

## Übungen zur Funktionalanalysis II

1. (8P) Es sei  $X$  ein Fréchetraum und  $T: X \rightarrow X$  ein Operator. Das Bild von  $T - \lambda$  sei dicht. Zeigen Sie, dass  $\lambda$  kein Eigenwert von  $T'$  ist.
2. (4P) Es sei  $(X, d)$  ein Fréchetraum und  $T: X \rightarrow X$  ein Operator. Ferner sei  $Y$  ein dichter,  $T$ -invarianter Unterraum von  $X$ . Außer der Einschränkung von  $d$  trage  $Y$  noch eine weitere Metrik  $m$ , mit der  $Y$  zu einem Fréchetraum wird. Die Einbettung  $(Y, m) \hookrightarrow (X, d)$  und die Einschränkung  $T|_Y: (Y, m) \rightarrow (Y, m)$  seien stetig. Zeigen Sie, dass  $T: X \rightarrow X$  quasikonjugiert zu  $T|_Y: (Y, m) \rightarrow (Y, m)$  ist.
3. (6P) Es sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend. Ferner seien die Polynome dicht in  $\mathcal{O}(\Omega)$ . Zeigen Sie, dass der Operator  $D: \mathcal{O}(\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ ,  $f \mapsto f'$ , chaotisch ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 2.

4. (8P) Ein Operator  $T: X \rightarrow X$  heißt 2-hyperzyklisch, wenn es  $x, y \in X$  gibt, so dass

$$\{T^n x + T^m y \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$$

dicht in  $X$  ist. Zeigen Sie, dass der Transponierte  $T'$  eines 2-hyperzyklischen Operators keine Eigenwerte besitzt.

5. (7P) Es sei  $X$  ein Banachraum und es sei  $T: X \rightarrow X$  ein Operator. Zeigen Sie, dass  $T$  genau dann empfindliche Abhängigkeit von den Anfangswerten hat, wenn

$$\sup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = \infty.$$

6. (7P) Es sei  $X$  ein Banachraum und es sei  $T: X \rightarrow X$  ein Operator. Zeigen Sie, dass  $T$  genau dann empfindliche Abhängigkeit von den Anfangswerten besitzt, wenn  $T$  eine unbeschränkte Bahn besitzt.

*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 5 und eine Folgerung aus dem Baireschen Kategoriensatz.