lambda - z}$ *eine Funktion in* $H_0^\infty(S_\varphi)$ *erkärt und es gilt*

$$g_\lambda(A) = R(\lambda, A) f(A).$$

17.5 Definition. Für $g(z) = f(z) + \frac{c}{1+z} + d$ mit $f \in H_0^\infty(S_\varphi)$ definieren wir

$$g(A) = f(A) - cR(-1, A) + d.$$

17.6 Bezeichnung.

$$H_{(0)}^\infty(S_\varphi) = \left\{ f \in \mathcal{E}(S_\varphi) \;\middle|\; f \text{ holomorph in } 0 \text{ und } \lim_{z \to \infty} f(z) = 0 \right\}.$$

Mit "holomorph in 0" ist gemeint, dass es eine von f abhängige Umgebung U der Null gibt, so dass f Einschränkung einer holomorphen Funktion auf $U \cup S_\varphi$ ist.

17.7 Lemma. *Sei* $g \in H^\infty_{(0)}(S_\varphi)$, $\omega < \omega' < \varphi$, *und sei* U *wie in der Bezeichnung. Wir wählen* $\delta > 0$ *so, dass* $\overline{B}_\delta(0) \subset U$ *und setzen den Weg* $\Gamma = \Gamma_{\omega',\delta}$ *zusammen aus den Teilstücken von* $\Gamma_{\omega'}$ *außerhalb von* U *und dem positiv orientierten Randstück von* U, *welches sie verbindet. Dann gilt*

$$g(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z)R(z,\lambda)\,dz.$$

17.8 Theorem. *Sei* $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ *und sei* $\omega < \varphi < \pi$. *Die Abbildung*

$$\Phi_A \colon \mathcal{E}(S_\varphi) \to L(X), \quad g \mapsto g(A),$$

ist ein Algebrenhomomorphismus.

17.9 Definition. Die Abbildung Φ_A ist der *Primärkalkül* des sektoriellen Operators A in S_φ.

17.10 Lemma.

$$\frac{z}{1+z}(A) = -AR(-1,A)$$

17.11 Lemma. *Wenn* B *ein abgeschlossener Operator in* X *ist, der mit allen Resolventen von* A *vertauscht, dann vertauscht* B *mit allen* $f(A)$, $f \in \mathcal{E}(S_\varphi)$.

17.12 Lemma. *Wenn* $Ax = 0$ *und* $f \in \mathcal{E}(S_\varphi)$, *dann* $f(A)x = f(0)x$.

17.13 Bezeichnung. Sei $f \in \mathcal{O}(S_\varphi)$. Wir sagen, f sei holomorph in ∞, wenn es $C > 0$ gibt, so dass die Funktion $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ holomorph in $B_{1/C}(0)$ ist.

Das bedeutet, dass f eine Laurententwicklung in ∞ besitzt und diese Laurententwicklung nur aus dem Hauptteil und dem konstanten Teil besteht.

17.14 Theorem. *Es seien* $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$, $\omega < \varphi < \pi$, *und es sei* $f \in \mathcal{O}(S_\varphi)$ *holomorph in* 0 *und* ∞. *Dann* $f \in \mathcal{E}(S_\varphi)$ *und*

$$f(A) = f(\infty) + \int_\Gamma f(z)R(z,A)\,dz,$$

wobei für ein hinreichend großes R, *ein hinreichend kleines* $\delta > 0$ *und ein* ω' *mit* $\omega < \omega' < \varphi$ *der Weg* Γ *wie folgt gegeben ist:*

Seien $z_\pm$ *die Schnittpunkte von* $\partial S_{\omega'}$ *mit* $\partial B_R(0)$ *mit positivem bzw. negativem Imaginärteil und* $w_\pm$ *die entsprechenden Schnittpunkte mit* $\partial B_\delta(0)$. *Dann durchläuft* Γ *die Verbindungsstrecke von* z_+ *zu* w_+, *dann* $\partial B^\delta(0)$ *in mathematisch positiver Richtung nach* w_-, *dann die Verbindungsstrecke zu* z_- *und schließlich* $\partial B_R(0)$ *in negativer Richtung zu* z_+.

18 Der natürliche Funktionalkalkül

Es sei $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ ein sektorieller Operator in einem Banachraum X.

