Stochastische Differentialgleichungen

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2024/25

Inhaltsverzeichnis

1 Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Vorlesung orientiert sich an dem Buch [Eva13] von C. L. Evans. Ein detaillierterer einführender Text ist das Buch [Øks03] von B. Øksendal.

Bezeichnung. 0 ist keine natürliche Zahl. Für ein Ereignis A in einem Ereignisraum Ω bezeichne ich das Komplement mit $A^c = \Omega \setminus A$.

In diesem Abschnitt wird ein Abriss der für die Vorlesung wichtigen Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie gegeben. Die dafür benötigten Grundlagen der Maßtheorie übernehmen wir aus der Analysis III.

1.1 Definition. Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ mit $P(\Omega) = 1$. In diesem Fall bezeichnet man das Maß P als Wahrscheinlichkeitsmaß.

Die $\mathcal{U}$-messbaren Mengen bezeichnet man als *Ereignisse.* Anstelle der Formulierung “fast überall” benutzt man *“fast sicher”.*

1.2 Beispiel. Für einen topologischen Raum X bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(X)$ die σ-Algebra der Borelmengen. Sei $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und sei $f\colon \Omega \to [0, \infty[$ Lebesgue-messbar mit $\int f \, d\lambda_n = 1$. Dann wird durch

$$P(E) = \int_E f \, d\lambda_n$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω gegeben. Wenn P von dieser Form ist, dann bezeichnet man f als *Dichte* von P.

Wenn f die Dichte des Maßes P ist, dann gilt für alle Lebesgue-messbaren Funktionen g

$$\int g \, dP = \int fg \, d\lambda_n.$$

1.3 Definition. Der $\mathbb{R}^n$ wird immer mit der σ-Algebra der Borelmengen versehen.

Eine *Zufallsvariable* ist eine messbare Abbildung $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$.

1.4 Lemma. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvariable. Dann ist*

$$\mathcal{U}(X) = \left\{ X^{-1}(B) \;\middle|\; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

eine σ-Algebra. Es handelt sich um die kleinste σ-Algebra, bzgl. derer X messbar ist. Man bezeichnet sie als die von X erzeugte *σ-Algebra.*

1.5 Lemma. *Seien* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *und* $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ *zwei Zufallsvariablen. Wenn* Y *messbar bzgl. der* σ*-Algebra* $\mathcal{U}(X)$ *ist, dann existiert eine Abbildung* $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, so dass* $Y = \Phi \circ X$*.*

1.6 Definition. Ein *stochastischer Prozess* ist eine Familie $(X(t))_{t\geq 0}$ von Zufallsvariablen. Für festes $\omega \in \Omega$ ist $X(t,\omega)_{t\geq 0}$ ein *Pfad* des Prozesses.

Ein stochastischer Prozesses $(Y(t))_{t\geq 0}$ ist eine *Version* von $(X(t))_{t\geq 0}$, wenn für alle $t \geq 0$ die Gleichheit $X(t) = Y(t)$ fast sicher gilt.

1.7 Bezeichnung. (a) Für eine vektorwertige Zufallsvariable $X = (X^1, \dots, X^n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit integrierbaren Komponentenfunktionen definieren wir das Integral komponentenweise, also

$$\int X \, dP = \left(\int X^1 \, dP, \dots, \int X^n \, dP \right).$$

In [Eva13] wird der Index oben notiert, um die untere Position für partielle Ableitungen nutzen zu können.

(b) Eine Zufallsvariable X hat k-*te Momente,* wenn $|X|^j$ für $j = 0, \dots, k$ integrierbar ist. Mit $|\cdot|$ wird die euklidische Norm bezeichnet.

1.8 Definition. (a) Für eine integrierbare Zufallsvariable X bezeichnet

$$\mathbb{E}(X) = \int X \, dP$$

den *Erwartungswert.*

(b) Wenn die Zufallsvariable X zweite Momente hat, dann bezeichnet

$$\mathbb{V}(X) = \int |X - \mathbb{E}(X)|^2 \, dP$$

ihre *Varianz.*

Bemerkung. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(|X|^2) - |\mathbb{E}(X)|^2$.

1.9 Bezeichnung. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $x \leq y$, wenn $x_j \leq y_j$ für $j = 1, \dots, n$.

1.10 Definition. Es sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvariable.

(a) Ihre *Verteilung* ist das durch

$$M \mapsto P(X \in M)$$

gegebene Wahrscheinlichkeitsmaß.

(b) Ihre *Verteilungsfunktion* ist gegeben durch

$$F_X\colon \mathbb{R}^n \to [0,1], \quad F_X(x) = P(X \leq x).$$

Wenn n Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ gegeben sind, dann kombiniert man sie zu einer $\mathbb{R}^n$-wertigen Zufallsvariablen X und setzt $F_{X_1,\dots,X_n} = F_X$.

(c) Wenn es eine messbare Funktion f gibt, so dass für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$P(X \in A) = \int_A f \, d\lambda_n,$$

dann bezeichnet man f als *Verteilungsdichte* von X.

1.11 Beispiel. (a) Wenn $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

besitzt, dann sagt man, X sei $N(m, \sigma^2)$ verteilt.

