

Modellstrukturen verschiedener Kategorien

Bachelorarbeit

Vorgelegt von

Daniel Dratschuk

aus Essen

Angefertigt am
Mathematischen Institut
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

15. September 2023

Betreuer: Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	II
1 Definition und Eigenschaften von Modellkategorien	1
2 Quillen-Funktoren	8
3 Das Kleine-Objekt-Argument	9
4 Kompakt erzeugte Modellkategorien	13
5 Beispiele von Modellkategorien	15
5.1 Topologische Räume	15
5.1.1 Die Hurewicz-Modellstruktur	16
5.1.2 Die Quillen-Modellstruktur	19
5.2 Kettenkomplexe	23
5.3 Klassifikation der Modellstrukturen auf Mengen	29
Erklärung	36

Einleitung

Betrachtet man das Beispiel der topologischen Räume, so sind die struktur-erhaltenden Abbildungen die stetigen Abbildungen und die Isomorphismen die Homöomorphismen. Homöomorphie von topologischen Räumen stellt sich nun aber für die meisten Anwendungen als ein zu starker Begriff heraus, der sich im Allgemeinen auch nicht handhaben lässt [Mar58]. Was man in der algebraischen Topologie stattdessen macht, ist es Räumen algebraische Invarianten zuzuordnen, welche in der Regel nicht zwischen Räumen bis auf eine schwächere Art von Äquivalenz, nämlich der Homotopieäquivalenz unterscheiden. So nennt sich dann eine Abbildung f eine Homotopieäquivalenz, wenn es eine Abbildung g gibt, sodass statt Gleichheit nur die Existenz von Homotopien $f \circ g \simeq \text{id}$ und $g \circ f \simeq \text{id}$ gefordert werden.

Nun hätte man aber doch manchmal gerne, dass die Homotopieäquivalenzen auch Isomorphismen sind, was dann auf natürliche Weise zu der Kategorie **HoTop** führt. Dort sind die Objekte weiterhin die topologischen Räume, die Morphismen aber durch Homotopieklassen von stetigen Abbildungen gegeben, die Isomorphismen also genau die Homotopieäquivalenzen.

Dieses Konzept von schwachen Äquivalenzen tritt nun auch in vielen weiteren Kategorien auf. So zum Beispiel in der Kategorie der Kettenkomplexe, in der man Objekte häufig bis auf Quasiisomorphismen studiert (5.24). Betrachtet man dann Objekte bis auf diese Art von Äquivalenzen, so führt dies ähnlich wie mit **HoTop** zu der derivierten Kategorie.

Ebenso lässt sich auch auf der Kategorie der simplizialen Mengen eine Art Homotopietheorie einführen, bei der man zeigen kann, dass diese in gewissem Sinne äquivalent zu der Homotopietheorie auf topologischen Räumen ist [MP12, 3.6.7].

Erstmals eingeführt von Quillen in [Qui67], fasst die Theorie der Modellkategorien nun solche Ideen auf und liefert einen axiomatischen Rahmen, um Homotopietheorie auf verschiedenen Kategorien zu betreiben und miteinander in Verbindung zu bringen.

Zu Beginn dieser Arbeit führen wir in den ersten beiden Kapiteln zunächst den Formalismus der Modellkategorien ein und zeigen einige grundlegende Eigenschaften. Daraufhin führen wir in den Kapiteln drei und vier Werkzeuge ein, welche den Nachweis der Axiome erheblich vereinfachen können, bevor wir uns im letzten Kapitel dann schließlich ausgiebig Beispielen widmen werden. Wir behandeln zunächst die klassischen Beispiele der topologischen Räume und Kettenkomplexe und klassifizieren abschließend alle möglichen Modellstrukturen auf der Kategorie der Mengen.

1 Definition und Eigenschaften von Modellkategorien

Falls nicht anders spezifiziert, sei \mathcal{M} stets eine lokal kleine Kategorie mit allen kleinen Limiten und Kolimiten (eine bivollständige Kategorie). Für die Definition einer Modellkategorie gehen wir dabei wie in [MP12] vor, wofür zunächst einige Definitionen vorab notwendig sind.

Definition 1.1. Die *Pfeilkategorie* $\text{Ar}(\mathcal{M})$ ist die Kategorie mit den Pfeilen von \mathcal{M} als Objekten und kommutativen Quadraten als Morphismen.

Somit lässt sich formulieren:

Definition 1.2. Ein Morphismus f in \mathcal{M} heißt *Retrakt* eines Morphismus g aus \mathcal{M} , wenn er ein Retrakt von g als Objekt in $\text{Ar}(\mathcal{M})$ ist. Das heißt, wenn ein kommutatives Diagramm folgender Form existiert

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{j} & A \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{r} & D & \xrightarrow{k} & B \end{array}$$

mit $j \circ i = \text{id}$ und $k \circ r = \text{id}$.

Als Teil einer Modellkategorie werden wir später eine Klasse von Abbildungen einführen, die als schwache Äquivalenzen bezeichnet werden. Diese hängen oft in gewisser Weise mit Isomorphismen zusammen, weswegen für den Abschluss unter Retrakten folgendes allgemeine Lemma nützlich sein wird.

Lemma 1.3. Seien f und g Morphismen in \mathcal{M} und g zusätzlich ein Isomorphismus. Ist f ein Retrakt von g , so ist auch f ein Isomorphismus.

Beweis. In obigem Diagramm hat man

$$(j \circ g^{-1} \circ r) \circ f = j \circ i = \text{id} \quad \text{und} \quad f \circ (j \circ g^{-1} \circ r) = r \circ k = \text{id}. \quad \square$$

Weiterhin gilt folgende Aussage:

Lemma 1.4 ([MP12, 14.1.3]). Sind $f, g \in \text{Ar}(\mathcal{M})$ mit $f \circ g = \text{id}$, so ist f ein Retrakt von $g \circ f$.

Beweis. Folgendes Diagramm liefert ein Retrakt von $g \circ f$:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xlongequal{\quad} & A & \xlongequal{\quad} & A \\ \downarrow f & & \downarrow g \circ f & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

□

Insbesondere sind also Isomorphismen Retrakte von Identitäten. Somit enthält eine unter Retrakten abgeschlossene Klasse von Morphismen genau dann alle Isomorphismen, wenn sie alle Identitäten enthält.

Zentral für eine Modellkategorie wird es sein, Morphismen in sogenannte Faserungen und Kofaserungen zerlegen zu können. Dazu wird der folgende Begriff verwendet.

Definition 1.5. Eine *funktorielle Faktorisierung* ist ein Paar (α, β) von Funktoren $\text{Ar}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Ar}(\mathcal{M})$, mit $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$ für alle $f \in \text{Ar}(\mathcal{M})$.

Ein Paar $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ von Klassen von Morphismen von \mathcal{M} *faktoriert* \mathcal{M} , wenn es eine funktorielle Faktorisierung (α, β) gibt mit $\alpha(f) \in \mathcal{L}$ und $\beta(f) \in \mathcal{R}$ für alle Morphismen f in \mathcal{M} .

Beispiel 1.6. Das Paar $(\text{surj}, \text{inj})$ der surjektiven bzw. injektiven Abbildungen faktoriert **Set**. Eine funktorielle Faktorisierung für eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ in **Set** wird durch Einschränkung auf das Bild und anschließende Inklusion $A \xrightarrow{f} \text{im } f \hookrightarrow B$ gegeben.

Dabei sei angemerkt, dass Faktorisierungen in der Literatur auch gelegentlich nicht funktoriell definiert werden (wie z.B. in [MP12, 14.1.10]). Funktorielle Zerlegungen haben aber unter anderem den Vorteil, dass die später definierten (ko-)fasernden Ersetzungen stets funktoriell werden. Zudem sind die Zerlegungen in den meisten Beispielen bereits funktoriell, sodass es sich nicht als große Einschränkung herausstellt.

Ein weiterer zentraler Begriff ist die Hochhebungseigenschaft:

Definition 1.7. Seien $i: A \rightarrow B$ und $p: X \rightarrow Y$ Morphismen von \mathcal{M} . Man sagt i hat die *linke Hochhebungseigenschaft* (LHHE) bezüglich p und p die *rechte Hochhebungseigenschaft* bezüglich i (RHHE), notiert $i \square p$, wenn für jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & \nearrow \exists h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

ein Morphismus h existiert, sodass das Diagramm kommutiert. Den Morphismus h bezeichnet man dann auch als *Lift* oder *Hochhebung*. Für Klassen von Morphismen \mathcal{L} und \mathcal{R} in \mathcal{M} sei $\mathcal{L} \square$ die Klasse aller Morphismen p , sodass p die RHHE bezüglich allen i in \mathcal{L} hat. Analog sei $\square \mathcal{R}$ die Klasse aller Morphismen i , sodass i die LHHE bezüglich allen p in \mathcal{R} hat. Weiterhin schreibe $\mathcal{L} \square \mathcal{R}$, falls $i \square p$ für alle i in \mathcal{L} und p in \mathcal{R} gilt.

Beispiel 1.8. Sei $\mathcal{M} = \mathbf{Set}$ und $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung. Dann hat f genau dann die RHHE bezüglich $\emptyset \rightarrow \{*\}$, wenn f surjektiv ist und die RHHE bezüglich $\{a, b\} \rightarrow \{*\}$, wenn f injektiv ist:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow f \\ \{*\} & \longrightarrow & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \{a, b\} & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow f \\ \{*\} & \longrightarrow & B \end{array}$$

Also ist $(\emptyset \rightarrow \{*\})^{\square} = \text{surj}$ die Klasse aller surjektiven Abbildungen und $(\{a, b\} \rightarrow \{*\})^{\square} = \text{inj}$ die Klasse aller injektiven Abbildungen. In Kapitel 5.3 werden wir alle solche Klassen bestimmen.

Man sieht an diesem Beispiel also bereits, dass sich zentrale Eigenschaften auch über Hochhebungseigenschaften ausdrücken lassen. Für eine ausführliche Liste solcher Beispiele siehe z.B. auch [nLa23a].

Folgendes Lemma aus [Hov99, 1.1.9] ist gelegentlich nützlich:

Lemma 1.9 (Retrakt-Argument). Sei $f = p \circ i$ eine Faktorisierung in \mathcal{M} . Gilt $f \square p$, so ist f ein Retrakt von i . Dual gilt: Ist $i \square f$, so ist f ein Retrakt von p .

Beweis. Seien $f: A \rightarrow B$, $i: A \rightarrow B$ und $p: B \rightarrow C$ die Definitions- und Zielbereiche der einzelnen Pfeile. Dann existiert in folgendem Diagramm ein Lift r :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ f \downarrow & \nearrow \exists r & \downarrow p \\ C & \xlongequal{\quad} & C \end{array}$$

und ein Retrakt ist dann gegeben durch:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xlongequal{\quad} & A & \xlongequal{\quad} & A \\ \downarrow f & & \downarrow i & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{r} & B & \xrightarrow{p} & C. \end{array}$$

Genauso zeigt man auch die duale Aussage. □

Später wollen wir analog zu der Konstruktion von CW-Komplexen auch allgemein den Begriff eines relativen Zellkomplexes einführen, welche für die Theorie der kompakt erzeugten Modellkategorien wichtig sind. Kategoriell erhält man diese dann als Verknüpfung potentiell beliebig vieler Morphismen, was wie folgt definiert wird:

Definition 1.10. Sei λ eine Ordinalzahl, welche über die Wohlordnung als Kategorie aufgefasst wird. Eine λ -Sequenz ist ein kostetiger Funktor

$$X_*: \lambda \rightarrow \mathcal{M}.$$

Man schreibt X_α für $X_*(\alpha)$ und bezeichnet dann den induzierten Morphismus $X_0 \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ als *transfinite Komposition* von X_* .

