Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 19.04.2024
Blatt 3

Übungen zur Funktionalanalysis II

1. (5P) Es sei $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ mit der Metrik
$$d(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x_j - y_j|}{2^j}.$$
Zeigen Sie, dass $U \subseteq \Sigma_2$ genau dann eine Umgebung von x ist, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass
$$\{y \in \Sigma_2 \mid \ y_j = x_j \text{ für } j = 0, \dots, k\} \subseteq U.$$

2. (4P) Zeigen Sie, dass der Linksshift $\sigma\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$ mischend ist.

   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1.

3. (8P) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und sei $X = \{1, \dots, n\}$ versehen mit der diskreten Metrik. Bestimmen Sie alle chaotischen dynamischen Systeme $T\colon X \to X$.

4. (10P) Betrachten Sie das auf $X = [-1,1]$ durch
$$Tx = \begin{cases} 2+2x, & -1 \leq x < -\frac{1}{2}, \\ -2x, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ -2+2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$
gegebene dynamische System. Zeigen Sie, dass T eine dichte Bahn besitzt.

5. (3P) Es sei $T\colon [-1,1]$ wie in Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass T^2 keine dichte Bahn besitzt.

6. (6P) Es sei X ein metrischer Raum ohne isolierte Punkte und es sei $T\colon X \to X$ kontrahierend, d. h. $d(Tx,Ty) \leq d(x,y)$ für alle $x, y \in X$. Mindestens eine Bahn von T sei dicht. Zeigen Sie, dass alle Bahnen von T dicht sind.

7. (4P) Es sei X ein vollständiger, separabler, metrischer Raum ohne isolierte Punkte und es sei $T\colon X \to X$ kontrahierend. Zeigen Sie, dass T nicht chaotisch ist.

   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 6.

Besprechung: Mo, 29.04.2024