Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 24.05.2024
Blatt 8

Übungen zur Funktionalanalysis II

36. (7P) Sei $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Ein Punkt $w \in \mathbb{C}$ ist genau dann eine Lösung der Fixpunktgleichung $M.z = z$, wenn $p(w) = 0$, wobei
$$p(z) = cz^2 + (d-a)z - b.$$
   (a) Sei $p \equiv 0$. Zeigen Sie, dass $M = \pm\,\mathrm{id}$.
   (b) Sei p konstant, aber nicht das Nullpolynom. Zeigen Sie die Existenz eines $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $M.z = z + r$ für alle z. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\mathrm{Spur}(M) = \pm 2$.

37. (7P) Seien M und p wie in Aufgabe 1, aber p habe nun den Grad 1. Zeigen Sie, dass die einzige Nullstelle von p reell ist, dass $|\mathrm{Spur}(M)| > 2$ und dass $\lim_{z\to\infty} M.z = \infty$, wobei ∞ den unendlich fernen Punkt der Riemannschen Zahlensphäre meint. (Mit anderen Worten: Es gibt im Komplexen nur ein ∞.)

38. (10P) Seien M und p wie in Aufgabe 1, aber p habe nun den Grad 2.
   (a) Zeigen Sie, dass $\lim_{z\to\infty} M.z \in \mathbb{R}$.
   (b) p habe zwei verschiedene reelle Nullstellen. Zeigen Sie, dass dann $|\mathrm{Spur}(M)| > 2$.
   (c) p habe zwei verschiedene Nullstellen, von denen aber mindestens eine nicht reell ist. Zeigen Sie, dass dann eine in $\mathbb{H}$ und eine in $-\mathbb{H}$ liegt und dass $|\mathrm{Spur}(M)| < 2$.
   (d) p habe nur eine Nullstelle (diese dann natürlich doppelt). Zeigen Sie, dass diese Nullstelle reell ist und dass $\mathrm{Spur}(M) = \pm 2$.

39. (10P) Sei $T\colon X \to X$ ein Operator. Zeigen Sie, dass T genau dann mischend ist, wenn T hereditär hyperzyklisch in Bezug auf die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

    Hinweis: Theorem 7.11

40. (4P) Ein Operator $T\colon X \to X$ erfüllt das “blow up/collapse”-Kriterium, wenn es dichte Teilmengen X_0 und Y_0 von X und eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ gibt, so dass $\lim_{k\to\infty} T^{n_k}x = 0$ für alle $x \in X_0$ und so dass es zu jedem $y \in Y_0$ eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X gibt mit $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ und $\lim_{k\to\infty} T^{n_k}u_k = y$.

    Zeigen Sie, dass T genau dann das Hyperzyklizitäts-Kriterium erfüllt, wenn T das blow up/collapse Kriterium erfüllt.

41. (2P) Zeigen Sie $\mathcal{O}(\mathbb{D}) \neq H^2(\mathbb{D})$.

Besprechung: Mo, 03.06.2024