Beispiel 1.11. Für $\lambda = 3$ ist die transfinite Komposition die übliche Verkettung:

$$\begin{array}{ccccc} & & \operatorname{colim}_{\alpha < 3} X_\alpha = X_2 & & \\ & \nearrow^{g \circ f} & \uparrow g & \nwarrow^{\operatorname{id}} & \\ X_0 & \xrightarrow{f} & X_1 & \xrightarrow{g} & X_2. \end{array}$$

Für die gleich folgende Proposition ist es nützlich, folgende (redundante) Eigenschaften unter einen Begriff zu fassen.

Definition 1.12. Eine Klasse von Morphismen \mathcal{L} einer Kategorie \mathcal{M} heißt *linksgesättigt*, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i) \mathcal{L} bildet eine Unterkategorie von \mathcal{M}
- (ii) \mathcal{L} enthält alle Isomorphismen
- (iii) \mathcal{L} ist abgeschlossen unter Retrakten
- (iv) \mathcal{L} ist abgeschlossen unter Koprodukten, das heißt für $f: A \rightarrow X$ und $g: B \rightarrow Y$ ist der induzierte Morphismus $A \amalg B \rightarrow X \amalg Y$ wieder in \mathcal{L} .
- (v) \mathcal{L} ist abgeschlossen unter Pushouts, das heißt ist f in \mathcal{L} und folgendes Diagramm ein Pushout:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ f \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & D, \end{array}$$

so ist auch g in \mathcal{L} .

- (vi) \mathcal{L} ist abgeschlossen unter transfiniter Komposition, das heißt ist X eine λ -Sequenz, sodass $X_\alpha \rightarrow X_{\alpha+1}$ in \mathcal{L} liegt für alle $\alpha + 1 < \lambda$, dann ist auch die transfinite Komposition in \mathcal{L} .

Dualisiert man alle Eigenschaften, so erhält man den Begriff einer *rechtsgesättigten* Klasse von Morphismen. Dabei werden Koprodukte bzw. Pushouts durch Produkte bzw. Pullbacks ersetzt und der Kolimes der transfiniten Komposition mit dem Limes ausgetauscht.

Damit lässt sich nun formulieren:

Satz 1.13. Sei \mathcal{K} eine Klasse von Morphismen in \mathcal{M} . Dann ist $\square\mathcal{K}$ links-
gesättigt und \mathcal{K}^\square rechtsgesättigt.

Beweis. Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [MP12, 14.1.8]. □

Eine besonders kompakte Definition einer Modellstruktur ermöglicht der folgende Begriff.

Definition 1.14. Ein *schwaches Faktorisierungssystem* (SFS) in \mathcal{M} ist ein geordnetes Paar $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ von Klassen von Morphismen in \mathcal{M} , welches \mathcal{M} faktorisiert und $\mathcal{L} = \square\mathcal{R}$ sowie $\mathcal{R} = \mathcal{L}^\square$ erfüllt.

Weiterhin wollen wir noch die schwachen Äquivalenzen als isolierten Begriff einführen, was beim Nachweis der Axiome nützlich sein wird.

Definition 1.15. Eine Unterkategorie \mathcal{W} von \mathcal{M} wird als Unterkategorie von *schwachen Äquivalenzen* bezeichnet, falls alle Identitäten in \mathcal{W} liegen, \mathcal{W} abgeschlossen unter Retrakten ist und \mathcal{W} das *2-von-3-Axiom* erfüllt: Sind f, g Morphismen aus \mathcal{M} und zwei aus f, g oder $g \circ f$ in \mathcal{W} , so auch der Dritte.

Damit können wir nun definieren:

Definition 1.16. Eine *Modellstruktur* auf einer Kategorie \mathcal{M} besteht aus drei Klassen $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ von Morphismen von \mathcal{M} , den schwachen Äquivalenzen \mathcal{W} , Kofaserungen \mathcal{C} und Faserungen \mathcal{F} , sodass:

- (i) \mathcal{W} erfüllt das 2-von-3-Axiom,
- (ii) $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ ist ein schwaches Faktorisierungssystem,
- (iii) $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ ist ein schwaches Faktorisierungssystem.

Weiterhin bezeichnet man die Morphismen $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ als azyklische Kofaserungen und die Morphismen $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ als azyklische Faserungen.

Definition 1.17. Eine *Modellkategorie* ist eine bivollständige Kategorie \mathcal{M} zusammen mit einer Modellstruktur auf \mathcal{M} .

Dabei ergeben sich bereits folgende anfängliche Beobachtungen.

Bemerkung 1.18. Nach der Definition eines SFS gelten:

$$\mathcal{C} = \square(\mathcal{F} \cap \mathcal{W}), \quad \mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \square\mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^\square, \quad \text{und} \quad \mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathcal{C}^\square.$$

Folglich reicht es bei der Spezifizierung einer Modellstruktur, die schwachen Äquivalenzen anzugeben und entweder nur die Faserungen oder die Kofaserungen. Weiterhin sind nach Satz 1.13 die Klassen \mathcal{C} und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ linksgesättigt und \mathcal{F} sowie $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ rechtsgesättigt.

Die schwachen Äquivalenzen lassen sich außerdem aus den azyklischen Faserungen und azyklischen Kofaserungen konstruieren:

Lemma 1.19. Für eine Modellstruktur $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ gilt

$$\mathcal{W} = (\mathcal{F} \cap \mathcal{W}) \circ (\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) = \{p \circ i \mid p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}, i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}\}.$$

Insbesondere enthält \mathcal{W} bereits alle Abbildungen, falls $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathcal{F}$ oder $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \mathcal{C}$ ist.

Beweis. „ \subseteq “: Ein Morphismus $f \in \mathcal{W}$ lässt sich als $f = p \circ i$ faktorisieren mit $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ und $i \in \mathcal{C}$. Aus dem 2-von-3-Axiom folgt dann auch $i \in \mathcal{W}$. Die Inklusion „ \supseteq “ folgt unmittelbar aus dem 2-von-3-Axiom. \square

Gelegentlich fordert man bei der Definition einer Modellstruktur noch, dass alle auftretenden Klassen abgeschlossen unter Retrakten sind, sowie dass $\mathcal{C} \boxtimes (\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ und $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}) \boxtimes \mathcal{F}$ gelten (siehe z.B. [Hov99, 1.1.3]). Die folgenden Sätze zeigen, dass dies bereits aus unseren Axiomen folgt.

Satz 1.20 ([MP12, 14.1.13]). Sei \mathcal{M} faktorisiert durch $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$. Dann ist $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ ein SFS genau dann, wenn $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{R}$ gilt und \mathcal{L} sowie \mathcal{R} abgeschlossen unter Retrakten sind.

Beweis. „ \implies “: Aus $\mathcal{L} = \boxtimes \mathcal{R}$ und $\mathcal{R} = \mathcal{L} \boxtimes$ erhält man sofort $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{R}$ und die Links- bzw. Rechtssättigung liefert den Abschluss unter Retrakten.
 „ \impliedby “: $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{R}$ impliziert $\mathcal{L} \subseteq \boxtimes \mathcal{R}$ und $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L} \boxtimes$. Sei $f \in \boxtimes \mathcal{R}$ und $f = r \circ l$ eine Faktorisierung mit $l \in \mathcal{L}$ und $r \in \mathcal{R}$. Wegen $f \boxtimes r$ ist f laut Retrakt-Argument (Lemma 1.9) ein Retrakt von l und somit nach Voraussetzung wieder in \mathcal{L} , also ist $\mathcal{L} = \boxtimes \mathcal{R}$. Genauso erhält man auch für $g \in \mathcal{L} \boxtimes$ eine Zerlegung $g = r \circ l$ und $l \boxtimes g$, also ist g ein Retrakt von r und damit wieder in \mathcal{R} . \square

Der folgende Satz geht auf [JT07, Proposition 7.8] zurück.

Satz 1.21 ([MP12, 14.2.5]). Die Klassen $\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ einer Modellstruktur bilden Unterkategorien, die alle Isomorphismen enthalten und abgeschlossen unter Retrakten sind. Insbesondere definiert \mathcal{W} eine Unterkategorie von schwachen Äquivalenzen im Sinne von Definition 1.15.

Beweis. Für $\mathcal{C}, \mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ erhält man die Aussage sofort aus der Definition eines SFS und Satz 1.13. Für \mathcal{W} liefert das 2-von-3-Axiom den Abschluss unter Komposition und \mathcal{W} enthält nach Lemma 1.19 alle Isomorphismen, da $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ sowie $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ alle Isomorphismen enthalten. Zu zeigen

bleibt also der Abschluss unter Retrakten. Sei dafür w in \mathcal{W} und ein Retrakt f gegeben:

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{k} & \bullet & \xrightarrow{\ell} & \bullet \\ \downarrow f & & \downarrow w & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{q} & \bullet & \xrightarrow{z} & \bullet \end{array}$$

Zunächst nehmen wir an, dass $f \in \mathcal{F}$ liegt. Faktorisiere $w = v \circ u$ mit $v \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ und $u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ wie in Lemma 1.19. Dann gilt $u \sqsupseteq f$, also erhält man in folgendem Diagramm einen Lift t :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\ell} & \bullet \\ \downarrow u & \nearrow t & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{z \circ v} & \bullet \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{k} & \bullet & \xrightarrow{\ell} & \bullet \\ \downarrow f & \nearrow s & \downarrow u & \nearrow t & \downarrow f \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{z} & \bullet & & \bullet \end{array},$$

wobei $s = u \circ k$. Damit folgt $t \circ s = k \circ \ell = \text{id}$, also ist f auch ein Retrakt von v und liegt damit in $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$.

Für den allgemeinen Fall sei nun f ein beliebiger Retrakt und $f = p \circ i$ eine Faktorisierung mit $p \in \mathcal{F}$ und $i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Konstruiere folgende Erweiterung des anfänglichen Diagramms:

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{k} & \bullet & \xrightarrow{\ell} & \bullet \\ \downarrow i & \nearrow r & \downarrow j & \nearrow w & \downarrow i \\ \bullet & \xrightarrow{s} & \bullet & \xrightarrow{r} & \bullet \\ \downarrow p & \nearrow \text{id} & \downarrow t & \nearrow & \downarrow p \\ \bullet & \xrightarrow{q} & \bullet & \xrightarrow{z} & \bullet \end{array},$$

wobei das linke obere Quadrat ein Pushout ist und die gestrichelten Morphismen durch die universelle Eigenschaft gegeben sind. Damit kommutieren also bereits alle Pfeile bis auf das rechte untere Quadrat. Da aber sowohl $z \circ t$ und $p \circ r$ Morphismen sind, die mit dem Kokegel definiert durch $z \circ q \circ p$ und $\ell \circ i \circ p$ kommutieren, erhält man aus der Eindeutigkeit der universellen Eigenschaft auch hier die Kommutativität. Weil j ein Pushout von $i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ ist, erhält man aus der Linkssättigung von $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ weiterhin $j \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ und nach dem 2-von-3-Axiom damit $t \in \mathcal{W}$. Nun stellt das Diagramm p als Retrakt von t dar, also liefert der erste Teil $p \in \mathcal{W}$ und damit auch $f \in \mathcal{W}$. \square

Es sei angemerkt, dass Modellkategorien als bivollständige Kategorien insbesondere ein initiales und terminales Objekt besitzen, welche wir mit \emptyset bzw. $*$ notieren. Dies ermöglicht die folgende Definition.

Definition 1.22. Ein Objekt X einer Modellkategorie \mathcal{M} nennt sich *kofasernd*, wenn der Pfeil $\emptyset \rightarrow X$ eine Kofaserung ist. Eine azyklische Faserung $q: QX \rightarrow X$ heißt *kofasernde Ersetzung* von X , wenn QX ein kofaserndes Objekt in \mathcal{M} ist.