(b) Wenn $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und symmetrisch ist und $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)C^{-1}(x-m)}$$

besitzt, dann sagt man, X sei $N(m, C)$ verteilt.

Der Satz von Radon-Nikodym (s. [MV11], Theorem 13.12) gibt Auskunft über die Existenz von Dichten.

1.12 Satz. *Die Zufallsvariable* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *besitze die Dichte* f. *Ferner sei* $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *eine messbare Funktion, für welche* $g \circ X$ *integrierbar ist. Dann gilt*

$$\mathbb{E}(g \circ X) = \int_{\mathbb{R}^n} gf \, d\lambda_n.$$

1.13 Korollar. *Wenn* X *die Dichte* f *besitzt und integrierbar ist bzw. zweite Momente hat, dann*

$$\mathbb{E}(X) = \int x f(x) \, d\lambda_n(x) \quad \textit{und} \quad \mathbb{V}(X) = \int |x - \mathbb{E}(X)|^2 f(x) \, d\lambda_n(x).$$

1.14 Beispiel. Eine $N(m, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable hat Erwartungswert m und Varianz σ^2.

1.15 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heißen *unabhängig,* wenn für jede Wahl von $k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$ gilt

$$P(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_m}) = P(A_{k_1}) \cdots P(A_{k_m}).$$

(b) Sei $(\mathcal{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von σ-Algebren $\mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}$. Sie heißt *unabhängig,* wenn für jede Wahl $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ und $A_i \in \mathcal{U}_{k_i}$ die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$ unabhängig sind.

(c) Zufallsvariable $X_1, X_2, \ldots$ heißen *unabhängig,* wenn die Folge $(\mathcal{U}(X_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ihrer σ-Algebren unabhängig ist.

(d) Analog definiert man die Unabhängigkeit einer Zufallsvariablen von einer σ-Algebra und ähnliches.

1.16 Beispiel. Sei $\Omega = [0,1[$, versehen mit dem Lebesguemaß. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die *n-te Rademacher-Funktion* durch

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \frac{k}{2^n} \le \omega < \frac{k+1}{2^n} \text{ für ein gerades } k, \\ -1, & \frac{k}{2^n} \le \omega < \frac{k+1}{2^n} \text{ für ein ungerades } k. \end{cases}$$

Die Rademacher-Funktionen sind unabhängig. Es gilt nämlich für jedes $x \in \{-1,1\}^k$, dass

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) &= 2^{-k}, \\ P(X_1 = x_1) \cdots P(X_k = x_k) &= 2^{-k}. \end{aligned}$$

1.17 Satz. *Die $\mathbb{R}^n$-wertigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_k$ sind genau dann unabhängig, wenn*

$$F_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_k}(x_k) \quad \textit{für alle } x.$$

Wenn alle X^i Verteilungsdichten besitzen, dann gilt auch

$$f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_k}(x_k) \ \textit{f. s.}$$

1.18 Bezeichnung. Es sei $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{U}$. Das Ereignis

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

bezeichnet man als "A_n unendlich oft".

Bemerkung. (a) Da die σ-Algebra keine Toplogie trägt, ist der Limes superior rein formal zu verstehen.

(b) ω liegt genau dann in dem Ereignis "A_n unendlich oft", wenn es unendlich viele n mit $\omega \in A_n$ gibt.

1.19 Theorem (Borel-Cantelli-Lemma). *Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, dann*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

1.20 Definition. Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem $\mathbb{R}^n$. Die *Fouriertransformierte* von Q ist gegeben durch

$$\hat{Q}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u,x\rangle} \, dQ(x),$$

wobei $\langle u, x\rangle = \sum_{j=1}^n u_j x_j$.

1.21 Bemerkung. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q induziert via

$$\langle T_Q, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dQ(x), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

eine temperierte Distribution. Die Funktion $\hat{Q}$ entspricht bis auf der inversen Fouriertransformierten dieser temperierten Distribution. Da die Fouriertransformation ein Automorphismus des Raums der temperierten Distributionen ist, gilt der folgende Satz.

1.22 Satz. *Wenn zwei Wahrscheinlichkeitsmaße dieselbe Fouriertransformierte besitzen, dann stimmen sie überein.*

Beweis. Einen Beweis, der nicht auf Distributionstheorie zurückgreift — aber den Satz von Stone Weierstraß verwendet —, findet man in Klenke [Kle20], Satz 15.9. □

1.23 Definition. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvariable. Die Fouriertransformierte ihrer Verteilung bezeichnet man als *charakteristische Funktion* der Zufallsvariablen. Man bezeichnet die charakteristische Funktion mit φ_X.

1.24 Lemma. *Es sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann*

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\big(e^{i\langle u,X\rangle}\big).$$

1.25 Korollar. *Seien $X_1, \ldots, X_m$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann*

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_m}(u) = \varphi_{X_1}(u) \cdots \varphi_{X_m}(u), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

1.26 Satz. *Die Zufallsvariable X ist genau dann $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt, wenn*

$$\varphi_X(u) = e^{i\mu u - \frac{u^2\sigma^2}{2}}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

2 Bedingte Erwartung

2.1 Definition. Seien A, B Ereignisse, wobei $P(B) \neq 0$. Dann ist

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B}{P(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Hypothese B.