18.1 Lemma. *Der abstrakte Funktionalkalkül* $(\mathcal{E}(S_\varphi), \mathcal{M}(S_\varphi), \Phi_A)$ *ist ein eigentlicher, meromorpher Funktionalkalkül.*

Bezeichnung. Die Menge der regularisierbaren Elemente dieses Funktionalkalküls wird wieder mit $\mathcal{M}(S_\varphi)_A$ bezeichnet.

18.2 Lemma. *Zu jedem* $f \in \mathcal{M}(S_\varphi)_A$ *gibt es einen Regularisierer* e *mit* $e(\infty) = 0$. *Wenn* A *injektiv ist, gibt es sogar einen in* $H_0^\infty(S_\varphi)$.

18.3 Bemerkung. Sei $\omega < \varphi_1 < \varphi_2$. Dann $S_{\varphi_1} \subset S_{\varphi_2}$ und die Einschränkungsabbildung induziert einen Morphismus $(\mathcal{E}(S_{\varphi_2}), \mathcal{M}(S_{\varphi_2}), \Phi_A) \hookrightarrow (\mathcal{E}(S_{\varphi_1}), \mathcal{M}(S_{\varphi_1}), \Phi_A)$ der abstrakten Funktionalkalküle. Nach Satz 12.34 gilt für $f \in \mathcal{M}(S_{\varphi_2})_A$ dann

$$\left(f\big|_{S_{\varphi_1}}\right)(A) = f(A).$$

Wenn wir setzen

$$\mathcal{E}[S_\omega] = \bigcup_{\varphi > \omega} \mathcal{E}(S_\varphi) \quad \text{und} \quad \mathcal{M}[S_\omega] = \bigcup_{\varphi > \omega} \mathcal{M}(S_\varphi),$$

dann erhalten einen meromorphen Funktionalkalkül $(\mathcal{E}[S_\omega], \mathcal{M}[S_\omega], A)$, indem wir für $f \in \mathcal{M}[S_\omega]_A$ den Operator $f(A)$ im Funktionalkalkül $(\mathcal{E}(S_\varphi), \mathcal{M}(S_\varphi), \Phi_A)$ für ein beliebiges φ erklären, für welches $f \in \mathcal{M}(S_\varphi)_A$.

Wir setzen ferner

$$H(A) = \{f \in \mathcal{M}[S_\omega]_A \mid f(A) \in L(X)\}.$$

18.4 Definition. Der soeben erklärter Funktionalkalkül ist der *natürliche Funktionalkalkül.*

18.5 Beispiel. Sei $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ für ein $\omega < \frac{\pi}{2}$. Dann $e^{-z} \in \mathcal{E}(S_\varphi)$ für $\varphi < \frac{\pi}{2}$, es gibt also $e^{-A} = \Phi_A(e^{-z})$. Man kann zeigen, dass e^{-A} injektiv ist. Auf Blatt 13 machen wir das für den einfacheren Fall, dass A beschränkt ist. Dann ist e^{-z} ein Regularisierer für e^z. Es gibt in $\mathcal{M}[S_\omega]_A$ also Funktionen, die schneller als polynomiell wachsen.

Zwei allgemeine Sätze sind noch wichtig, können aber hier nicht mehr gezeigt werden.

18.6 Theorem (Verknüpfungsregel, Haase [2], Theorem 2.4.2). *Es seien* $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ *und* $g \in \mathcal{M}[S_\omega]_A$ *mit* $g(A) \in \mathrm{Sect}(\omega')$. *Ferner gebe es für jedes* φ' *mit* $\omega' < \varphi' < \pi$ *ein* φ *mit* $\omega < \varphi < \pi$, *so dass* $g \in \mathcal{M}(S_\varphi)$ *und* $g(S_\varphi) \subseteq \overline{S}_{\varphi'}$. *Dann*

(a) $g(S_\omega) \subseteq \overline{S}_{\omega'}$

(b) $(f \circ g)(A) = f(g(A))$ *für jedes* $f \in \mathcal{M}[S_{\omega'}]_{g(A)}$.

18.7 Bezeichnung. Für einen Operator A im Banachraum X bezeichnen wir die Menge

$$\widetilde{\sigma}(A) = \begin{cases} \sigma(A), & A \text{ beschränkt}, \\ \sigma(A) \cup \{\infty\}, & \text{sonst}, \end{cases}$$

als *erweitertes Spektrum* von A.

