

## Übungen zur Funktionalanalysis II

67. (4P) Es sei  $\Psi$  wie in Aufgabe 66. Zeigen Sie, dass der Operator  $\Psi(1, 1)$  nicht hyperzyklisch ist. Wie passt das mit Theorem 14.7 zusammen?
68. (9P) Es sei  $(T_t)_{t \geq 0}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe auf einem unendlich-dimensionalen, separablen Banachraum  $X$ . Zeigen Sie, dass die Halbgruppe genau dann hyperzyklisch ist, wenn sie topologisch transitiv ist.
- Hinweis:* An einer Stelle benötigen Sie Satz 15.4 oder zumindest die Idee aus dem Beweis.
69. (10P) Sei  $X$  ein komplexer Fréchetraum und seien  $T_1, T_2: X \rightarrow X$  Operatoren derart, dass  $T_1 \oplus T_2$  hyperzyklisch ist. Ferner sei  $\lambda \in S^1$ . Zeigen Sie

$$\text{HC}(T_1 \oplus T_2) = \text{HC}(T_1 \oplus \lambda T_2).$$

70. (8P) Sei  $X$  ein komplexer Fréchetraum, sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $T_j: X \rightarrow X$ ,  $j = 1, \dots, n$ , Operatoren auf  $X$  derart, dass  $T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$  hyperzyklisch ist. Ferner seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in S^1$ . Zeigen Sie

$$\text{HC}(T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n) = \text{HC}(\lambda_1 T_1 \oplus \lambda_2 T_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n T_n).$$

71. (9P) Es sei  $v$  ein zulässiges Gewicht und es sei  $(T_t)_{t \geq 0}$  die Translationshalbgruppe auf  $L_v^p(\mathbb{R}^+)$ . Die Translationshalbgruppe sei chaotisch. Zeigen Sie, dass es zu jedem  $t > 0$  ein  $s > 0$  gibt, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(t + ns) < \infty.$$

**Besprechung:** Mo, 08.07.2024