2.2 Theorem. *Sei $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ eine σ-Algebra auf Ω. Sei ferner $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine integrierbare Zufallsvariable. Dann existiert eine bis auf Nullmengen eindeutig bestimmte, $\mathcal{V}$-messbare Zufallsvariable Z, so dass*

$$\int_A X \, dP = \int_A Z \, dP \quad \textit{für alle } A \in \mathcal{V}. \tag{2.1}$$

2.3 Beispiel. $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega\}$ ist eine σ-Algebra auf Ω. Wenn die Zufallsvariable $Z \colon \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{V}$-messbar sein soll, dann muss sie konstant sein. Damit (2.1) gilt, muss diese Konstante gleich $\mathbb{E}(X)$ sein. Also $Z(\omega) = \mathbb{E}(X)$ für alle ω.

2.4 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei X eine Zufallsvariablen auf Ω und sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ eine σ-Algebra. Die *bedingte Erwartung* $\mathbb{E}(X|\mathcal{V})$ von X gegeben $\mathcal{V}$ ist die durch folgende Eigenschaften bis auf Nullmengen eindeutig bestimmte Zufallsvariable

(a) $\mathbb{E}(X|\mathcal{V})$ ist $\mathcal{V}$-messbar.

(b) $\int_A X \, dP = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{V}) \, dP$ für alle $A \in \mathcal{V}$.

Für eine Zufallsvariable Y setzen wir $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\mathcal{U}(Y))$.

2.5 Bemerkung. (a) Theorem 2.2 zeigt, dass die bedingte Erwartung existiert.

(b) Für $A, B \in \mathcal{U}$ mit $P(B) \neq 0$ und $P(B^c) \neq 0$ gilt

$$\mathbb{E}(\chi_A|\chi_B) = P(A|B)\chi_B + P(A|B^c)\chi_{B^c}.$$

Beweis auf Blatt 2.

2.6 Satz. *Sei $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Zufallsvariablen X und Y und sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ eine σ-Algebra.*

(a) *Für* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{V}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{V}) + b\mathbb{E}(Y, \mathcal{V})$.

(b) *Wenn* X $\mathcal{V}$*-messbar ist, dann* $\mathbb{E}(X, \mathcal{V}) = X$ *f. s.*

(c) *Sei* X $\mathcal{V}$*-messbar und sei* XY *integrierbar, dann* $\mathbb{E}(XY|\mathcal{V}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{V})$.

(d) *Wenn* X *unabhängig von* $\mathcal{V}$ *ist, dann* $\mathbb{E}(X|\mathcal{V}) = \mathbb{E}(X)$ *f. s.*

(e) *(Turmeigenschaft) Wenn* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ *eine weitere* σ*-Algebra ist, dann gilt*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{W}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{V})|\mathcal{W}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{W})|\mathcal{V}).$$

(f) *Wenn* $X \leq Y$*, dann* $\mathbb{E}(X|\mathcal{V}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{V})$ *f. s.*

3 Der Wienersche Prozess

Wir wiederholen den Maßfortsetzungssatz aus der Analysis III.

3.1 Definition. Seien X eine Menge und $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{R}$ ist ein *Ring von Teilmengen* von X, wenn

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$.

(b) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist $A \cup B \in \mathcal{R}$.

(c) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

3.2 Definition. Seien X eine Menge und $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X. Eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist ein *Prämaß,* wenn

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

(iii′) (σ-Additivität) Sind $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt und ist $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

3.3 Theorem (Maßfortsetzungssatz von Carathéodory). *Seien X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von X und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Dann kann μ zu einem Maß fortgesetzt werden.*

3.4 Bezeichnung. Sei $T \subseteq [0, \infty[$ ein abgeschlossenes Intervall oder $T = \mathbb{N}_0$. Für jede Wahl von $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu_{t_1,\dots,t_k}$ auf dem $\mathbb{R}^{nk}$ gegeben. Die Familie

$$\{\nu_{t_1,\dots,t_k} \mid k \in \mathbb{N},\ t_1, t_2, \dots, t_k \in T\}$$

heißt *konsistent,* wenn

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$, jede Permutation σ von $\{1, \dots, k\}$, jede Wahl von $t_1, \dots, t_k \in T$ und Borelmengen $F_1, \dots, F_k \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\nu_{t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1,\dots,t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(k)}),$$

(b) Für $k, m \in \mathbb{N}$, jede Wahl von $t_1, \dots, t_{k+m} \in T$ und Borelmengen $F_1, \dots, F_k \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\nu_{t_1,\dots,t_k}(F_1 \times \cdots \times F_k) = \nu_{t_1,\dots,t_{k+m}}(F_1 \times \cdots \times F_k \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n).$$

3.5 Theorem (Fortsetzungssatz von Kolmogorow). *Es sei*

$$\{\nu_{t_1,\dots,t_k} \mid k \in \mathbb{N},\ t_1, t_2, \dots, t_k \in T\}$$

eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dann existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *und ein stochastischer Prozess* $(X_t)_{t\in T}$ *auf* Ω*, so dass*

$$\nu_{t_1,\dots,t_k}(F_1 \times \cdots \times F_k) = P(X(t_1) \in F_1, \dots, X(t_k) \in F_k),$$

für alle Wahlen von $k \in \mathbb{N}$*,* $t_1, \dots, t_k \in T$ *und Borelmengen* $F_1, \dots, F_k$.