Dual heißt X *fasernd*, wenn der Pfeil $X \rightarrow *$ eine Faserung ist. Eine azyklische Kofaserung $r: X \rightarrow RX$ heißt *fasernde Ersetzung* von X , wenn RX ein faserndes Objekt ist.

Solche Ersetzungen existieren auch stets:

Bemerkung 1.23. Anwenden einer funktoriellen Zerlegung in Kofaserung und azyklische Faserung auf $\emptyset \rightarrow X$ liefert eine kofasernde Ersetzung von X . Analog liefert eine funktorielle Zerlegung in azyklische Kofaserung und Faserung von $X \rightarrow *$ eine fasernde Ersetzung.

Die fasernden und kofasernden Objekte sind dabei für die Homotopie-theorie auf Modellkategorien besonders wichtig. So wird zum Beispiel der Begriff einer Homotopie auf einer Modellstruktur im Allgemeinen erst zu einer Äquivalenzrelation, wenn der Definitionsbereich kofasernd und der Zielbereich fasernd ist [MP12, 14.3.9 und 14.3.11].

2 Quillen-Funktoren

Im Folgenden geben wir noch eine knappe Einführung in die Morphismen von Modellkategorien. Dabei folgen wir den Definitionen von [Hov99, 1.3].

Definition 2.1. Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Modellkategorien.

1. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt *Links-Quillen-Funktor*, wenn F linksadjungiert ist und Kofaserungen sowie azyklische Kofaserungen erhält.
2. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt *Rechts-Quillen-Funktor*, wenn F rechtsadjungiert ist und Faserungen sowie azyklische Faserungen erhält.
3. Eine Adjunktion $L: \mathcal{C} \xrightleftharpoons[\perp]{} \mathcal{D} : R$ heißt *Quillen-Adjunktion*, wenn F ein Links-Quillen-Funktor ist oder äquivalent U ein Rechts-Quillen-Funktor ist.

Ein Beweis für die erwähnte Äquivalenz findet sich dabei in [Hov99, 1.3.4].

Definition 2.2. Eine Quillen-Adjunktion $L: \mathcal{C} \xrightleftharpoons[\perp]{} \mathcal{D} : R$ heißt *Quillen Äquivalenz*, wenn für alle kofasernden $X \in \mathcal{C}$ und alle fasernden $Y \in \mathcal{D}$, ein Morphismus $f: L(X) \rightarrow Y$ eine schwache Äquivalenz in \mathcal{D} ist genau dann, wenn der adjungierte Morphismus $\bar{f}: X \rightarrow R(Y)$ eine schwache Äquivalenz in \mathcal{C} ist.

Die Quillen-Adjunktionen spielen eine große Rolle für den Vergleich von Modellkategorien und insbesondere für die Homotopietheorie auf Modellkategorien. Zu jeder Modellkategorie lässt sich die zugehörige Homotopiekategorie bilden, die anschaulich durch Invertieren der schwachen Äquivalenzen entsteht. So liefert dann zum Beispiel eine Quillen-Adjunktion die Existenz von zueinander adjungierten derivierten Funktoren zwischen den Homotopiekategorien der Modellkategorien [MP12, 16.2.2]. Im Falle einer Quillen-Äquivalenz stellen diese dann sogar eine adjungierte Äquivalenz von Kategorien zwischen den Homotopiekategorien dar [MP12, 16.2.2]. Ein prominentes Beispiel ist dabei die Quillen-Äquivalenz zwischen der Kategorie der simplizialen Mengen \mathbf{sSet} und \mathbf{Top} , welche über den Singuläre-Menge-Funktor und über die geometrischen Realisierung gegeben wird [Qui67, §3]. Mit dem oben genannten Resultat erhält man also, dass sich die Homotopietheorie auf topologischen Räumen äquivalent auch kombinatorisch auf simplizialen Mengen durchführen lässt.

3 Das Kleine-Objekt-Argument

Im Allgemeinen ist es nun aber sehr schwierig die Axiome einer Modellstruktur nachzuweisen. Ziel dieses Kapitels wird es daher sein, das Kleine-Objekt-Argument einzuführen, welches unter bestimmten Umständen die Existenz eines SFS gewährleistet. Zusammen mit dem Begriff der kompakt erzeugten Modellkategorie erhält man dann vergleichsweise einfache Kriterien für den Nachweis der Axiome einer Modellkategorie.

Definition 3.1. Sei \mathcal{I} eine Klasse von Morphismen in \mathcal{M} und $X \in \mathcal{M}$ ein Objekt. Ein *relativer \mathcal{I} -Zellkomplex* unter X ist ein Morphismus $g: X \rightarrow Z$, welcher transfinite Komposition einer ω -Sequenz Z_* ist, sodass $Z_0 = X$ gilt und sodass Z_{n+1} für jedes $n < \omega$ der Pushout eines Diagramms wie folgt ist:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{q \in J} A_q & \xrightarrow{j} & Z_n \\ \prod i_q \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \coprod_{q \in J} B_q & \xrightarrow{k} & Z_{n+1} \end{array}$$

Dabei sind die i_q Abbildungen in \mathcal{I} und J eine beliebige Indexmenge. Ein Objekt $X \in \mathcal{M}$ heißt \mathcal{I} -Zellkomplex, falls ein relativer \mathcal{I} -Zellkomplex $\emptyset \rightarrow X$ existiert.

Der Begriff eines \mathcal{I} -Zellkomplexes wird in der Literatur üblicherweise allgemeiner definiert (siehe [Hov99, 2.1.9]). Dies ist der Spezialfall für die

Ordinalzahl ω , welcher auch als sequenzieller oder klassischer relative \mathcal{I} -Zellkomplex bezeichnet wird ([MP12, 15.1.2]). Der Grund für diese Einschränkung hier ist, dass man auf diese Weise mit deutlich weniger Mengenlehre auskommt, die resultierenden Sätze einfacher und ästhetischer werden und alle hier aufgeführten Beispiele bereits mit dem eingeschränkten Begriff auskommen.

Bemerkung 3.2. Für $\mathcal{I} = \{S^{n-1} \hookrightarrow D^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sind die topologischen CW-Komplexe Beispiele von \mathcal{I} -Zellkomplexen, jedoch müssen bei einem \mathcal{I} -Zellkomplex die Zellen nicht in aufsteigender Dimension angeklebt werden.

Dies motiviert auch die folgende Namensgebung:

Definition 3.3. Ein Objekt $A \in \mathcal{M}$ heißt *kompakt* bezüglich \mathcal{I} , wenn für jeden relativen \mathcal{I} -Zellkomplex $f: X \rightarrow Z = \operatorname{colim}_n Z_n$ die induzierte Abbildung

$$\operatorname{colim}_n \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(A, Z_n) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(A, Z)$$

eine Bijektion ist. Die Klasse \mathcal{I} heiße kompakt, wenn die Definitionsbereiche aller Abbildungen in \mathcal{I} kompakt bezüglich \mathcal{I} sind.

Für den Nachweis der Kompaktheit einer Klasse von Morphismen wird aber primär folgende Umformulierung verwendet.

Bemerkung 3.4. Konkret lässt sich der Kolimes auch wie folgt berechnen:

$$\operatorname{colim}_n \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(A, Z_n) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(A, Z_n) / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation $(f: A \rightarrow Z_n) \sim (g: A \rightarrow Z_m)$ für $m \geq n$, wenn $g = (A \xrightarrow{f} Z_n \rightarrow Z_m)$ gilt. Folglich ist A bereits kompakt bezüglich \mathcal{I} , wenn jeder relative \mathcal{I} -Zellkomplex $A \rightarrow \operatorname{colim}_n Z_n$ über eine Abbildung $A \rightarrow Z_n$ faktorisiert.

Mit der Definition eines „kompakten“ Objekts weichen wir hier nun ebenfalls ein wenig von der üblichen Literatur (wie [Hov99]) ab und folgen [MP12, 15.1.6]. Diese sind in gewisser Weise eine Einschränkung des Begriffs des „kleinen“ Objekts für Ordinalzahlen $\leq \omega$. Der allgemeinere Begriff des kleinen Objekts war namensgebend für das gleich folgende Kleine-Objekt-Argument. Um aber das Kleine-Objekt-Argument zu formulieren, benötigen wir noch folgende Notation.

Definition 3.5. $\mathcal{R}(\mathcal{I})$ bezeichne die Klasse der Retrakte von relativen \mathcal{I} -Zellkomplexen in \mathcal{M} .

Weiterhin wird im Beweis des Kleinen-Objekt-Arguments folgende Konstruktion von zentraler Bedeutung sein, daher stellen wir sie zur Klarheit und Referenz einmal gesondert vor:

Konstruktion 3.6 ([MP12, 15.1.10]). Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung in \mathcal{M} und S die Klasse aller kommutativen Quadrate folgender Form mit $i \in \mathcal{I}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k} & X \\ \downarrow i & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & Y. \end{array}$$

Für $s \in S$ seien $i_s: A_s \rightarrow B_s$, $k_s: A_s \rightarrow X$ und $j_s: B_s \rightarrow Y$ die entsprechenden Abbildungen aus dem Diagramm. Dann konstruiere die Ein-Schritt-Faktorisierung von f als Pushout:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{s \in S} A_s & \xrightarrow{k = \coprod_{s \in S} k_s} & X \\ \downarrow \coprod_{s \in S} i_s & \searrow r & \downarrow i \\ B_s & \xrightarrow{\ell} & Z \\ & \searrow & \downarrow p \\ & & Y \end{array}$$

$j = \coprod_{s \in S} j_s$

f

Dies liefert die Faktorisierung $f = p \circ i$, wobei i ein relativer \mathcal{I} -Zellkomplex ist. Außerdem lässt sich ℓ über $i \circ k$ und j als Lift von $(\coprod i_s, p)$ auffassen.

Nun zum zentralen Theorem, für dessen Beweis wir im Wesentlichen der Quelle [MP12, Proposition 15.1.11] folgen.

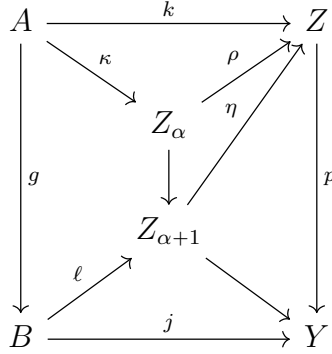
Theorem 3.7 (Kleines-Objekt-Argument). Ist \mathcal{I} eine kompakte Menge von Abbildungen in \mathcal{M} , so ist $(\mathcal{R}(\mathcal{I}), \mathcal{I}^\square)$ ein SFS.

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung in \mathcal{M} . Ziel wird es zunächst sein eine funktorielle Zerlegung $X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} Y$ zu finden, wobei i ein relativer \mathcal{I} -Zellkomplex ist und $p \in \mathcal{I}^\square$. Dazu werden wir eine ω -Sequenz Z_* von Objekten über Y konstruieren und erhalten dann $i: X \rightarrow Z$ und $p: Z \rightarrow Y$ über den Kolimes.

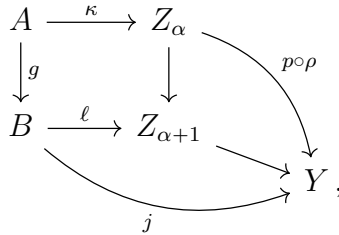
Sei $Z_0 = X$, $i_0 = \text{id}: X \rightarrow Z_0$ und $p_0 = f: Z_0 \rightarrow Y$. Nehme induktiv an, dass $i_\alpha: X \rightarrow Z_\alpha$ und $p_\alpha: Z_\alpha \rightarrow Y$ bereits konstruiert wurden mit $p_\alpha \circ i_\alpha = f$ und i_α ein relativer \mathcal{I} -Zellkomplex. Konstruiere $Z_{\alpha+1}$ sowie eine Faktorisierung $Z_\alpha \rightarrow Z_{\alpha+1} \xrightarrow{p_{\alpha+1}} Y$ von p_α über die Ein-Schritt-Faktorisierung von oben mit $f = p_\alpha$. Die Verknüpfung $X \xrightarrow{i_\alpha} Z_\alpha \rightarrow Z_{\alpha+1}$ ist wieder ein relativer \mathcal{I} -Zellkomplex und $p_{\alpha+1}$ erfüllt die Hochhebungseigenschaft, wie in der

Konstruktion erwähnt. Nun setze $Z = \text{colim}_\alpha Z_\alpha$, den Morphismus i als die transfinite Komposition von Z_* und p als die von den p_α über die universelle Eigenschaft induzierte Abbildung.

