Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 26.04.2024
Blatt 4

Übungen zur Funktionalanalysis II

1. (6P) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $(E_n, \|\cdot\|_n)$ ein Banachraum. Der Raum $F = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ werde mit dem folgenden Halbnormensystem versehen:
$$p_k\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \max_{1\leq n\leq k} \|x_n\|_n.$$
Zeigen Sie, dass F ein Fréchetraum ist. Das ist in dieser Aufgabe klassisch, also ohne Separabilitätsbedingungen, zu verstehen.

2. (5P) Die E_n in Aufgabe 1 seien separabel. Zeigen Sie, dass dann auch $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ separabel ist.

3. (5P) Sei F wie in Aufgabe 1 und es sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in F, wobei $x_j = (x_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, wenn für alle n
$$\lim_{j\to\infty} x_n^{(j)} = y_n.$$

4. (8P) Für welche $\lambda \in \mathbb{K}$ ist der auf $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{K}$ definierte Operator
$$T\colon \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad (x_1, x_2, \dots) \mapsto (\lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$$
hyperzyklisch und für welche λ ist er mischend?

5. (8P) Zeigen Sie, dass der Operator
$$T\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad f \mapsto f',$$
hyperzyklisch ist.

   Hinweis: Konstruieren Sie eine Quasikonjugation $\Phi\colon \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R})$.

6. (3P) Es sei X ein Banachraum und es sei $T\colon X \to X$ ein Operator. Zeigen Sie, dass es ein $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ gibt, für welches λT nicht hyperzyklisch ist.

7. (5P) Es sei T der Operator von MacLane
$$T\colon \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}), \quad f \mapsto f'.$$
Zeigen Sie dass λT für jedes $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ hyperzyklisch ist.

Besprechung: Mo, 06.05.2024