Der Satz kann auf den Maßfortetzungssatz von Carathéodory zurückgeführt werden. Details findet man in Aliprantis und Border [AB99], Theorem 14.23.

3.6 Korollar. *Es gibt einen Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, der eine Folge* $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von unabhängigen,* $N(0,1)$*-verteilten Zufallsvariablen besitzt.*

3.7 Definition. Ein $\mathbb{R}$-wertiger stochastischer Prozess $(W(t))_{t\geq 0}$ heißt (eindimensionale) *Brownsche Bewegung* oder *Wienerscher Prozess,* wenn

(a) $W(0) = 0$ f. s.

(b) Für $t \geq s \geq 0$ ist $W(t) - W(s)$ $N(0, t-s)$-verteilt.

(c) Für $0 < t_1 < \cdots < t_n$ sind die Zufallsvariablen $W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1)$, …, $W(t_n) - W(t_{n-1})$ unabhängig.

(d) Die Pfade sind fast sicher stetig.

3.8 Bezeichnung. Wir setzen

$$g(x, t|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right).$$

3.9 Theorem. *Sei* $(W(t))_{t\geq 0}$ *eine Brownsche Bewegung, sei* $n \in \mathbb{N}$*, seien* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *und sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Borel-messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(f(W(t_1), \dots, W(t_n))\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) g(x_1, t_1|0) g(x_2, t_2{-}t_1|x_1) \dots g(x_n, t_n{-}t_{n-1}|x_{n-1})\, dx_n \dots dx_1.\end{aligned}$$

3.10 Bezeichnung. Die *Haar-Funktionen* sind definiert durch

$$h_0(t) = 1 \quad 0 \le t \le 1,$$
$$h_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < t \le 1, \end{cases}$$
$$h_k(t) = \begin{cases} 2^{n/2}, & \frac{k-2^n}{2^n} \le t \le \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n}, \\ -2^{n/2}, & \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n} < t \le \frac{k-2^n+1}{2^n}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $2^n \le k < 2^{n+1}$.

3.11 Satz (Haar (1909)). *Die Haar-Funktionen bilden eine Orthonormalbasis des* $L^2[0,1]$.

Der Beweis orientiert sich an dem von Theorem 1.4 des Buchs von Wojtaszczyk [Woj97].

3.12 Bezeichnung. Für $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$s_k(x) = \int_0^x h_k(t)\,dt$$

und $s_{-1} \equiv 1$. Die Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}}$ ist das *Faber-Schauder-System.*

Faber konstruierte es 1910 und zeigte, dass es eine Schauderbasis für $C[0,1]$ ist. Schauder verallgemeinerte später diese Konstruktion.

3.13 Lemma. *(a) Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $2^n \le k < 2^{n+1}$ *gilt* $\|s_k\|_\infty = 2^{-\frac{n}{2}-1}$.

(b) Für $s, t \in [0,1]$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k(s) s_k(t) = \min(s,t).$$

3.14 Definition. Sei $0 < \gamma \le 1$, sei $X \subset \mathbb{R}^n$ komkakt und sei $f\colon X \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion.

(a) f ist *Hölder-stetig* zum Exponenten γ in $x \in X$, falls es eine Konstante C gibt, so dass
$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\gamma \text{ für alle } y \in X.$$

(b) f erfüllt eine *Hölder-Bedingung* zum Exponenten γ, wenn es ein C gibt, so dass
$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\gamma$$
für alle $x, y \in X$.

(c) Der Raum aller Funktionen, welche eine Hölder-Bedingung zum Exponenten γ erfüllen, wird mit $C^{0,\gamma}(X)$ bezeichnet und mit der Norm

$$\|f\|_\gamma = \|f\|_\infty + \sup_{x,y\in X, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

versehen.

3.15 Bemerkung. (a) Die Hölder-Bedingung zum Exponenten 1 wird üblicherweise als Lipschitz-Bedingung bezeichnet.

(b) Der Raum $C^{0,\gamma}(X)$ ist ein Banachraum. Das wird als Aufgabe 2.15 in Kaballo [Kab11] gezeigt.

3.16 Lemma. *Sei $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Wenn $|a_k| \leq Ck^{\frac{1}{2}-\delta-\epsilon}$ für $C > 0$ und $\epsilon > 0$ geeignet, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k s_k$ in $C^{0,\delta}[0,1]$.*

3.17 Lemma. *Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, $N(0,1)$-verteilter Zufallsvariablen. Dann existiert eine Nullmenge N, so dass es zu jedem $\omega \notin N$ ein $C > 0$ gibt, so dass für alle k*

$$|A_k(\omega)| \leq C\sqrt{\log(k+1)}$$

3.18 Satz. *Es sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, $N(0,1)$-verteilter Zufallsvariablen. Für jedes $\delta < \frac{1}{2}$ konvergiert die Reihe*

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k s_k(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

fast sicher in $C^{0,\delta}[0,1]$. Ferner gilt:

(a) $(W(t))_{t\geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung.