18.8 Theorem (Spektralabbildungssatz, [2], Theorem 2.7.8). *Seien* $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ *und* $f \in \mathcal{M}[S_\omega]_A$. *Ferner besitze* f *polynomielle Grenzwerte in* $\{0, \infty\} \cap \widetilde{\sigma}(A)$. *Dann*

$$f(\widetilde{\sigma}(A)) = \widetilde{\sigma}(f(A)).$$

19 Operatorhalbgruppen

Dieses Kapitel orientiert sich an Abschnitt VII.4 des Buchs [8] von Werner. Für die benötigten Aussagen über die Wärmeleitungsgleichung verweise ich auf Evans [1].

19.1 Definition. Sei X ein Banachraum. Eine C_0-Halbgruppe ist eine Familie $(T_t)_{t\geq 0}$ in $L(X)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $T_0 = \mathrm{id}_X$.

(b) $T_{t+s} = T_t T_s$ für alle $s, t \geq 0$.

(c) $\lim_{t\searrow 0} T_t x = x$ für alle $x \in X$.

19.2 Beispiel. (a) Sei $X = C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\}$. Für $t \geq 0$ sei $T_t \in L(X)$ definiert durch $T_t f(x) = f(x+t)$. Die Eigenschaften (a) und (b) sind klar, Eigenschaft (c) zeigen wir unten. Diese Halbgruppe bezeichnet man als die *Translationshalbgruppe*.

Wir überlegen uns zuerst, dass jedes $f \in C_0(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig ist. Daraus folgt dann auch sofort (c).

(b) Für $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ sei e^{At} definiert wie in der Analysis II oder durch den Dunford-Riesz Kalkül. Dann ist $(T_t)_{t\geq 0}$ eine Operatorhalbgruppe auf dem $\mathbb{C}^N$.

(c) In der Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen hatten wir die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung definiert durch

$$\Phi\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Für beschränktes $g \in C(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$T_t(g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(x)\, dy.$$

Dann ist $u(x,t) := T_t(g)(x)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \qquad && \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[, \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung der Anfangswertaufgabe folgt die Halbgruppeneigenschaft von $(T_t)_{t\geq 0}$.

(d) Eine konkrete Formel für die Lösung der Anfangswertaufgabe ist nicht nötig. Wenn $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $g \in C(\overline{U})$ mit $g\big|_{\partial U} \equiv 0$, dann exitiert eine eindeutig bestimmte Lösung u der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } U \times]0, \infty[, \\ u &= g && \text{in } U \times \{0\}, \\ u &= 0 && \text{in } \partial U \times [0, \infty[. \end{aligned}$$

Definieren wir $T_t(g)(x) = u(x,t)$, so ist $(T_t)_{t\geq 0}$ eine Operatorhalbgruppe. Der Grund ist wiederum die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems.

19.3 Lemma. *Sei* $(T_t)_{t\geq 0}$ *eine* C_0*-Halbgruppe auf einem Banachraum* X. *Dann existieren* $M \geq 1$ *und* $\omega \in \mathbb{R}$, *so dass* $\|T_t\| \leq Me^{\omega t}$ *für alle* $t \geq 0$.

Man kann außerdem zeigen

19.4 Lemma. *Ist* $(T_t)_{t\geq 0}$ *eine* C_0*-Halbgruppe, so ist die Abbildung*

$$[0, \infty[\times X \to X, \quad (t, x) \mapsto T_t x,$$

gleichmäßig stetig in t *auf den kompakten Teilmengen von* $[0, \infty[$.

19.5 Definition. Es sei $(T_t)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X. Ihr *Erzeuger* ist der (möglicherweise unbeschränkte) Operator A in X, welcher gegeben ist durch

$$Ax = \lim_{h \searrow 0} \frac{T_h x - x}{h}$$

und

$$D(A) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \lim_{h \searrow 0} \frac{T_h x - x}{h} \text{ existiert} \right\}.$$

19.6 Beispiel. (a) Im Beispiel $T_t = e^{At}$ für ein $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ ist A der Erzeuger.

