Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 14.06.2024
Blatt 11

Übungen zur Funktionalanalysis II

53. (7P)

   (a) Sei $T\colon X \to X$ ein Operator und sei $x \in X$ derart, dass $\operatorname{orb}(x, T)$ irgendwo dicht ist. Zeigen Sie, dass T' keine Eigenwerte besitzt.

   (b) Zeigen Sie nun Satz 13.5 der Vorlesung.

54. (6P) Sei H ein Hilbertraum. Ein Operator $T\colon H \to H$ heißt *quasinormal,* wenn $T(T^*T) = (T^*T)T$. Offenbar sind normale Operatoren quasinormal. Zeigen Sie, dass quasinormale Operatoren hyponormal und daher nicht hyperzyklisch sind.

   Hinweis: $H = \overline{\operatorname{Bild}(T)} \oplus (\operatorname{Bild} T)^\perp$.

55. (4P) Sei H ein Hilbertraum. Ein Operator $T\colon H \to H$ heißt *kohyponormal,* wenn T^* hyponormal ist. Geben Sie einen kohyponormalen Operator an, der hyperzyklisch ist.

56. (10P) Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

   (a) Eine Menge $M \subseteq X$ ist genau dann nirgends dicht, wenn es zu jeder nicht-leeren offenen Menge $G \subseteq X$ eine nicht-leere offene Menge $V \subseteq G$ mit $V \cap M = \emptyset$ gibt.

   (b) Die endliche Vereinigung nirgends dichter Mengen ist nirgends dicht.

57. (7P) Sei $T\colon X \to X$ ein (nicht notwendig lineares) dynamisches System. Eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen heißt *syndetisch,* wenn $\sup_{k\in\mathbb{N}}(n_{k+1} - n_k) < \infty$. Zeigen Sie:

   (a) T ist genau dann schwach mischend, wenn für jede syndetische Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge $(T^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ topologisch transitiv ist.

   (b) Zeigen Sie unter Verwendung von Teil (a) und ohne den Satz von Ansari, dass, wenn T schwach mischend ist, dann für jedes $p \in \mathbb{N}$ auch T^p schwach mischend ist.

   Hinweis: Es ist mehr oder weniger klar, dass man zum Beweis von (a) eine der Folgerungen aus dem Satz von Furstenberg benutzen muss.

58. (6P) Sei X ein Fréchetraum und sei $T\colon X \to X$ ein Isomorphismus, d. h. T und T^{-1} sind stetig. Es gebe ein $x \in X$, so dass

$$\{T^n x \mid \ n \in \mathbb{Z}\}$$

   dicht in X ist. Zeigen Sie:

   (a) x ist ein hyperzyklischer Vektor von T oder von T^{-1}.

   (b) T und T^{-1} sind hyperzyklisch.

   Hinweis: Satz von Bourdon und Feldman.

Besprechung: Mo, 24.06.2024