Nun ist zu zeigen, dass auch $p \in \mathcal{I}^\square$. Sei dazu also $g \in \mathcal{I}$ und über k, j ein kommutatives Diagramm gegeben:



Da \mathcal{I} kompakt ist, faktorisiert k über ein Z_α , was die Abbildungen κ und ρ liefert. Da das Diagramm mit κ, g, j und $p \circ \rho$ in dem S der Ein-Schritt-Faktorisierung liegt, erhält man daraus die Abbildung ℓ und die Kommutativität



sodass obiges Diagramm kommutiert und $\eta \circ \ell$ den gesuchten Lift liefert.

Damit $(\mathcal{R}(\mathcal{I}), \mathcal{I}^\square)$ zu einem SFS wird, muss weiterhin gezeigt werden:

$$\mathcal{R}(\mathcal{I}) = \square(\mathcal{I}^\square) \quad \text{und} \quad \mathcal{R}(\mathcal{I})^\square = \mathcal{I}^\square.$$

Sei $f \in \square(\mathcal{I}^\square)$. Die obige Faktorisierung $f = p \circ i$ mit dem Retrakt-Argument aus Lemma 1.9 liefert wegen $p \in \mathcal{I}^\square$, dass f ein Retrakt von i ist, also $f \in \mathcal{R}(\mathcal{I})$. Sei nun umgekehrt $f \in \mathcal{R}(\mathcal{I})$. Da $\mathcal{I} \subseteq \square(\mathcal{I}^\square)$ und $\square(\mathcal{I}^\square)$ linksgesättigt, also abgeschlossen unter Retrakten ist, nach Satz 1.13, folgt auch $f \in \square(\mathcal{I}^\square)$. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{I})$ impliziert $\mathcal{R}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}^\square$ und $\square(\mathcal{I}^\square) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{I})$ liefert $\mathcal{I}^\square = (\square(\mathcal{I}^\square))^\square \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{I})$.

Abschließend bleibt noch die Funktorialität zu zeigen. Sei ein kommuta-

tives Quadrat (bzw. eine Abbildung $f \rightarrow f'$) gegeben:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ r \downarrow & & \downarrow s \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y'. \end{array}$$

Konstruiere wie anfangs eine Faktorisierung $X' \xrightarrow{i'} Z' \xrightarrow{p'} Y'$. Nun per Induktion: Setze $t_0 = r$. Angenommen t_α sei bereits konstruiert, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_\alpha} & Z_\alpha & \xrightarrow{p_\alpha} & Y \\ \downarrow r & & \downarrow t_\alpha & & \downarrow s \\ X' & \xrightarrow{i'_\alpha} & Z'_\alpha & \xrightarrow{p'_\alpha} & Y'. \end{array} \quad (3.1)$$

Folgendes kommutative Quadrat ist Teil der Ein-Schritt-Zerlegung bei der Konstruktion von $Z'_{\alpha+1}$:

$$\begin{array}{ccc} Z_\alpha & \xrightarrow{t_\alpha} & Z'_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow p'_\alpha \\ Z_{\alpha+1} & \xrightarrow{s \circ p_{\alpha+1}} & Y'. \end{array}$$

Also erhält man aus dem Pushout der Konstruktion ein $t_{\alpha+1}$, welches das Quadrat (3.1) für $\alpha + 1$ kommutieren lässt. Sei $t: Z \rightarrow Z'$ die von der universellen Eigenschaft induzierten Abbildung des Kokegels $Z_\alpha \xrightarrow{t_\alpha} Z'_\alpha \rightarrow Z'$. Dann erhält man mit der Zerlegung $i = X \xrightarrow{i_\alpha} Z_\alpha \rightarrow Z$ die Kommutativität $t \circ i = i' \circ r$ und aus der Eindeutigkeit der universellen Eigenschaft auch die Gleichheit $s \circ p = p \circ t$. \square

4 Kompakt erzeugte Modellkategorien

Nun haben wir mit dem Kleinen-Objekt-Argument ein Werkzeug, um aus einer Klasse von Morphismen ein SFS zu erhalten. Damit könnte man bereits vermuten, dass sich eine Modellkategorie aus schwachen Äquivalenzen und zwei Klassen von Morphismen erzeugen lässt. Dies führt zu folgender Definition.

Definition 4.1. Eine Modellstruktur $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ auf \mathcal{M} heißt von \mathcal{I} und \mathcal{J} erzeugt, wenn $\mathcal{F} = \mathcal{J}^\square$ und $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathcal{I}^\square$. Die Klasse \mathcal{I} wird als die Klasse der

erzeugenden Kofaserungen bezeichnet und \mathcal{J} als die Klasse der *erzeugenden azyklischen Kofaserungen*. Eine Modellstruktur heißt *kompakt erzeugt*, wenn \mathcal{I} und \mathcal{J} kompakt sind.

Bemerkung 4.2. Da nach dem Beweis von Theorem 3.7 folgende Gleichungen gelten:

$$\mathcal{I}^\square = \mathcal{R}(\mathcal{I})^\square \quad \text{und} \quad \mathcal{J}^\square = \mathcal{R}(\mathcal{J})^\square,$$

lässt sich auch äquivalent formulieren, dass $\mathcal{C} = \mathcal{R}(\mathcal{I})$ und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \mathcal{R}(\mathcal{J})$ gelten sollen. Damit wird die Verbindung zum Kleinen-Objekt-Argument noch klarer.

Nun stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen an die Morphismenklassen \mathcal{I} und \mathcal{J} auch eine Modellstruktur gegeben wird, also wann die Morphismenklassen auch mit den schwachen Äquivalenzen kompatibel sind. Diese Frage beantwortet folgendes Theorem, welches für uns das primäre Mittel sein wird, um die Axiome einer Modellkategorie nachzuweisen.

Theorem 4.3 ([MP12, 15.2.3]). Sei \mathcal{M} eine bivollständige Kategorie mit einer Kategorie \mathcal{W} von schwachen Äquivalenzen (Definition 1.15) und kompakten Mengen von Abbildungen \mathcal{I} und \mathcal{J} . Die Kategorie \mathcal{M} ist eine kompakt erzeugte Modellkategorie mit erzeugenden Kofaserungen \mathcal{I} und erzeugenden azyklischen Kofaserungen \mathcal{J} genau dann, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- (i) Relative \mathcal{J} -Zellkomplexe sind schwache Äquivalenzen. (Azyklizität)
- (ii) Es gilt $\mathcal{I}^\square = \mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}$. (Kompatibilität)

Beweis. „ \implies “ : Es gilt $\mathcal{J} \subseteq \square(\mathcal{J}^\square) = \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ und $\square(\mathcal{J}^\square)$ ist linksgesättigt, ein \mathcal{J} -Zellkomplex also wieder in $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ und damit in \mathcal{W} . Für den zweiten Teil ist $\mathcal{I}^\square = \mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}$.

„ \impliedby “ : Setze $\mathcal{C} = \square(\mathcal{I}^\square)$ und $\mathcal{F} = \mathcal{J}^\square$. Zu zeigen ist dann, dass $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ und $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ schwache Faktorisierungssysteme bilden. Aus dem Kleinen-Objekt-Argument erhält man die SFS:

$$(\mathcal{C}, \mathcal{I}^\square) \quad \text{und} \quad (\mathcal{R}(\mathcal{J}), \mathcal{F}).$$

Außerdem gilt nach Voraussetzung (ii) bereits $\mathcal{I}^\square = \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, also reicht es $\mathcal{R}(\mathcal{J}) = \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ zu zeigen. Da Unterkategorien von schwachen Äquivalenzen abgeschlossen unter Retrakten sind, folgt aus (i) bereits $\mathcal{R}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{W}$. Weiterhin erhält man:

$$\mathcal{J} \subseteq \square(\mathcal{J}^\square) \subseteq \square(\mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}) \stackrel{(i)}{=} \square(\mathcal{I}^\square) = \mathcal{C},$$

also liefert die Linkssättigung von \mathcal{C} auch $\mathcal{R}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{C}$.

Nun sei $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Faktorisiere f in $f = q \circ j$ mit $q \in \mathcal{F}$ und $j \in \mathcal{R}(\mathcal{J})$. Insbesondere ist $j \in \mathcal{W}$, nach dem 2-von-3-Axiom also auch $q \in \mathcal{W}$ und damit $q \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathcal{I}^{\square}$. Wegen $f \in \mathcal{C}$ hat f damit die LHHE bezüglich q und ist nach dem Retrakt-Argument 1.9 somit ein Retrakt von j . Die Verknüpfung zweier Retrakte ist wieder ein Retrakt, also auch $f \in \mathcal{R}(\mathcal{J})$. \square

Ein leichtes Kriterium für die Azyklizität kann gelegentlich folgende Bemerkung liefern.

Bemerkung 4.4 ([MP12, S.301]). Gilt $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{W}$ und ist \mathcal{W} linksgesättigt, so liegt ein \mathcal{J} -Zellkomplex wieder in \mathcal{W} , die Azyklizität ist also erfüllt.

5 Beispiele von Modellkategorien

5.1 Topologische Räume

Bevor wir schließlich in das Beispiel der topologischen Räume einsteigen können, führen wir noch die Kategorie der kompakt erzeugten Räume ein. Als kartesisch abgeschlossene Kategorie behebt sie einige Mängel der Kategorie **Top**, stellt aber weiterhin noch eine meist hinreichend allgemeine Klasse von Räumen dar [Ste67]. Auf dieser Kategorie definieren wir dann die Modellstrukturen. Für die folgenden Definitionen folgen wir dabei der Quelle [May99, S.37].

Definition 5.1. Ein topologischer Raum X heißt *schwach Hausdorffsch*, wenn für einen kompakten Raum K und für jede Abbildung $g: K \rightarrow X$, das Bild $g(K)$ in X abgeschlossen ist.

Ein Hausdorffscher Raum ist offenbar schwach Hausdorffsch und Punkte in schwach Hausdorffschen Räumen sind abgeschlossen. Somit lässt sich diese Trennungseigenschaft zwischen T_1 und Hausdorffsch einordnen.

Definition 5.2. Ein Unterraum A von X heißt *kompakt abgeschlossen*, wenn für jeden kompakten Raum K und jede Abbildung $g: K \rightarrow X$ das Urbild $g^{-1}(A)$ abgeschlossen in K ist. Ein topologischer Raum X heißt *k-Raum*, wenn jeder kompakt abgeschlossene Unterraum abgeschlossen ist.

Falls X schwach Hausdorffsch ist, so ist A genau dann kompakt abgeschlossen, wenn der Schnitt von A mit jedem kompakten Unterraum von X abgeschlossen ist. Damit nun die Definition:

Definition 5.3. Ein topologischer Raum A heißt *kompakt erzeugt*, wenn er ein schwach Hausdorffscher k -Raum ist.

Die Kategorie der kompakt erzeugten Räume bezeichnen wir mit **CGTop**. Nun können wir mit den Beispielen beginnen.

5.1.1 Die Hurewicz-Modellstruktur

Die vielleicht offensichtlichste Modellstruktur auf **Top** wäre wohl gegeben durch die Homotopieäquivalenzen als schwache Äquivalenzen mit den (Hurewicz) Kofaserungen. Erstmals formuliert wurde sie von Hurewicz in [Hur55] und anschließend von Strøm in [Sm72] bewiesen, weswegen die Modellstruktur auch als Strøm-Modellstruktur bekannt ist.