(b) Für die Translationshalbgruppe auf $C_0(\mathbb{R})$ behaupten wir

$$D(A) = \left\{ f \in C_0(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}) \;\middle|\; f' \in C_0(\mathbb{R}) \right\}, \quad Af = f'. \tag{19.1}$$

(c) Für die Halbgruppe aus Beispiel 19.2 zeigen wir, dass der Laplace-Operator der Erzeuger ist. Allerdings machen wir das für den $L^2(\mathbb{R}^n)$. Wir bezeichnen mit $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ den Raum der Schwartzfunktionen auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben γ_t für $\Phi(\cdot, t)$. Dann $\gamma_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $T_t g = \gamma_t * g$. Wir zeigen

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\gamma_h * f - f}{h} = \Delta f, \quad f \in H^2(\mathbb{R}^d), \tag{19.2}$$

wobei die Konvergenz im $L^2(\mathbb{R}^n)$ gemeint ist. Die Fouriertransformation[1] $\mathcal{F}$ ist eine Isometrie des $L^2(\mathbb{R}^n)$ auf sich mit Inverser $(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}$. Daher ist die Zwischenbehauptung äquivalent zu

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{\sqrt{2\pi}^n \mathcal{F}\gamma_h \cdot \mathcal{F}f - \mathcal{F}f}{h} = \mathcal{F}(\Delta f), \quad f \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

Die Fouriertransformation der Gaußglocke γ_t ist bekannt, nämlich

$$\mathcal{F}\gamma_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-t\xi^2}.$$

Wir setzen $q(\xi) = -\xi^2$. Wegen $\mathcal{F}(\Delta f)(\xi) = -\xi^2 \mathcal{F}f(\xi)$ müssen wir also zeigen

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{e^{qh}g - g}{h} = qg, \quad g \in \mathcal{F}(H^2(\mathbb{R}^n)).$$

Um das zu zeigen, beachten wir, dass $qg \in L^2(\mathbb{R}^n)$, wenn $\mathcal{F}g \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen hilfsweise

$$a(z) = \frac{e^z - 1}{z} - 1 = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{j!}.$$

Dann $0 \le |a(z)| \le 1$ für $z \le 0$ und

$$\begin{aligned} \left\| \frac{e^{hq}g - g}{h} - qg \right\|_2^2 &= \|a \circ (hq) \cdot qg\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |a(-h\xi^2)|^2 |\xi^2 g(\xi)|^2 \, d\xi \\ &\to 0, \quad h \searrow 0, \end{aligned}$$

mit dem Lebesgueschen Grenzwertsatz.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass der Erzeuger der durch die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung gegebenen Halbgruppe eine Erweiterung des auf $H^2(\mathbb{R}^n)$ definierten Laplace-Operators ist.

19.7 Bemerkung. Man überlegt sich leicht, dass auch für vektorwertige Integrale gilt

$$\lim_{h\searrow 0} \int_t^{t+h} u(s)\, ds = u(t),$$

falls u stetig ist.

---

[1] Wir verwenden die Definition

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} \, d\lambda_n(x).$$

Dann lautet die Formel für die Faltung

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}^n \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g.$$

19.8 Lemma. *Es sei* A *der Erzeuger der* C_0*-Halbgruppe* $(T_t)_{t\geq 0}$ *und es sei* $t > 0$.

(a) $\int_0^t T_s x \, ds \in D(A)$ *für alle* $x \in X$ *und* $A\left(\int_0^t T_s x \, ds\right) = T_t x - x$.

(b) $T_t(D(A)) \subseteq D(A)$.

(c) $T_t A \subseteq A T_t$.

(d) $T_t x - x = \int_0^t T_s A x \, ds$ *für alle* $x \in D(A)$.

19.9 Satz. *Der Erzeuger einer* C_0*-Halbgruppe ist dicht definiert.*

19.10 Satz. *Der Erzeuger einer* C_0*-Halbgruppe ist ein abgeschlossener Operator.*

19.11 Satz. *Es sei* A *der Erzeuger der* C_0*-Halbgruppe* $(T_t)_{t\geq 0}$ *und es sei* $x_0 \in D(A)$. *Dann ist die Funktion* $u\colon [0, \infty[\to X$, $u(t) = T_t x_0$, *stetig differenzierbar mit Werten in* $D(A)$ *und eine Lösung des abstrakten Cauchyproblems*

$$u' = Au, \quad u(0) = x_0. \tag{19.3}$$

Ferner ist u *die einzige stetig differenzierbare,* $D(A)$*-wertige Lösung von* (19.3) *und* $u(t)$ *hängt stetig vom Anfangswert* x_0 *ab.*

