Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 31.05.2024
Blatt 9

Übungen zur Funktionalanalysis II

42. (6P) Sei $X = \ell^p$ für $1 \le p < \infty$, sei $B\colon X \to X$ der Rückwärtsshift und seien $a, b \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

    (a) $a\,\mathrm{id}_X + bB$ ist chaotisch.

    (b) $|b| > |1 - |a||$.

43. (10P) Auf Blatt 5 der Einführung in die Funktionalanalysis hatten wir den Bergmanraum definiert durch
$$A^2(\mathbb{D}) = \left\{ f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ holomorph und } \int_{\mathbb{D}} |f|^2 \,d\lambda_2 < \infty \right\}.$$
Wir hatten gezeigt, dass er ein abgeschlossener Unterraum des $L^2(\mathbb{D})$ ist.

    Zeigen Sie, dass durch
$$k_\lambda(z) = \frac{1}{\pi(1 - \overline{\lambda} z)^2}$$
ein reproduzierender Kern gegeben wird, dass also
$$(f, k_\lambda) = f(\lambda) \text{ für alle } f \in A^2(\mathbb{D}),\ \lambda \in \mathbb{D}.$$
Hinweis: Schreiben Sie das Integral über $\mathbb{D}$ in Polarkoordinaten und schreiben Sie dann für jeden Radius r das Integral über den Winkel als Wegintegral einer holomorphen Funktion.

44. (10P) Zeigen Sie, dass die Polynome dicht in $A^2(\mathbb{D})$ sind.

45. (7P)

    (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $g_n(z) = z^n$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ in $A^2(\mathbb{D})$.

    (b) Sei $w \in S^1$. Verwenden Sie Teil (a) der Aufgabe, um zu zeigen, dass
$$X_0 = \left\{ f \in A^2(\mathbb{D}) \;\middle|\; f \text{ holomorph auf einer offenen Obermenge von } \overline{\mathbb{D}} \text{ und } f(w) = 0 \right\}$$
dicht in $A^2(\mathbb{D})$ liegt.

46. (7P) Sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ und sei $r = |\varphi(0)|$. Zeigen Sie, dass durch
$$C_\varphi\colon A^2(\mathbb{D}) \to A^2(\mathbb{D}), \quad f \mapsto f \circ \varphi,$$
ein Operator mit $\|C_\varphi\| \le \frac{1+r}{1-r}$ gegeben wird.

Besprechung: Mo, 10.06.2024