Definition 5.4. Auf der Kategorie **CGTop** definieren wir die Hurewicz-Modellstruktur $(\mathcal{W}_h, \mathcal{C}_h, \mathcal{F}_h)$ wie folgt:

- Die schwachen Äquivalenzen \mathcal{W}_h sind die Homotopieäquivalenzen.
- Die Klasse der Kofaserungen \mathcal{C}_h besteht aus den Abbildungen, welche die Homotopieerweiterungseigenschaft besitzen. Das heißt Abbildungen, die für alle Räume B die LHHE bezüglich $p_0: B^I \rightarrow B, f \mapsto f(0)$ haben, wobei B^I mit der Kompakt-Offen-Topologie versehen wird.
- Die Klasse der Faserungen \mathcal{F}_h besteht aus den Abbildungen, welche die Homotopiehochhebungseigenschaft besitzen. Das heißt Abbildungen, die für alle Räume A die RHHE bezüglich der Inklusion $i_0: A \times \{0\} \rightarrow A \times I$ haben.

Um diese Modellstruktur von anderen zu unterscheiden verwendet man häufig auch den Präfix Hurewicz oder nur h, wie Hurewicz-Faserung oder h-Faserung. Ein Standardresultat über die h-Faserungen ist das Folgende.

Satz 5.5 ([Kam22, S.44]). Die Hurewicz-Kofaserungen in **CGTop** sind abgeschlossene Inklusionen.

Die Hurewicz-Modellstruktur ist nun jedoch nicht kompakt erzeugt (nicht einmal kofasernd erzeugt, siehe [Rap10, Rem. 4.7]), sodass sich Theorem 4.3 hier nicht anwenden lässt. Aufgrund des Umfangs geben wir für den Beweis daher an einigen Stellen nur Verweise an, führen aber Details aus, die in [MP12] nicht angegeben werden. Dazu beginnen wir mit den schwachen Äquivalenzen.

Satz 5.6. Die Klasse der schwachen Äquivalenzen \mathcal{W}_h definiert eine Unterkategorie von schwachen Äquivalenzen im Sinne von 1.15.

Beweis. Durch Übergehen zu **HoTop** ergibt sich das 2-von-3-Axiom und der Abschluss unter Retrakten zusammen mit Lemma 1.3. Identitäten sind offenbar Homotopieäquivalenzen. \square

Es bleibt also der Nachweis der Axiome der SFS. Dazu folgende Hilfslemmata.

Lemma 5.7 ([Hov99, Beweis Proposition 2.4.9]). Inklusionen von starken Deformationsretrakten sind abgeschlossen unter Pushouts.

Beweis. Für die Inklusion eines Deformationsretraktes i , sei ein Pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

gegeben, eine Retraktion $r: B \rightarrow A$, also $r \circ i = \text{id}_A$ und $K: B \times I \rightarrow B$ eine Deformationsretraktion $i \circ r \simeq_K \text{id}_B$. Wegen der Kompaktheit von I , ist auch folgendes Diagramm ein Pushout:

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{f \times \text{id}} & X \times I \\ i \times \text{id} \downarrow & & \downarrow j \times \text{id} \\ B \times I & \xrightarrow{g \times \text{id}} & Y \times I. \end{array}$$

Also liefert die universelle Eigenschaft für folgenden Kokegel eine Abbildung $H: Y \times I \rightarrow Y$ mit $H(-, 1) = \text{id}_Y$:

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{f \times \text{id}} & X \times I \\ i \times \text{id} \downarrow & & \downarrow j \times \text{id} \\ B \times I & \xrightarrow{g \times \text{id}} & Y \times I \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{pr}_1 \circ (j \times \text{id})} \\ \xrightarrow{\exists H} \\ \xrightarrow{g \circ K} \end{array} Y.$$

Falls $y \in Y$ mit $y = g(b)$ für ein $b \in B$ ist, so folgt:

$$H(y, 0) = H(g(b), 0) = (g \circ K)(b, 0) = (g \circ i \circ r)(b) = (j \circ f \circ r)(b) \in \text{im } j.$$

Folglich gilt bereits $H(y, 0) \in \text{im } j$ für alle $y \in Y$. Nun hat j auch ein Links-inverses ℓ :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{id}_X} \\ \xrightarrow{\exists \ell} \\ \xrightarrow{f \circ r} \end{array} X.$$

Somit liefert $\ell \circ H(-, 0)$ die gesuchte Retraktion und H die Deformationsretraktion $j \circ \ell \circ H(-, 0) = H(-, 0) \simeq_H \text{id}_Y$, denn es ist $H(y, 0) = j(b)$ für ein $b \in B$ und damit $(j \circ \ell \circ j)(b) = j(b) = H(y, 0)$. \square

Lemma 5.8 ([MP12, 17.1.6]). Der Pushout einer h-azyklischen h-Kofaserung ist wieder eine h-azyklische h-Kofaserung.

Beweis. Da die h-azyklischen h-Kofaserungen Inklusionen von Deformationsretrakten sind ([Kam22, Thm. 2.19]), ist der Pushout nach 5.7 wieder eine Homotopieäquivalenz. Weiterhin sind die h-Kofaserungen nach Definition von der Form $\square \mathcal{I}$ für eine Klasse von Morphismen \mathcal{I} , folglich ist \mathcal{C}_h linksgesättigt und der Pushout damit auch eine h-Kofaserung. \square

Ziel wird es sein 1.20 zu verwenden, um die Eigenschaften eines SFS zu prüfen. Ein Standardresultat der Topologie ist bereits die Zerlegung einer beliebigen stetigen Funktion f über den Abbildungszyylinder M_f

$$f = X \xrightarrow{i_f} M_f \xrightarrow{r_f} Y, \quad (5.1)$$

wobei i_f eine Kofaserung und r_f eine Homotopieäquivalenz ist. Dual existiert auch eine Faktorisierung über den Wegraum N_f [May99, 7.2, 7.3]

$$f = X \xrightarrow{\nu_f} N_f \xrightarrow{\rho_f} Y,$$

wobei ν_f eine Homotopieäquivalenz und ρ_f eine Faserung ist. Mit diesen Resultaten bleibt dann zu zeigen, dass r_f als Faserung und ν_f als Kofaserung wählbar ist. Für letztere Aussage verweisen wir dabei aber auf [MP12, 17.1.7]:

Lemma 5.9. Das Paar $(\mathcal{C}_h \cap \mathcal{W}_h, \mathcal{F}_h)$ faktorisiert **CGTop**. \square

Dies liefert uns dann die andere Faktorisierung.

Korollar 5.10 ([MP12, S.343]). **CGTop** wird durch $(\mathcal{C}_h, \mathcal{F}_h \cap \mathcal{W}_h)$ faktorisiert.

Beweis. Sei $f: X \rightarrow Y$ beliebig und $f = X \xrightarrow{i_f} M_f \xrightarrow{r_f} Y$ eine Faktorisierung wie in (5.1). Mit Lemma 5.9 erhält man eine Zerlegung $r_f = \rho \circ \nu$ mit $\rho \in \mathcal{F}_h$ und $\nu \in \mathcal{C}_h \cap \mathcal{W}_h$. Nach dem 2-von-3-Axiom gilt dann bereits $\rho \in \mathcal{F}_h \cap \mathcal{W}_h$, sodass $f = \rho \circ (\nu \circ i_f)$ die gewünschte Zerlegung liefert. \square

Weiterhin verweisen wir auf [MP12, 17.1.4] für die Hochhebungseigenschaften $(\mathcal{C}_h \cap \mathcal{W}) \square \mathcal{F}_h$ und $\mathcal{C}_h \square (\mathcal{F}_h \cap \mathcal{W})$:

Satz 5.11 ([MP12, 17.1.4]). Sei folgendes kommutative Diagramm gegeben

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow i & \nearrow \lambda & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

wobei i eine h-Kofaserung und p eine h-Faserung ist. Falls eine von i oder p eine schwache Äquivalenz ist, so existiert in dem Diagramm ein Lift λ . \square

Es fehlt dann also nur noch der Abschluss unter Retrakten.

Lemma 5.12. Die Klassen \mathcal{C}_h , $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{W}_h$, \mathcal{F}_h und $\mathcal{F}_h \cap \mathcal{W}_h$ sind abgeschlossen unter Retrakten.

Beweis. Da \mathcal{C}_h und \mathcal{F}_h nach Definition von der Form $\square\mathcal{I}$ bzw. $\mathcal{J}\square$ sind, liefert die Sättigung den Abschluss unter Retrakten für \mathcal{C}_h und \mathcal{F}_h . Zusammen mit 5.6 folgt also die Behauptung. \square

Dies vervollständigt somit:

Theorem 5.13 ([MP12, 17.1.1]). Die Unterkategorien $(\mathcal{W}_h, \mathcal{C}_h, \mathcal{F}_h)$ definieren eine Modellstruktur auf **CGTop**. \square

5.1.2 Die Quillen-Modellstruktur

Die Quillen-Modellstruktur, erstmals eingeführt in [Qui67], war die erste und ist weiterhin die am meisten genutzte Modellstruktur auf **Top** [nLa23b]. Die schwachen Äquivalenzen dieser Modellstruktur werden durch folgende Abbildungen gegeben:

Definition 5.14. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *schwache Homotopieäquivalenz*, wenn $\pi_n(f, x): \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ für alle $x \in X$ und $n \geq 0$ ein Isomorphismus ist.

Lemma 5.15 ([MP12, 17.2.1]). Die Klasse der schwachen Homotopieäquivalenzen \mathcal{W}_q definiert eine Unterkategorie, welche das 2-von-3-Axiom erfüllt und abgeschlossen unter Retrakten ist.

Beweis. Dazu zeige zunächst das 2-von-3-Axiom. Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Abbildungen und $h = g \circ f$. Wegen der Funktorialität von π_n erhält man für $n \geq 0$ und $x \in X$:

$$\pi_n(h, x) = \pi_n(g, f(x)) \circ \pi_n(f, x)$$

Die Fälle, in denen g und f oder g und h schwache Äquivalenzen sind, folgen also sofort. Sind jedoch f und h schwache Äquivalenzen, so liefert

$$\pi_n(h, x) \circ (\pi_n(f, x))^{-1} = \pi_n(g, f(x))$$

nur für $y \in \text{im } f$, dass $\pi_n(g, y)$ ein Isomorphismus ist. Nun ist aber $\pi_0(f)$ bijektiv, also gibt es für $y \in Y$ beliebig ein $x \in X$, sodass $f(x)$ auf die gleiche Wegzusammenhangskomponente wie y abgebildet wird und damit einen Weg γ von y nach $f(x)$. Konjugation mit γ , bzw. $g \circ \gamma$ liefert dann vertikale Isomorphismen und ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi_*(Y, y) & \xrightarrow{\pi_*(g, y)} & \pi_*(Z, g(y)) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \pi_*(Y, f(x)) & \xrightarrow[\cong]{\pi_*(g, f(x))} & \pi_*(Z, g(f(x))) \end{array}$$

(vgl. [May99, 9.5]), sodass auch $\pi_*(g, y)$ ein Isomorphismus ist.

Ist f ein Retrakt von g , so ist nach der Funktorialität $\pi_*(f)$ auch ein Retrakt von $\pi_*(g)$. Lemma 1.3 liefert schließlich also auch den Abschluss unter Retrakten. \square

Die Faserungen und Kofaserungen sind wie folgt gegeben.

Definition 5.16. (i) Sei \mathcal{I} die Menge aller Inklusionen $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ für $n \geq 0$. Dann definiere die Faserungen \mathcal{F}_q als die Abbildungen \mathcal{I}^{\square} . Die Faserungen werden auch als Serre-Faserungen bezeichnet.

