Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 10.05.2024
Blatt 6

Übungen zur Funktionalanalysis II

1. (6P) Es seien $T_n\colon X \to X$ Operatoren.

   (a) Es gebe eine dichte Teilmenge $X_0 \subseteq X$, so dass für jedes $x \in X_0$ die Menge $\{T_n x \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X ist. Zeigen Sie, dass die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ topologisch transitiv ist.

   (b) Alle T_n sollen dichtes Bild haben und für alle Wahlen von $n, m \in \mathbb{N}$ gelte $T_n T_m = T_m T_n$. Ferner gebe es ein $x \in X$, so dass die Menge $\{T_n x \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X ist. Zeigen Sie, dass die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ topologisch transitiv ist.

2. (8P) Sei $H = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}\right\}$, und es sei $A \subseteq H$ eine Menge mit Häufungspunkt in H. Für $\alpha \in H$ sei $g_\alpha \in L^2[0,1]$ gegeben durch $g_\alpha(t) = t^\alpha$.

   (a) Zeigen Sie dass die Abbildung
   $$H \to L^2[0,1], \quad \alpha \mapsto t^\alpha,$$
   holomorph ist.

   (b) Es sei E die lineare Hülle von
   $$\{g_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset L^2[0,1].$$
   Zeigen Sie, dass für jedes $\beta \in H$ die Abbildung g_β im Abschluss von E liegt.
   Hinweis: Das ist ein Dualitätsargument ähnlich wie Lemma 6.4, aber für Hilberträume viel einfacher und daher schon in der Einführung erledigt.

   (c) Zeigen Sie, dass E dicht im $L^2[0,1]$ ist.

3. (8P) Der Operator C sei gegeben durch
   $$C\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1], \quad Cf(t) = \frac{1}{t}\int_{[0,t]} f \,\mathrm{d}\lambda_1.$$
   Zeigen Sie, dass C hyperzyklisch ist.

   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2 und das Kriterium von Godefroy und Shapiro. Die Stetigkeit von C brauchen Sie nicht zu zeigen. Es handelt sich um ein Ergebnis von Hardy, zu finden als Theorem 327 in Hardy, Littlewood and Polya: *Inequalities.*

Besprechung: Mo, 27.05.2024