Übungen zur Funktionalanalysis II

59. (5P) Sei $T\colon X \to X$ ein Operator auf einem Fréchetraum X und sei $x \in X$ ein hyperzyklischer Vektor für T. Zeigen Sie die Existenz einer nicht-leeren, offenen Menge $W \subset X$ mit $W \cap TW = \emptyset$.

60. (5P) Sei $T\colon X \to X$ ein Operator auf einem Fréchetraum X und sei $x \in X$ ein hyperzyklischer Vektor für T. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ gibt, so dass $\sup_{k\in\mathbb{N}}(n_{k+1} - n_k) = 2$ und $\operatorname{orb}(x, (T^{n_k})_{k\in\mathbb{N}})$ irgendwo dicht, aber nicht dicht ist.

    Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 59.

61. (2P)) Sei $T\colon X \to X$ ein Operator auf einem Banachraum X. Es gebe eine abzählbare Menge $\{x_1, x_2, \dots\} \subset X$, so dass

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{\operatorname{orb}(x_j, T)} = X.$$

    Zeigen Sie, dass mindestens einer der Vektoren x_j hyperzyklisch ist.

62. (8P) Geben Sie einen normierten Raum X, einen Operator $T\colon X \to X$ und eine abzählbare Menge $\{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ an, so dass

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{\operatorname{orb}(x_j, T)} = X,$$

    aber kein x_j hyperzyklisch ist.

63. (2P) Für $d \in \mathbb{N}$ sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Zeigen Sie, dass es eine abzählbare Menge $\{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in K gibt, die in K dicht ist.

64. (2P) Für $d \in \mathbb{N}$ sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Es sei $\{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare, dichte Menge in K. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $d_n(w) = \|w - x_n\|$. Es sei A die kleinste komplexe Unteralgebra von $C(X) = C(X, \mathbb{C})$, welche die konstante Funktion 1 und alle d_n enthält. Verwenden Sie den Satz von Stone-Weierstraß, um zu zeigen, dass A dicht in $C(K)$ ist.

65. (6P) Sei

$$C_0(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in C([0,\infty[, \mathbb{C}) \;\middle|\; \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \right\},$$

    versehen mit der Supremumsnorm. Zeigen Sie, dass $C_0(\mathbb{R}^+)$ separabel ist.

66. (10P) Auf $C_0(\mathbb{R}^+)$ operiert die Halbgruppe $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^+$ durch

$$\Psi(n,t)(f)(x) = 2^{n-t} f(x+t).$$

    Zeigen Sie, dass Ψ hyperzyklisch ist.

    Hinweis: Sie benötigen das Ergebnis von Aufgabe 65.

Besprechung: Mo, 01.07.2024