(ii) Sei \mathcal{J} die Menge aller Inklusionen $i_0: D^n \rightarrow D^n \times I, x \mapsto (x, 0)$. Definiere die Kofaserungen \mathcal{C}_q als die Abbildungen $\square(\mathcal{J}^{\square})$. Man bezeichnet sie auch als q -Kofaserungen.

Wie man bereits erkennen kann, läuft dies auf eine kompakt erzeugte Modellstruktur hinaus. Das Vorgehen wird nun also sein in mehreren Schritten auf die Bedingungen aus Satz 4.3 hinzuarbeiten. Dazu beginnen wir mit folgendem Lemma.

Lemma 5.17. Sei X der Kolimes eines Diagramms $X_*: \omega \rightarrow \mathbf{CGTop}$ von Inklusionen. Dann faktorisiert für einen kompakten Raum K jede Abbildung $K \rightarrow X$ über ein X_d für $d < \omega$.

Beweis. Angenommen $f: K \rightarrow X$ faktorisiere über kein X_d , dann gibt es eine streng monoton steigende Folge von Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$ mit $J_i := f(K) \cap (X_{n_i} \setminus X_{n_i-1}) \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Nun wähle für jedes i einen Punkt $x_i \in J_i$

und setze $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, dann hat A unendliche Kardinalität. Weiterhin sind Punkte in kompakt erzeugten Räumen abgeschlossen, also ist $B \cap X_n$ für jeden Teilraum $B \subseteq A$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen in X_n . Da X die Finaltopologie trägt, ist B somit abgeschlossen in X . Insbesondere ist A abgeschlossen in X und trägt die diskrete Topologie. Als abgeschlossener Teilraum des kompakten Raumes $f(K)$ ist A damit aber auch kompakt, jedoch kann eine unendliche Menge mit diskreter Topologie nicht kompakt sein. \square

Somit folgt:

Korollar 5.18. Die Klassen \mathcal{I} und \mathcal{J} sind kompakt.

Beweis. Die Inklusionen $S^n \hookrightarrow D^n$ und $D^n \times \{0\} \rightarrow D^n \times I$ sind Hurewicz-Kofaserungen, der Pushout ist also wieder eine Hurewicz-Kofaserung und damit eine abgeschlossene Inklusion. Zusammen mit 5.17 folgt dann die Behauptung. \square

Das Kleine-Objekt-Argument liefert uns somit bereits SFS $(\mathcal{R}(\mathcal{I}), \mathcal{I}^{\square})$ und $(\mathcal{R}(\mathcal{J}), \mathcal{J}^{\square})$. Nun können wir die Azyklizität aus Theorem 4.3 nachweisen. Dazu folgen wir dem Ansatz aus [MP12, 17.2.2], beweisen aber nur den hierfür notwendigen Spezialfall für schwache Homotopieäquivalenzen.

Satz 5.19. Jeder relative \mathcal{J} -Zellkomplex ist eine schwache Äquivalenz.

Beweis. Sei $i: X_0 \rightarrow X = \operatorname{colim} X_q$ ein relativer \mathcal{J} -Zellkomplex. Eine Abbildung $X_q \rightarrow X_{q+1}$ des Kolimes ist der Pushout eines Diagramms wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{n \in I} D^n & \longrightarrow & X_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{n \in I} (D^n \times I) & \longrightarrow & X_{q+1} \end{array}$$

Nach Lemma 5.7 ist $X_q \rightarrow X_{q+1}$ damit ebenfalls die Inklusion eines Deformationsretraktes und damit eine Homotopieäquivalenz. Weiterhin gibt es für eine Folge von Inklusionen von punktierten Räumen $X_i \rightarrow X_{i+1}$ nach [May99, S.65] einen natürlichen Isomorphismus $\pi_n(X) \xrightarrow{\cong} \operatorname{colim}_i \pi_n(X_i)$. Da nun das Diagramm $\pi_n(X_*)$ nur aus Isomorphismen besteht, lässt sich der Kolimes $\operatorname{colim}_i \pi_n(X_i)$ als $\pi_n(X_1)$ berechnen mit $\pi_n(X_1) \rightarrow \operatorname{colim}_i \pi_n(X_i)$ gegeben durch die Identität. Mit der Natürlichkeit erhält man somit, dass auch $\pi_n(i)$ ein Isomorphismus ist und i damit eine schwache Äquivalenz. \square

Abschließend die Kompatibilität:

Lemma 5.20 ([MP12, 17.2.2]). Es gilt $\mathcal{I}^\square = \mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}_q$.

Beweis. „ $\mathcal{I}^\square \subseteq \mathcal{J}^\square$ “ : Da die Abbildungen in \mathcal{J} relative CW-Komplexe sind, folgt bereits $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{I})$ und damit $\mathcal{I}^\square = \mathcal{R}(\mathcal{I})^\square \subseteq \mathcal{J}^\square$.

„ $\mathcal{I}^\square \subseteq \mathcal{W}_q$ “ : Die Inklusion eines Basispunkts $* \hookrightarrow S^n$ ist ein relativer CW-Komplex, sowie die Inklusion der Grundflächen in den reduzierten Zylinder:

$$S^n \vee S^n \hookrightarrow S^n \wedge I_+ = S^n \times I / \{*\} \times I,$$

liegen damit also ebenfalls in $\mathcal{R}(\mathcal{I})$. Angenommen $p: (E, x) \rightarrow (B, p(x))$ liegt in $\mathcal{I}^\square = \mathcal{R}(\mathcal{I})^\square$. Sei $\gamma: (S^n, *) \rightarrow (B, p(x))$ eine Schleife, dann erhält man durch Liften bezüglich $* \rightarrow S^n$:

$$\begin{array}{ccc} * \xrightarrow{* \mapsto x} E & & 0 \longrightarrow \pi_n(E, x) \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow \pi_n(p) \\ S^n \xrightarrow{\gamma} B & & \mathbb{Z} \xrightarrow{1 \mapsto [\gamma]} \pi_n(B, p(x)), \end{array} \rightsquigarrow$$

die Abbildung $\pi_n(p, x)$ also surjektiv. Nun sei angenommen, dass γ_1 und γ_2 zwei Schleifen $\gamma_1, \gamma_2: (S^n, *) \rightarrow (E, x)$ mit $\pi_n(p)(\gamma_1) = \pi_n(p)(\gamma_2)$ sind. Es gibt also eine Homotopie $H: S^n \wedge I_+ \rightarrow (B, p(x))$ und nach Voraussetzung ein Lift in folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} S^n \vee S^n & \xrightarrow{\gamma_1 \vee \gamma_2} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists H' & \downarrow p \\ S^n \wedge I_+ & \xrightarrow{H} & B. \end{array}$$

Somit ist $\gamma_1 \simeq_{H'} \gamma_2$ und $\pi_n(p, x)$ damit auch injektiv, also $p \in \mathcal{W}_q$.

„ $\mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}_q \subseteq \mathcal{I}^\square$ “ : Nun sei $p: E \rightarrow B$ in $\mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}_q$. Zu lösen gilt folgendes Hochhebeproblem:

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{g} & E \\ q \downarrow & \nearrow \exists \lambda & \downarrow p \\ D^n & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Dazu betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{i_0} & S^{n-1} \times I & \xleftarrow{i_1} & S^{n-1} \\ \downarrow q & & \downarrow \iota & & \downarrow q \\ & \nearrow h & & \searrow j & \\ & B & & E & \\ \downarrow q & \nearrow f & & \searrow g & \\ D^n & \xrightarrow{i_0} & D^n \times I & \xleftarrow{i_1} & D^n. \\ & & \downarrow \nu & & \\ & & \tilde{h} & & \tilde{g} \end{array}$$

Wobei j die konstante Homotopie ist: $j(x, t) = g(x)$ und $h = p \circ j$. Da p eine schwache Äquivalenz ist, existieren nach [May99, S.68] Abbildungen \tilde{g} und \tilde{h} wie eingezeichnet, sodass das Diagramm mit den durchgezogenen und gestrichelten Linien kommutiert. Da weiterhin das Paar $(D^n \times I, D^n \times \{0\})$ homöomorph zu $(D^n \times I, D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I)$ ist, erhält man einen Lift:

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I & \xrightarrow{\tilde{g} \cup j} & E \\ i_1 \cup \iota \downarrow & \nearrow \nu & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{\tilde{h}} & B, \end{array}$$

sodass $p \circ \nu = \tilde{h}$, $\nu \circ i_1 = \tilde{g}$ und $\nu \circ \iota = j$. Den gesuchten Lift im Hochhebe-
problem liefert dann $\lambda = \nu \circ i_0$, denn:

$$\begin{aligned} p \circ \lambda &= p \circ \nu \circ i_0 = \tilde{h} \circ i_0 = f \\ \lambda \circ q &= \nu \circ i_0 \circ q = \nu \circ \iota \circ i_0 = j \circ i_0 = j \circ i_1 = g. \end{aligned} \quad \square$$

Dies vervollständigt den Beweis von:

Theorem 5.21. Die Kategorie **CGTop** zusammen mit $(\mathcal{W}_q, \mathcal{C}_q, \mathcal{F}_q)$ ist eine kompakt erzeugte Modellkategorie mit erzeugenden Kofaserungen \mathcal{I} und erzeugenden azyklischen Kofaserungen \mathcal{J} . \square

5.2 Kettenkomplexe

Sei R ein fixierter kommutativer Ring und \mathbf{Ch}_R die Kategorie der Kettenkomplexe von R -Moduln. \mathbf{Ch}_R ist lokal klein und bivollständig, da Limiten und Kolimiten gradweise berechnet werden [MP12, S.372]. Ziel wird es nun sein, den topologischen Beweis der Quillen-Modellstruktur hier auf algebraischer Ebene nachzuahmen. Dazu definieren wir folgende Analoga zu den topologischen Objekten.

- Definition 5.22.** (a) Sei S^n der Kettenkomplex mit \mathbb{Z} im Grad n und 0 sonst.
- (b) Sei D^{n+1} der Kettenkomplex mit \mathbb{Z} in Graden $n+1$ und n und Randabbildung $d_{n+1} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Für einen Ring R schreibe $S_R^n = R \otimes S^n$ und $D_R^n = R \otimes D^n$.
- (c) Sei I der Kettenkomplex mit \mathbb{Z} in Grad 1 und \mathbb{Z}^2 in Grad 0. Die Randabbildung in Grad 1 ist gegeben durch $d_1 = \text{id} \times (-\text{id})$. Die Basis in Grad 1 wird mit $[I]$ bezeichnet und die Basen in Grad 0 mit $[0]$ und $[1]$.

Wir identifizieren die \mathbb{Z} Kopie von D^{n+1} im Grad n mit S^n und erhalten so eine Inklusion $S^n \hookrightarrow D^{n+1}$. Auf diese Weise lässt sich S^n dann auch als Rand von D^n auffassen.

Weiterhin ist für ein Kettenkomplex X das Tensorprodukt $X \otimes I$ im Grad n gegeben durch $(X \otimes I)_n = X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1}$. Somit definieren wir die Inklusionen i_0 und i_1 über $i_0(x) = (x, 0, 0)$ und $i_1(x) = (0, x, 0)$.

Außerdem sei noch angemerkt, dass sich der Pushout zweier Abbildungen $f: A \rightarrow X$ und $g: A \rightarrow Y$ in der Kategorie \mathbf{Ch}_R über den Differenzkern $(X \oplus Y)/\text{im}(f - g)$ berechnen lässt [MP12, S.374].

Bemerkung 5.23. Mit dieser Notation lässt sich sich eine Kettenhomotopie zwischen zwei Abbildungen $e, f: X \rightarrow Y$ auch als eine Kettenabbildung $h: X \otimes I \rightarrow Y$ definieren, welche eingeschränkt auf $X \otimes [0]$ mit e übereinstimmt und eingeschränkt auf $X \otimes [1]$ mit f ([MP12, S.374]). Definiert man dann $\pi_n(X)$ als Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $S^n \rightarrow X$, so erhält man $\pi_n(X) = H_n(X)$ ([MP12, S.373]). Damit wird der Vergleich zu der q-Modellstruktur auf \mathbf{CGTop} noch deutlicher.

