Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 12.04.2024
Blatt 2

Übungen zur Funktionalanalysis II

1. (5P) Es sei $T\colon [0,1] \to [0,1]$ die Zeltabbildung. Geben Sie konkret einen von 0 verschiedenen Fixpunkt von T an. Wie viele Fixpunkte besitzt T?

2. (5P) Es sei $T\colon [0,1] \to [0,1]$ die Zeltabbildung. Geben Sie konkret einen periodischen Punkt mit Periode 2 an.

3. (10P) Sei $T\colon X \to X$ ein topologisch transitives dynamisches System. Zeigen Sie: Wenn X einen isolierten Punkt hat, dann ist X endlich.

   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3 von Blatt 1.

4. (10P) Ein dynamisches System $T\colon X \to X$ heißt *irreduzibel,* wenn es keine zwei disjunkten Mengen $A, B \subset X$ mit $A \cup B = X$ gibt, die beide einen inneren Punkt haben und T-invariant sind.

   Zeigen Sie

   (a) Jedes topologisch transitive dynamische System ist irreduzibel.

   (b) Die Umkehrung gilt nicht.
   Hinweis: Es gibt endliche Gegenbeispiele, die Topologie spielt also keine Rolle.

5. (4P) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sei $T\colon S^1 \to S^1$ die durch $Tz = e(\alpha)z$ gegebene irrationale Drehung. Zeigen Sie:

   (a) Jede Bahn hat unendlich viele Elemente.

   (b) Zu jedem $z \in S^1$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es $n \neq m \in \mathbb{N}$, so dass $T^n z = e(\beta)T^m z$ für ein β mit $|\beta| < \epsilon$.
   Hinweis: Verwenden Sie das Dirichletsche Schubladenprinzip: Wenn ich $n+1$ Krawatten in n Schubladen packe, dann liegen in mindestens einer Schublade mindestens zwei Krawatten.

6. (6P) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sei $T\colon S^1 \to S^1$ die durch $Tz = e(\alpha)z$ gegebene irrationale Drehung. Zeigen Sie, dass alle Bahnen dicht sind.

   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 5. Versehen Sie S^1 mit der Metrik $d(e(\alpha), e(\beta)) = \min_{k\in\mathbb{Z}}|\alpha - \beta + k|$.

Besprechung: Mo, 22.04.2024