(b) Für fast alle ω ist der Pfad $t \mapsto W(t,\omega)$ Hölder-stetig zum Exponenten δ, insbesondere stetig.

3.19 Satz. *Seien $X_1, \dots, X_{n+1}$ unabhängige, $\mathbb{R}^k$-wertige Zufallsvariablen und seien $f\colon (\mathbb{R}^k)^n \to \mathbb{R}$ und $g\colon (\mathbb{R}^k)^m \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind die Zufallsvariablen*

$$Y := f(X_1, \dots, X_n) \quad \textit{und} \quad Z := g(X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$$

unabhängig.

Beweis. Steht in § 2.3 von [Eva13]. Er zitiert das Buch [Bre68] von Breiman. □

3.20 Theorem. *Es sei $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem es abzählbar viele unabhängige, $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen gibt. Dann gibt es auf Ω einen eindimensionalen Wienerschen Prozess.*

3.21 Bezeichnung. Unter $\mathcal{U}(X(t)|t \in T)$ versteht man die kleinste σ-Algebra, die alle Mengen der Form $X(t)^{-1}(B)$, $t \in T$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, enthält.

3.22 Definition. Ein $\mathbb{R}^n$-wertiger stochastischer Prozess ist eine n-dimensionale Brownsche Bewegung oder ein n-dimensionaler Wienerscher Prozess, falls

(a) W^k für $k = 1, \dots, n$ ein eindimensionaler Wienerscher Prozess ist, und

(b) die σ-Algebren $\mathcal{U}(W^k) = \mathcal{U}(W^k(t)|t \geq 0)$ unabhängig sind.

Es gibt einen n-dimensionalen Wienerschen Prozess. Dazu konstruiert man mit Theorem 3.20 n unabhängige Prozesse.

3.23 Lemma. *Sei W ein n-dimensionaler Wienerscher Prozess. Dann gelten für* $k, \ell = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(W^k(t)W^\ell(s)\big) &= \min(t,s)\delta_{k,\ell}, \\ \mathbb{E}\big((W^k(t) - W^k(s))(W^\ell(t) - W^\ell(s))\big) &= (t-s)\delta_{k,\ell}, \qquad 0 \leq t \leq s. \end{aligned}$$

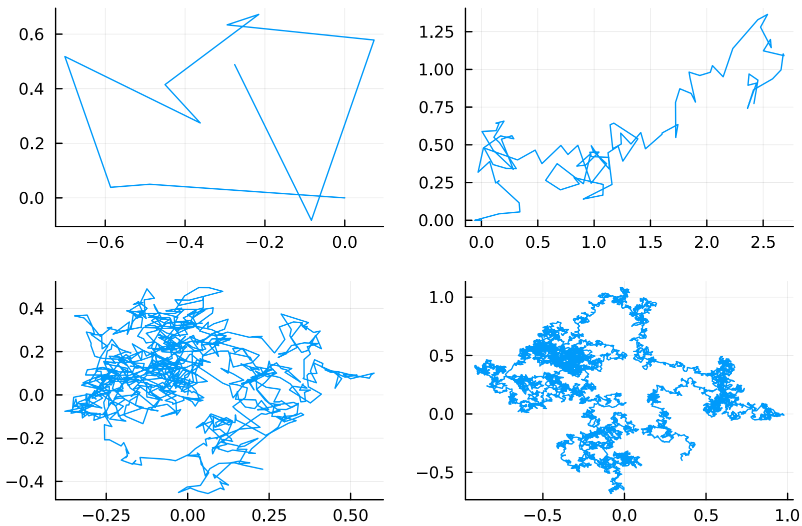

Abbildung 3.1: Simulationen einer Brownschen Bewegung mit Schrittweiten 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} und 10^{-4}

Abbildung 3.1 zeigt Simulationen der Brownschen Bewegung mit verschieden feinen Zeitschritten.

Bemerkung. Nach Konstruktion ist der hier definierte Wienersche Prozess Hölder-stetig zu allen Exponenten $\gamma < \frac{1}{2}$. Man kann Wienersche Prozesse aber auch anders erhalten. In Abschnitt 3.4.1 weist Evans [Eva13] nach, dass die Hölder-Stetigkeit bereits aus den Axiomen des Wienerschen Prozesses folgt.

3.24 Theorem (Dvoretzky, Erdős und Kakutani). *Für $\gamma > \frac{1}{2}$ ist der Pfad $t \mapsto W(t, \omega)$ f. s. nirgends Hölder-stetig zum Exponent γ.*

Bemerkung. Simon zitiert in den Notizen zu § 4.16 von [Sim15] die Aussage, dass die Pfade des Wienerschen Prozesses fast sicher nicht Hölder-stetig zum Exponenten $\frac{1}{2}$ sind.

