Übungen zur Funktionalanalysis II

47. (5P) Für $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ sei $C_\varphi\colon A^2(\mathbb{D}) \to A^2(\mathbb{D})$ der Verknüpfungsoperator aus Aufgabe 46.

    Sei φ elliptisch. Zeigen Sie, dass C_φ nicht hyperzyklisch ist.

48. (7P) Sei C_φ wieder wie in Aufgabe 46 und sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ parabolisch oder hyperbolisch. Zeigen Sie, dass C_φ mischend ist.

    Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 45.

49. (10P) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $D\colon \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$ der Differentiationsoperator $Df = f'$. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

    (a) D ist chaotisch.

    (b) D ist hyperzyklisch.

    (c) Ω ist einfach zusammenhängend.

    Hinweis: Für einen geschlossenen Weg γ in Ω sei $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)'$ gegeben durch

    $$f \mapsto \int_\gamma f.$$

    Untersuchen Sie, unter welchen Voraussetzungen φ ein Eigenvektor von D' ist.

50. (8P) Es sei X ein Banachraum.

    (a) Sei $T\colon X \to X$ ein Operator, der mit einem Operator von endlichem Rang kommutiert. Zeigen Sie, dass T nicht hyperzyklisch ist.

    (b) Sei $F\colon X \to X$ ein Operator von endlichem Rang und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass $\lambda \,\mathrm{id}_X + F$ nicht hyperzyklisch ist.

51. (5P) Es sei X ein komplexer Banachraum. Ein Vektor $x \in X$ heißt *irregulär* für einen Operator $T\colon X \to X$, wenn $\liminf_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ und $\limsup_{n\to\infty} \|T^n x\| = \infty$. Offensichtlich sind hyperzyklische Vektoren irregulär.

    Es seien $S\colon X \to X$ und $T\colon Y \to Y$ Operatoren, so dass $S \oplus T$ einen irregulären Vektor besitzt. Zeigen Sie, dass mindestens einer der beiden Operatoren einen irregulären Vektor besitzt.

52. (5P) Es sei X ein komplexer Banachraum. Zeigen Sie:

    Wenn T einen irregulären Vektor besitzt, dann trifft $\sigma(T)$ den Einheitskreis (Prăjitură 2009).

Besprechung: Mo, 17.06.2024