19.12 Korollar. *Zwei* C_0*-Halbgruppen mit demselben Erzeuger stimmen überein.*

19.13 Beispiel. Für $g \in H^2(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$T_t g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(x) \, dy.$$

Dann ist $u(x,t) \coloneqq T_t g(x)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[, \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

19.14 Definition. Eine Operatorhalbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ heißt *normstetig,* wenn sie eine C_0-Halbgruppe ist und zusätzlich

$$\lim_{t \searrow 0} \|T_t - \mathrm{id}_X\| = 0.$$

19.15 Bemerkung. Wenn T_t normstetig ist, dann ist $t \mapsto T_t$ stetig in der Operatornorm und das Riemannintegral

$$M_t = \frac{1}{t} \int_0^t T_s \, ds$$

existiert in $L(X)$.

19.16 Satz. *Für eine C_0-Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ mit Erzeuger A sind äquivalent:*

(a) Die Halbgruppe ist normstetig.

(b) Der Erzeuger ist beschränkt.

(c) $D(A) = X$.

19.17 Definition. Eine C_0-Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ ist eine *Kontraktionshalbgruppe*, wenn $\|T_t\| \leq 1$ für alle t.

19.18 Satz. *Sei A der Erzeuger der Kontraktionshalbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$.*

(a) $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$.

(b) $(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x \, ds$ für alle λ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und alle x.

(c) $\|(\operatorname{Re}\lambda)(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1$ für alle λ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

19.19 Theorem (Satz von Hille-Yosida für Kontraktionshalbgruppen). *Ein Operator A ist genau dann Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe, wenn A dicht definiert und abgeschlossen ist, $]0, \infty \subset \rho(A)$ und*

$$\left\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq 1 \quad \forall \lambda > 0.$$

19.20 Theorem (Hille-Yosida). *Ein Operator A ist genau dann Erzeuger einer C_0-Halbgruppe, wenn er dicht definiert und abgeschlossen ist und Konstanten $\omega \in \mathbb{R}$ und $M \geq 1$ existieren, so dass $]\omega, \infty[\subset \rho(A)$ und*

$$\|(\lambda - \omega)^n (\lambda - A)^{-n}\| \leq M \quad \text{für alle } \lambda > \omega \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung. Der Satz 15.12 von Komatsu sagt, dass in diesem Fall der Operator $-A$ quasi-sektoriell ist.

Literatur

[1] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. Second. Bd. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, S. xxii+749. ISBN: 978-0-8218-4974-3. DOI: 10.1090/gsm/019. URL: http://dx.doi.org/10.1090/gsm/019.

[2] Markus Haase. *The functional calculus for sectorial operators*. Bd. 169. Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006, S. xiv+392. ISBN: 978-3-7643-7697-0; 3-7643-7697-X. DOI: 10.1007/3-7643-7698-8. URL: https://doi.org/10.1007/3-7643-7698-8.

[3] Winfried Kaballo. *Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie. Distributionen, lokalkonvexe Methoden, Spektraltheorie.* German. Berlin: Springer Spektrum, 2014, S. xi + 493. ISBN: 978-3-642-37793-8/pbk; 978-3-642-37794-5/ebook. DOI: 10.1007/978-3-642-37794-5.

[4] Tosio Kato. "Note on fractional powers of linear operators". In: *Proc. Japan Acad.* 36 (1960), S. 94–96. ISSN: 0021-4280. URL: http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195524082.

[5] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Second. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132. Berlin: Springer-Verlag, 1976, S. xxi+619.

[6] Hikosaburo Komatsu. "Fractional powers of operators". In: *Pacific J. Math.* 19 (1966), S. 285–346. ISSN: 0030-8730,1945-5844. URL: http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102993838.

[7] Reinhold Meise und Dietmar Vogt. *Einführung in die Funktionalanalysis.* German. 2nd revised ed. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011, S. x + 273. ISBN: 978-3-8348-1872-0/pbk.

[8] Dirk Werner. *Funktionalanalysis.* German. 7th revised and expanded ed. Berlin: Springer, 2011, S. xiii + 552. ISBN: 978-3-642-21016-7/pbk; 978-3-642-21017-4/ebook. DOI: 10.1007/978-3-642-21017-4.