Nun können wir genauso wie in 5.16 die Modellstruktur formulieren.

Definition 5.24. Auf der Kategorie \mathbf{Ch}_R definieren wir die Quillen-Modellstruktur (oder auch projektive Modellstruktur) $(\mathcal{W}_q, \mathcal{C}_q, \mathcal{F}_q)$ wie folgt:

- Die schwachen Äquivalenzen \mathcal{W}_q sind die Quasiisomorphismen, also Kettenabbildungen f , sodass f für alle $n \in \mathbb{Z}$ in n -ter Homologie ein Isomorphismus ist.
- Sei \mathcal{I} die Menge aller Inklusionen $S_R^{n-1} \hookrightarrow D_R^n$. Die q-Kofaserungen \mathcal{C}_q sind die Abbildungen $\square(\mathcal{I}^\square)$.
- Sei \mathcal{J} die Menge aller Inklusionen $i_0: D_R^n \rightarrow D_R^n \otimes I$. Die q-Faserungen \mathcal{F}_q sind die Abbildungen \mathcal{J}^\square .

Für den Nachweis der Axiome fangen wir wieder mit den schwachen Äquivalenzen an.

Satz 5.25. Die schwachen Äquivalenzen \mathcal{W}_q definieren eine Unterkategorie von schwachen Äquivalenzen im Sinne von Definition 1.15.

Beweis. Nach Lemma 1.3 ist \mathcal{W}_q abgeschlossen unter Retrakten und erfüllt offenbar das 2-von-3-Axiom. \square

Folgendes Lemma zeigt, dass sich \mathcal{J} auch anders wählen lässt, wie es z.B. auch in [Hov99, 2.3.3] gemacht wird.

Lemma 5.26 ([MP12, 18.4.3]). Eine Abbildung p ist eine Faserung genau dann, wenn sie die RHHE bezüglich allen Abbildungen $0 \rightarrow D_R^n$ hat.

Beweis. Die Inklusion $i_0: D_R^n \rightarrow D_R^n \otimes I$ ist offenbar isomorph zur direkten Summe von $\text{id}: D_R^n \rightarrow D_R^n$, $0 \rightarrow D_R^n$ und $0 \rightarrow D_R^{n+1}$. Da jede Abbildung die RHHE bezüglich der Identität hat, folgt somit die Aussage. \square

Damit lassen sich die q-Faserungen dann bereits konkreter klassifizieren.

Satz 5.27 ([Hov99, 2.3.4]). Eine Abbildung $p: E \rightarrow B$ ist genau dann eine Faserung, wenn sie surjektiv in jedem Grad ist. Insbesondere ist jeder Kettenkomplex fasernd.

Beweis. Nach vorherigem Lemma ist p genau dann eine Faserung, wenn in einem Diagramm folgender Form stets ein Lift h existiert:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ D_R^n & \longrightarrow & B. \end{array}$$

Nun entspricht die Wahl eines kommutativen Diagramms der Wahl einer Abbildung $R \rightarrow B_n$ und damit einem Element $b \in B_n$. Ein Lift entspricht einem Urbild $e \in p_n^{-1}(b)$, da h durch die Setzung $h_{n-1} = d_n \circ h_n$ für die Randabbildung d_* von E zu einer Kettenabbildung wird. \square

Analog zu dem im topologischen Fall verwendeten Lemma aus [May99, S. 68], wollen wir hier nun auch ohne Beweis folgendes Lemma aus [MP12, 18.4.5] verwenden:

Lemma 5.28. Sei $e: Y \rightarrow Z$ eine Abbildung in \mathbf{Ch}_R . Dann gilt: Die in Homologie induzierte Abbildung $H_*(e)$ ist ein Monomorphismus in Grad $n-1$ und ein Epimorphismus in Grad n genau dann, wenn es für Abbildungen f, g und h wie in folgendem Diagramm Abbildungen \tilde{g} und \tilde{h} existieren, sodass das gesamte Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} S_R^{n-1} & \xrightarrow{i_0} & S_R^{n-1} \otimes I & \xleftarrow{i_1} & S_R^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \nearrow f & Z & \xleftarrow{e} & Y \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ D_R^n & \xrightarrow{i_0} & D_R^n \otimes I & \xleftarrow{i_1} & D_R^n. \end{array}$$

\square

Um Missverständnisse zu vermeiden, bezeichnen wir für einen \mathcal{I} -Zellkomplex X die durch den Zellkomplex gegebene Filtrierung mit $F_q X$ und den q -ten Modul des Kettenkomplexes mit X_q .

Nun können wir anfangen in Richtung von Theorem 4.3 hinzuarbeiten.

Lemma 5.29. Sei X ein Kettenkomplex, sodass $X_n = 0$ für fast alle n und jedes X_n frei vom endlichen Rang ist. Dann ist X kompakt bezüglich allen Inklusionen.

Beweis. Sei $X \rightarrow Z = \operatorname{colim}_q F_q Z$ ein relativer Zellkomplex. Da Pushouts von Inklusionen wieder Inklusionen sind [Hov99, 2.3.13], setzt sich Z im Grad n als Vereinigung der $(F_q Z)_n$ für $q \in \mathbb{N}$ zusammen. Somit gibt es für jedes Basiselement x aus X_n ein $q \in \mathbb{N}$ mit $x \in (F_q Z)_n$. Nun wähle das Maximum q_0 all dieser q in jedem Grad, um eine Faktorisierung $X \rightarrow F_{q_0} Z$ zu erhalten. \square

Korollar 5.30. \mathcal{I} und \mathcal{J} sind kompakt. \square

Nach dem Kleinen-Objekt-Argument gibt es also schwache Faktorisierungssysteme $(\mathcal{R}(\mathcal{I}), \mathcal{I}^\square)$ und $(\mathcal{R}(\mathcal{J}), \mathcal{J}^\square)$. Für die Azyklizität verweisen wir auf [MP12, Beweis 18.4.2]. Der Beweis verläuft wie im topologischen Fall, indem algebraische Äquivalente zu den in Satz 5.19 genutzten Lemmata verwendet werden.

Lemma 5.31 ([MP12, 18.4.2]). Jeder relative \mathcal{J} -Zellkomplex ist eine schwache Äquivalenz. \square

Abschließend zeigen wir die Kompatibilität:

Lemma 5.32 ([MP12, S.415]). Es gilt $\mathcal{I}^\square = \mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}_q$.

Beweis. Die Abbildungen in \mathcal{J} sind \mathcal{I} -Zellkomplexe, da ein Pushout entlang $S_R^{n-1} \hookrightarrow D_R^n$ eine R -Komponente im Grad n hinzufügt. Folglich gilt $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{I})$ und damit $\mathcal{J}^\square \supseteq \mathcal{R}(\mathcal{I})^\square = \mathcal{I}^\square$. Für $\mathcal{I}^\square \subseteq \mathcal{W}_q$ betrachte die Inklusion $0 \rightarrow S_R^n$ und die direkte Summe $i_0 + i_1: S_R^n \oplus S_R^n \rightarrow S_R^n \otimes I$. Beide Abbildungen sind aus gleichem Grund relative \mathcal{I} -Zellkomplexe und liegen somit in $\mathcal{R}(\mathcal{I})$. Ist daher $(p: E \rightarrow B) \in \mathcal{I}^\square = \mathcal{R}(\mathcal{I})^\square$, so zeigt Liften bezüglich $0 \rightarrow S_R^n$, dass $H_n(p)$ surjektiv ist:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow p \\ S_R^n & \xrightarrow{1 \mapsto b} & B \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & H_n(E) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow H_n(p) \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_n(B). \end{array}$$

Für $x, y \in E_n$ sind $p(x)$ und $p(y)$ genau dann homolog, wenn es eine Abbildung $s: S_R^n \otimes I \rightarrow B$ gibt mit $s(1 \otimes [0]) = p(x)$ und $s(1 \otimes [1]) = p(y)$

(vgl. Bemerkung 5.23). Seien also $x, y \in E_n$ mit $H_n(p)([e]) = H_n(p)([f])$ und s wie oben angegeben. Definiere $t: S_R^n \oplus S_R^n \rightarrow E$ durch $t(1, 0) = x$ und $t(0, 1) = y$. Dann liefert Liften bezüglich $S_R^n \oplus S_R^n \rightarrow S_R^n \otimes I$ eine Abbildung $h: S_R^n \otimes I \rightarrow E$ mit $h(1 \otimes [0]) = x$ und $h(1 \otimes [1]) = y$:

$$\begin{array}{ccc} S_R^n \oplus S_R^n & \xrightarrow{t} & E \\ i_0 + i_1 \downarrow & \nearrow \exists h & \downarrow p \\ S_R^n \otimes I & \xrightarrow{s} & B. \end{array}$$

Folglich sind auch x und y homolog, also $[x] = [y]$ in $H_n(E)$ und $H_n(p)$ damit auch injektiv.

Nun sei umgekehrt $p: E \rightarrow B$ in $\mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}_q$ und folgendes Hochhebeproblem gegeben:

$$\begin{array}{ccc} S_R^{n-1} & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \lambda & \downarrow p \\ D_R^n & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Konstruiere damit den durchgezogenen Teil des folgenden Diagramms. Dabei sei h die Komposition von f und der Abbildung $S_R^{n-1} \otimes I \rightarrow D_R^n$, welche $1 \otimes [I]$ auf 0 schickt und sowohl $1 \otimes [0]$ als auch $1 \otimes [1]$ auf 1.

$$\begin{array}{ccccc} S_R^{n-1} & \xrightarrow{i_0} & S_R^{n-1} \otimes I & \xleftarrow{i_1} & S_R^{n-1} \\ \downarrow q & & \downarrow \iota & & \downarrow q \\ & \nearrow h & & \searrow j & \\ & B & & E & \\ \downarrow q & \nearrow f & & \nwarrow p & \\ D_R^n & \xrightarrow{i_0} & D_R^n \otimes I & \xleftarrow{i_1} & D^n \\ & & \downarrow \nu & & \\ & & & & \downarrow \tilde{g} \end{array}$$

Da $H_n(p)$ ein Isomorphismus ist, existieren nach 5.28 die gestrichelten Abbildungen \tilde{h} und \tilde{g} , sodass das Diagramm zusammen mit den durchgezogenen Linien kommutiert. Da $p \in \mathcal{J}^\square$, hat p die RHHE bezüglich $i_0: D_R^n \rightarrow D_R^n \otimes I$ und somit auch bezüglich i_1 . Man erhält also einen Lift ν mit $p \circ \nu = \tilde{h}$ und $\nu \circ i_1 = \tilde{g}$. Die Komposition $\lambda = \nu \circ i_0$ liefert dann wie im topologischen Fall den gesuchten Lift des Hochhebeproblems. \square

Dies vervollständigt den Beweis von:

Theorem 5.33. Die Unterkategorien $(\mathcal{W}_q, \mathcal{C}_q, \mathcal{F}_q)$ definieren eine kompakt erzeugte Modellstruktur auf \mathbf{Ch}_R mit erzeugenden Kofaserungen \mathcal{I} und erzeugenden azyklischen Kofaserungen \mathcal{J} . \square

In Proposition 5.27 haben wir gezeigt, dass die Faserungen genau die gradweisen Surjektionen (die Epimorphismen) sind. Ähnlich wollen wir abschließend noch, zwei Sätze vorstellen, welche die Kofaserungen konkreter klassifizieren.

Satz 5.34 ([MP12, 18.5.2]). (i) $0 \rightarrow C$ ist genau dann eine azyklische Kofaserung, wenn C ein projektives Objekt von \mathbf{Ch}_R ist.