3.25 Korollar. *Die Pfade der Brownschen Bewegung sind fast sicher nirgends differenzierbar.*

3.26 Bemerkung. Eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ ist ein Tupel $p = (p_0, \ldots, p_n)$ mir $a = p_0 < p_1 < \cdots < p_n = b$, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist. Für $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ definieren wir

$$V_p(f) = \sum_{j=1}^{n} |f(p_j) - f(p_{j-1})|.$$

Die *Variation* von f ist definiert als $\sup_p V_p(f)$, wobei p über alle Zerlegungen von $[a, b]$ variiert. Wenn die Variation von f endlich ist, dann sagt man, f sei eine Funktion mit *beschränkter Variation.*

Für Funktionen beschränkter Variation hat Stieltjes einen Maßbegriff eingeführt, der zum Riemann-Stieltjes-Integral führt. Details findet man z. B. in §4.1 von Simon [Sim15].

3.27 Satz. *Die Pfade des Wienerschen Prozesses sind fast sicher nicht von beschränkter Variation.*

Dieser Satz impliziert, dass das Integral bzgl. W nicht als Riemann-Stieltjes-Integral konstruiert werden kann.

3.28 Definition. Eine *Filtration* ist eine monoton wachsende Familie $(\mathcal{V}(t))_{t \geq 0}$ von σ-Algebren.

3.29 Beispiel. Es sei X in stochastischer Prozess und es sei $s \geq 0$. Die kleinste σ-Algebra, die alle $\mathcal{U}(X(t))$ für $0 \leq t \leq s$ enthält, bezeichnen wir als *Geschichte* des Prozesses bis einschließlich der Zeit s. Wir schreiben $\mathcal{U}(s)$ dafür.

$(\mathcal{U}(s))_{s \geq 0}$ ist eine Filtration.

3.30 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $\mathcal{V} \subseteq U$ eine σ-Algebra. Die Zufallsvariable

$$P(A|\mathcal{V}) = \mathbb{E}(\chi_A|\mathcal{V}), \quad A \in \mathcal{V},$$

ist die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von A, gegeben $\mathcal{V}$.

3.31 Definition. Ein $\mathbb{R}^n$-wertiger stochastischer Prozess ist ein *Markow-Prozess,* wenn für jede Wahl von $0 \leq s \leq t$ und jede Borelmenge B gilt

$$P(X(t) \in B|\mathcal{U}(s)) = P(X(t) \in B|X(s)).$$

3.32 Theorem. *Der Wienersche Prozess ist Markowsch.*

Die Markow-Eigenschaft des Prozesses bedeutet, dass er sich nicht daran “erinnert”, wie er an einen Punkt gelangt ist. Speziell weiß er nicht, aus welcher Richtung er gekommen ist und kann daher nicht in derselben Richtung weiterfahren. Das erklärt heuristisch, dass Pfade f. s. nicht differenzierbar sind.

4 Das Itô-Integral

Ab jetzt ist W immer der Wienersche Prozess auf $(\Omega, \mathcal{U}, P)$.

Ziel: Eine stochastische Differentialgleichung soll die folgende Form haben

$$
\begin{aligned}
dX &= b(X,t)\,dt + B(X,t)\,dW, \\
X(0) &= X_0
\end{aligned}
$$

wobei X, X_0 und B Zufallsvariablen und W die Brownsche Bewegung sind. Für $B = 0$ hat man eine gewöhnliche Differentialgleichung in laxer Schreibweise, die man wie in der Analysis II in eine Integralgleichung verwenden kann. Für $B \neq 0$ spielt der letzte Term die Rolle eines Rauschens. Die zugehörige Integralgleichung ist dann

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X,s)\,ds + \int_0^t B(X,s))\,dW.$$

Das erste Integral kann man pfadweise verstehen. Die Interpretation des zweiten Integrals ist Thema dieses Kapitels. Da die Pfade von W unbeschränkte Variation besitzen, ist die Interpretation als Stieltjes-Integral nicht möglich.

4.1 Definition (Paley, Wiener und Zygmund (1933)). Sei $g\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(0) = g(T) = 0$. Dann definieren wir

$$\int_0^t g\,dW = -\int_0^t g' W\,dt.$$

Die Funktion g ist also deterministisch, aber das Integral ist eine Zufallsvariable.

4.2 Lemma. *Unter den Voraussetzungen der Definition gelten*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^T g\,dW\right) &= 0. \\
\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T g\,dW\right)^2\right) &= \int_0^T g(t)^2\,dt.
\end{aligned}
$$

4.3 Bemerkung. Das Lemma zeigt die Existenz einer Abbildung

$$\Psi\colon C^1[0,T] \to L^2(\Omega, \mathcal{U}, P), \quad g \mapsto \int_0^T g\,dW.$$

Wenn wir den $C^1[0,T]$ mit der L^2-Norm versehen, dann ist diese Abbildung sogar stetig, genauer

$$\|\Psi(g)\|_2 \leq \|g\|_2.$$

Sie setzt sich also fort zu einer stetigen Abbildung $L^2[0,T] \to L^2(\Omega, \mathcal{U}, P)$.

