

Übungen zu Stochastische Differentialgleichungen

1. Sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und sei F_X ihre Verteilungsfunktion. Zeigen Sie
 - (a) $\lim_{u \rightarrow -\infty} F_X(u) = 0$.
 - (b) $\lim_{u \rightarrow \infty} F_X(u) = 1$.
 - (c) F_X ist monoton wachsend (d. h. $s < t \Rightarrow F_X(s) \leq F_X(t)$).
 - (d) F ist rechtsstetig, d. h. für jedes $t \geq 0$ gilt $\lim_{s \searrow t} F_X(s) = F_X(t)$.

2. (10P) Es sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und es sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ eine σ -Algebra mit höchstens vier Elementen. Die Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei \mathcal{A} -messbar. Zeigen Sie, dass X höchstens zwei Werte annimmt.

3. Für $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sei

$$P(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_M e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Dann ist $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Auf $\Omega = \mathbb{R}$ sei die Zufallsvariable $X(\omega) = \sin(\omega)$ gegeben. Die Zufallsvariable Y sei $\mathcal{U}(X)$ -messbar.

- (a) (7P) Zeigen Sie, dass Y 2π -periodisch ist.
- (b) (3P) Geben Sie eine 2π -periodische Zufallsvariable Z auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ an, die nicht $\mathcal{U}(X)$ -messbar ist.

Bemerkung: Auf die genaue Gestalt des Wahrscheinlichkeitsmaßes kommt es hierbei nicht an.

4. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda_1)$, wobei λ_1 das Lebesguemaß ist. Der Nullprozess ist der durch $X(t, \omega) = 0$ für alle t, ω gegebene Prozess. Wir definieren weiterhin

$$Y(t, \omega) = \begin{cases} 1, & \omega + t \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) (2P) Zeigen Sie, dass $(Y(t))_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess ist.
- (b) (2P) Zeigen Sie, dass $(Y(t))_{t \geq 0}$ eine Version des Nullprozesses ist.
- (c) (6P) Zeigen Sie, dass jeder Pfad von $(Y(t))_{t \geq 0}$ in jedem $t \geq 0$ unstetig ist.

Stetige Prozesse können also unstetige Versionen besitzen.

Die Prüfung zu Stochastische Differentialgleichungen erfolgt mündlich. Um zur Prüfung zugelassen zu werden, müssen mindestens 40% der möglichen Übungspunkte erreicht werden.

Studierende, die bereits einen erfolglosen Prüfungsversuch in Studierende Differentialgleichungen absolviert und die Prüfung noch nicht bestanden haben, sind ebenfalls zugelassen.

Wer bei mir die Zulassung erwirbt, aber im Wintersemester 2024/25 nicht an der Prüfung teilnimmt, muss die Zulassung neu erwerben, wenn er oder sie später einmal an einer Prüfung zu Stochastische Differentialgleichungen teilnehmen will. Es ist momentan nicht absehbar, wann diese Vorlesung das nächste Mal gelesen wird.

Abgabe: Fr, 18.10., 8:20 im ILIAS

Besprechung: Mo, 28.10.2024