Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 15.05.2024
Blatt 7

Übungen zur Funktionalanalysis II

1. (5P) Es sei $S \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Menge. Jedem Punkt $w \in S$ sei ein $h_w \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $h_w(0) = 0$ zugeordnet.

   Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $X_n = \mathcal{O}(B_n(0))$ und $T_n \colon X_{n+1} \to X_n$ durch
   $$T_n f(z) = f(z) + \sum_{\substack{w \in S \\ n \leq |w| < n+1}} h_w\left(\frac{1}{z-w}\right), \quad z \in B_n(0).$$
   Zeigen Sie, dass $\operatorname{Bild} T_n$ dicht in X_n ist.

   Hinweis: Aus der Funktionentheorie ist bekannt: Für $f \in \mathcal{O}(B_r(w))$ konvergiert die Taylorreihe von f gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von $B_r(w)$, also in der Topologie von $\mathcal{O}(B_r(w))$.

2. (8P) Beweisen Sie Theorem 7.17, also den klassischen Satz von Mittag-Leffler, indem Sie Aufgabe 1 und den abstrakten Satz von Mittag-Leffler verwenden.

3. (5P) Der Operator C sei gegeben durch
   $$C \colon L^2[0,1] \to L^2[0,1], \quad Cf(t) = \frac{1}{t}\int_{[0,t]} f \, \mathrm{d}\lambda_1.$$
   Zeigen Sie, dass C chaotisch ist.

   Hinweis: Verwenden Sie Satz 5.12.

Besprechung: Mo, 27.05.2024