Die Definition von Paley, Wiener und Zygmund ist somit auf den $L^2[0,T]$ fortgesetzt worden.

4.4 Bezeichnung. Es sei Z die durch $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ gegebene Zerlegung von $[0,T]$.

(a) Die *Feinheit* dieser Zerlegung ist

$$|Z| = \max_{k=1,\ldots,m} (t_k - t_{k-1}).$$

(b) Für $0 \leq \lambda \leq 1$ ist die *Riemannsumme* zu $\int_0^T W \, dW$ definiert als

$$R(Z,\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big),$$

wobei $\tau_k = (1-\lambda)t_k + \lambda t_{k+1}$.

4.5 Lemma (Quadratische Variation). *Seien $0 \leq a < b$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei durch $a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m_n}^n = b$ eine Zerlegung Z^n von $[a,b]$ gegeben. (Das n ist also ein Index, kein Exponent.) Für festes $\lambda \in [0,1]$ sei $\tau_k^n = (1 - \lambda t_k^n) + \lambda t_{k+1}^n$. Wenn $\lim_{n\to\infty}|Z^n| = 0$, dann konvergiert*

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} \big(W(\tau_k^n) - W(t_k^n)\big)^2$$

im $L^2(\Omega, \mathcal{U}, P)$ gegen $\lambda(b-a)$.

4.6 Lemma. *Sei $0 \leq \lambda \leq 1$ und sei $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[0,T]$ mit $\lim_{n\to\infty}|Z^n| = 0$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} R(Z^n, \lambda) = \frac{1}{2}W(T)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)T$$

in $L^2(\Omega, \mathcal{U}, P)$.

Bemerkung. Das Itôsche Integral entspricht dem Fall $\lambda = 0$. Die Alternative $\lambda = \frac{1}{2}$ führt zum Stratonovich-Integral.

4.7 Bezeichnung. (a) Wir bezeichnen die Geschichte des Wienerschen Prozesses bis zur Zeit t mit $\mathcal{W}(t)$.

(b) Die *Zukunft* des Wienerschen Prozesses ab der Zeit t ist die kleinste σ-Algebra, für die alle Zufallsvariablen $W(s) - W(t)$, $s \geq t$, messbar sind. Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{W}^+(t)$.

4.8 Satz (Klenke [Kle20], Satz 2.26). *Sei K eine Menge, seien I_k, $k \in K$, paarweise disjunkte Indexmengen und sei $I = \bigcup_{k \in K} I_k$. Durch $(X_i)_{i \in I}$ sei eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen gegeben. Für $k \in K$ sei $\mathcal{U}_k$ die kleinste σ-Algebra, bzgl. derer alle X_i mit $i \in K$ messbar sind. Dann sind die σ-Algebren $\mathcal{U}_k$, $k \in K$, unabhängig.*

4.9 Bezeichnung. Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ σ-Algebren. Die *Produkt-σ-Algebra* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle Produkte $M_1 \times M_2$ mit $M_j \in \mathcal{A}_j$ enthält.

4.10 Lemma. *Seien $0 \leq t < s$.*

(a) Dann sind $W(s) - W(t)$ und $\mathcal{W}(t)$ unabhängig.

(b) $W(s)$ ist nicht $\mathcal{W}(t)$-messbar.

4.11 Definition. Sei $(\mathcal{F}(t))_{t \geq 0}$ eine Filtration. Ein $\mathbb{R}^n$-wertiger Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ heißt $\mathcal{F}(t)$-*adaptiert,* wenn für jedes $t \geq 0$ die Zufallsvariable $X(t)$ messbar bzgl. $\mathcal{F}(t)$ ist.

4.12 Beispiel. Der durch $X(t) = W(\frac{t}{2})$ gegebene Prozess ist $\mathcal{W}(t)$-adaptiert, der durch $Y(t) = W(2t)$ gegebene nicht.

4.13 Bezeichnung. Sei $p = 1$ oder $p = 2$ und sei $T > 0$. Ein $\mathbb{R}^n$-wertiger Prozess $X = (X(t))_{t \geq 0}$ liegt in $\mathbb{L}^p[0, T]$, wenn

(a) $X\colon [0, \infty[\times \Omega \to \mathbb{R}^n$ messbar bzgl. $\mathcal{B}([0, \infty[) \otimes \mathcal{U}$ ist,

(b) X $\mathcal{W}(t)$-adaptiert ist,

(c) $\mathbb{E}\left(\int_0^T |X(t)|^p \, dt\right) < \infty$.

Bemerkung. Einen solchen Prozess bezeichnet man als *progressiv messbar.* Das wird im Buch von Klenke [Kle20] ausgeführt.

4.14 Lemma. $\mathbb{L}^p[0, T]$*,* $p = 1, 2$ *ist ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum.*

4.15 Bezeichnung. Ein Prozess G ist *elementar,* wenn es eine Zerlegung $Z = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ von $[0, T]$ sowie Zufallsvariable G_k, $k = 0, \ldots, m-1$, gibt. so dass

$$G(t) = g_k \text{ für } t_k \leq t < t_{k+1}.$$

Für einen elementaren Prozess $G \in \mathbb{L}^2[0, T]$ definieren wir das Itô-Integral durch

$$\int_0^T G \, dW = \sum_{k=0}^{m-1} G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))). \tag{4.1}$$

4.16 Bemerkung. (a) Weil der Prozess adaptiert ist, ist G_k messbar bzgl. $\mathcal{W}(t_k)$.

(b)

$$\sum_{k=1}^{m-1} W(t_k)\chi_{[t_k,t_{k+1}]} \in \mathbb{L}^2[0,T]$$

aber

$$\sum_{k=1}^{m-1} W\left(\frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})\right)\chi_{[t_k,t_{k+1}]} \notin \mathbb{L}^2[0,T].$$

4.17 Lemma. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *und seien* $G, H \in \mathbb{L}^2[0,T]$ *elementare Prozesse. Dann gelten*

$$\begin{aligned}
\int_0^T (aG + bH)\, dW &= a\int_0^T G\, dW + b\int_0^T b\, dW, \\
\mathbb{E}\left(\int_0^T G\, dW\right) &= 0, \\
\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T G\, dW\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^T G^2\, dt\right) \qquad \textit{(Itô-Isomorphie für elementare Prozesse).}
\end{aligned}$$

4.18 Lemma ([Øks03], § 3.1). *Sei* $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$*. Dann existiert eine Folge* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkter, elementarer stochastischer Prozesse in* $\mathbb{L}^2[0,T]$*, die in dem Sinn gegen* X *konvergiert, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T |X - X_n|^2\, dt\right) \to 0.$$

"Beschränkt" bedeutet in diesem Zusammenhang, dass es zu jedem n *ein* C *gibt, so dass* $|X_n| \leq C$ *f. s.*

Sei $S^2[0,T]$ der Unterraum der elementaren Prozesse in $\mathbb{L}^2[0,T]$. Wegen Lemma 4.17 kann die Abbildung

$$S[0,T] \to L^2(\Omega, \mathcal{U}, P), \quad X \mapsto \int_0^T X\, dW,$$

zu einer Abbildung $\mathbb{L}^2[0,T] \to L^2(\Omega, \mathcal{U}, P)$ fortgesetzt werden.

4.19 Definition. Diese Fortsetzung ist das Itô-Integral.

Analog definiert man $\int_R^S X\, dW$ für $0 \leq R \leq S$.

Wenn die Integrationsvariable benannt werden muss, schreibt man auch

$$\int_0^T X(t)\, dW(t).$$

4.20 Theorem (Itô-Isomorphie). *Für* $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$ *gilt*

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T X\,dW\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T X^2\,dt\right).$$

4.21 Korollar. *Wenn* $X, X_1, X_2, \dots \in L^2[0,T]$ *und*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T (X_n - X)^2\,dt\right) \to 0,$$

dann

$$\int_0^T X_n\,dW \to \int_0^T X\,dW.$$

4.22 Beispiel.

$$\int_0^T W\,dW = \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{T}{2}.$$

Literatur

[AB99] Charalambos D. Aliprantis und Kim C. Border. *Infinite-dimensional analysis*. Second. A hitchhiker's guide. Springer-Verlag, Berlin, 1999, S. xx+672. ISBN: 3-540-65854-8. DOI: 10.1007/978-3-662-03961-8. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-03961-8.

[Bre68] Leo Breiman. *Probability*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1968, S. ix+421.

[Eva13] Lawrence C. Evans. *An introduction to stochastic differential equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, S. viii+151. ISBN: 978-1-4704-1054-4. DOI: 10.1090/mbk/082. URL: https://doi.org/10.1090/mbk/082.

[Kab11] Winfried Kaballo. *Grundkurs Funktionalanalysis*. German. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2011, S. xii + 345. ISBN: 978-3-8274-2149-4/pbk; 978-3-8274-2721-2/ebook. DOI: 10.1007/978-3-8274-2721-2.

[Kle20] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. German. 4th revised and supplemented edition. Masterclass. Berlin: Springer Spektrum, 2020. ISBN: 978-3-662-62088-5; 978-3-662-62089-2. DOI: 10.1007/978-3-662-62089-2.

[MV11] Reinhold Meise und Dietmar Vogt. *Einführung in die Funktionalanalysis*. German. 2nd revised ed. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011, S. x + 273. ISBN: 978-3-8348-1872-0/pbk.

[Øks03] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Sixth. Universitext. An introduction with applications. Springer-Verlag, Berlin, 2003, S. xxiv+360. ISBN: 3-540-04758-1. DOI: 10.1007/978-3-642-14394-6. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6.

[Sim15] Barry Simon. *Real analysis*. Bd. Part 1. A Comprehensive Course in Analysis. With a 68 page companion booklet. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, S. xx+789. ISBN: 978-1-4704-1099-5. DOI: 10.1090/simon/001. URL: https://doi.org/10.1090/simon/001.

[Woj97] P. Wojtaszczyk. *A mathematical introduction to wavelets*. Bd. 37. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, S. xii+261. ISBN: 0-521-57020-4; 0-521-57894-9. DOI: 10.1017/CBO9780511623790. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511623790.