(ii) Falls C kofasernd ist, so ist C gradweise projektiv.

(iii) Ist C von unten beschränkt und gradweise projektiv, so ist C eine Kofaserung.

Satz 5.35 ([MP12, 18.5.3]). Eine Abbildung $i: A \rightarrow X$ ist genau dann eine Kofaserung, wenn sie gradweise split-injektiv ist und $\text{coker } i$ kofasernd ist.

Bemerkung 5.36. Mit 5.34 und 5.27 erhält man, dass für einen R -Modul M eine kofasernde Ersetzung von S_M^0 gerade eine projektive Auflösung von M ist.

Dual zur projektiven Modellstruktur gibt es auf \mathbf{Ch}_R auch folgende häufig genutzte Modellstruktur.

Theorem 5.37 ([MP12, 18.5.4]). Es gibt auf \mathbf{Ch}_R eine injektive Modellstruktur $(\mathcal{W}_q, \mathcal{C}_i, \mathcal{F}_i)$, wobei die Kofaserungen \mathcal{C}_i die Monomorphismen sind und \mathcal{F}_i über $(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{W}_q)^\square$ gegeben ist. Konkreter sind die Faserungen auch die gradweisen split-Epimorphismen mit i -faserndem Kern. Weiterhin gelten folgende Eigenschaften:

(i) $D \rightarrow 0$ ist genau dann eine azyklische i -Faserung, wenn D ein injektives Objekt in \mathbf{Ch}_R ist.

(ii) Falls D ein i -fasernder Kettenkomplex ist, so ist D gradweise injektiv.

(iii) Falls D von oben beschränkt ist und gradweise injektiv ist, dann ist D ein i -fasernder Kettenkomplex.

Außerdem definiert der Identitätsfunktork eine Quillen-Äquivalenz zwischen der q -Modellstruktur und der i -Modellstruktur auf \mathbf{Ch}_R .

Hier sind die fasernden Ersetzungen entsprechend dann auch die injektiven Auflösungen.

5.3 Klassifikation der Modellstrukturen auf Mengen

Ziel dieses Abschnitts wird es sein, alle Modellstrukturen auf der Kategorie **Set** zu klassifizieren. Dazu zunächst die Beobachtung, dass sich die (azyklischen) Faserungen einer Modellkategorie auch wie folgt berechnen lassen:

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathcal{C}^\square = \bigcap_{f \in \mathcal{C}} \{f\}^\square \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = (\mathcal{W} \cap \mathcal{C})^\square = \bigcap_{f \in (\mathcal{W} \cap \mathcal{C})} \{f\}^\square.$$

Das Vorgehen wird nun also sein, alle Klassen der Form $\{f\}^\square$ zu bestimmen und dann beliebige Schnitte dieser zu bilden, um mögliche Wahlen (azyklischer) Faserungen einzuschränken. Mit Bemerkung 1.18 und zusammen mit Lemma 1.19 lassen sich dann daraus die zugehörigen Kofaserungen und schwachen Äquivalenzen konstruieren, sodass man danach einzeln prüfen kann, ob diese eine Modellstruktur bilden. Die Mengenklammern lassen wir nun im Folgenden auch weg: $\{f\}^\square = f^\square$.

Um die Klassen f^\square ausrechnen zu können, benötigen wir zunächst Kriterien dafür, wann ein Hochhebeprobem lösbar ist. Dabei gehen wir ähnlich vor wie in [Cam]. Sei also ein Hochhebeprobem in **Set** gegeben:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho} & X \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\pi} & Y. \end{array}$$

Die Abbildung f gibt eine disjunkte Zerlegung von A in (möglicherweise leere) Fasern $f^{-1}(b)$ für $b \in B$ an und g gibt analog eine Zerlegung von X an. Damit nun ein Lift existieren kann, muss ρ jede nicht-leere Faser von f zu einem Punkt kollabieren und π darf nur auf Punkte mit nicht-leerer Faser bezüglich g abbilden. Diese Kriterien sind auch bereits hinreichend, wie folgendes Lemma zeigt:

Lemma 5.38. Ein Hochhebeprobem in **Set** ist genau dann lösbar, wenn:

1. ρ kollabiert jede nicht-leere Faser von f zu einem Punkt und
2. Jeder Punkt in $\text{im}(\pi)$ hat nicht-leere Faser bezüglich g .

Beweis. Es fehlt nur noch die Rückrichtung. Setze $h(b) = \rho(f^{-1}(b))$ für $b \in \text{im}(f)$ und $h(b) = y$ für ein $y \in g^{-1}(\pi(b))$ sonst. Dann ist h wohldefiniert und nach Konstruktion $h \circ f = \rho$. Weiterhin gilt im 1. Fall:

$$(g \circ h)(b) = g(\rho(f^{-1}(b))) = \pi(f(f^{-1}(b))) = \pi(b)$$

und damit in beiden Fällen auch $g \circ h = \pi$. □

Nun ist das Ziel alle Paare von Abbildungen $f: A \rightarrow B$ und $g: X \rightarrow Y$ zu bestimmen, sodass jedes kommutative Quadrat einen Lift besitzt. Dazu ist es leichter zunächst mit der Negation anzufangen.

Lemma 5.39. Eine Abbildung f hat **nicht** die LHHE bezüglich g genau dann, wenn

- f und g besitzen eine Faser mit mindestens zwei Punkten
oder
- f und g haben eine leere Faser **und** ($A = \emptyset \vee X \neq \emptyset$)

Beweis. „ \Leftarrow “ : 1. Fall: Da alle Definitions- und Zielbereiche ungleich der leeren Menge sind, existieren Abbildungen π und ρ , sodass obiges Viereck kommutiert. Wähle $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ mit $f(a_1) = f(a_2) =: b$ und $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ mit $g(x_1) = g(x_2) =: y$, dann setze $\rho(a_1) = x_1, \rho(a_2) = x_2$ und $\pi(b) = y$, um ein kommutatives Viereck zu erhalten, welches die erste Bedingung aus Lemma 5.38 verletzt.

2. Fall: Da $A = \emptyset \vee X \neq \emptyset$ und g eine Faser besitzt, also $Y \neq \emptyset$ ist, existiert ein kommutatives Viereck wie oben. Sei $b \in B$ mit $f^{-1}(b) = \emptyset$ und $y \in Y$ mit $g^{-1}(y) = \emptyset$, dann kommutiert das Quadrat für beliebige Wahlen von $\pi(b)$. Insbesondere für $\pi(b) = y$, was jedoch die zweite Bedingung aus Lemma 5.38 verletzt.

„ \Rightarrow “ : Sei ein kommutatives Viereck gegeben, sodass kein Lift existiert, also eine der Bedingungen aus Lemma 5.38 verletzt wird.

1. Fall: Es existieren $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ mit $f(a_1) = f(a_2)$, aber $\rho(a_1) \neq \rho(a_2)$. Da das Quadrat kommutiert, muss $g(\rho(a_1)) = g(\rho(a_2))$ gelten, also besitzen f und g eine Faser mit mind. 2 Punkten.

2. Fall: Es gibt $b \in B \neq \emptyset$ mit $g^{-1}(\pi(b)) = \emptyset$. Dann folgt auch $f^{-1}(b) = \emptyset$, da das Quadrat ansonsten nicht kommutieren könnte. Also haben f und g eine leere Faser. Die Existenz einer Abbildung $A \rightarrow X$ liefert schließlich noch $A = \emptyset$ oder $X \neq \emptyset$. \square

Durch Negation erhält man nun, da $\emptyset \rightarrow Y$ injektiv ist:

Satz 5.40. f hat die LHHE bezüglich g genau dann, wenn:

- $A \neq \emptyset = X$
oder
- Unter f und g ist mind. eine Abbildung injektiv und eine surjektiv. \square

Damit lassen sich nun alle möglichen (azyklischen) Faserungen bestimmen. Seien dazu alle, bij, inj und surj die Klassen aller Abbildungen, der

Bijektionen, Injektionen bzw. Surjektionen. Es sei inj_\emptyset die Klasse aller Abbildungen (Injektionen) von einer leeren Menge in eine beliebige andere Menge und der Index „ $\neq \emptyset$ “ stehe für Abbildungen mit Definitionsbereich ungleich der leeren Menge. Wie in [Cam] kommt man dann auf folgende Klassen:

Lemma 5.41. Für eine Abbildung f treten folgende Klassen von f^\square und $\square(f^\square)$ auf:

1. Fall: f ist eine Bijektion: $f^\square = \text{alle}$ und $\square(f^\square) = \text{bij}$.
2. Fall: f ist eine nicht-surjektive Injektion:
 - (a) Fall $A = \emptyset$: $f^\square = \text{surj}$ und $\square(f^\square) = \text{inj}$.
 - (b) Fall $A \neq \emptyset$: $f^\square = \text{surj} \cup \text{inj}_\emptyset$ und $\square(f^\square) = \text{inj}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_\emptyset\}$.
3. Fall: f ist eine nicht-injektive Surjektion: $f^\square = \text{inj}$ und $\square(f^\square) = \text{surj}$.
4. Fall: f ist weder surjektiv noch injektiv: $f^\square = \text{bij} \cup \text{inj}_\emptyset$ und $\square(f^\square) = \text{alle}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_\emptyset\}$.

Beweis. Anwenden von Satz 5.40. □

Fasst man nun die alle oben aufgetretenen f^\square zu einer Klasse zusammen, so fehlt nur noch bij , sodass die Klasse abgeschlossen unter Schnittbildung wird. Mit der anfänglichen Bemerkung wurde also gezeigt:

Lemma 5.42. Ist \mathcal{F} die Klasse der (azyklischen) Faserungen einer Modellstruktur auf **Set**, so folgt:

$$\mathcal{F} \in \Gamma := \{\text{bij}, \text{bij} \cup \text{inj}_\emptyset, \text{surj}, \text{inj}, \text{surj} \cup \text{inj}_\emptyset, \text{alle}\}. \quad \square$$

Bemerkung 5.43. Für eine weder surjektive noch injektive Abbildung f und $\mathcal{I} = \{f, \emptyset \rightarrow \{*\}\}$ ist $\mathcal{I}^\square = (\text{bij} \cup \text{inj}_\emptyset) \cap \text{surj} = \text{bij}$. Somit ist jedes \mathcal{F} bzw. $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ in Γ von der Form \mathcal{I}^\square für eine Klasse von Abbildungen \mathcal{I} . Außerdem lassen sich die Abbildungen in \mathcal{I} mit endlichem Definitionsbereich wählen, sodass die \mathcal{I} kompakt sind und folglich jede Modellstruktur auf **Set** kompakt erzeugt ist.

Nun untersuchen wir zunächst alle Modellstrukturen mit $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathcal{F}$. Laut der Bemerkung aus Lemma 1.19 sind in diesem Fall alle Möglichkeiten bereits wie folgt gegeben:

Lemma 5.44. Zu jeder Wahl von $\mathcal{F} \in \Gamma$ wird wie folgt eine kompakt erzeugte Modellstruktur auf **Set** gegeben:

$$(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F}) = (\text{alle}, \square\mathcal{F}, \mathcal{F}).$$

Beweis. $\mathcal{W} = \text{alle}$ definiert offenbar eine Unterkategorie von schwachen Äquivalenzen. Wähle \mathcal{J} kompakt mit $\mathcal{J}^\square = \mathcal{F}$ und setze $\mathcal{I} = \mathcal{J}$. Dann werden die Bedingungen aus Theorem 4.3 trivialerweise erfüllt. \square

Damit sind also bereits 6 verschiedene Modellstrukturen auf **Set** gegeben. Nun betrachten wir alle Möglichkeiten mit $\mathcal{F} \cap \mathcal{W} \subsetneq \mathcal{F}$ aus Γ und prüfen, ob das zugehörige \mathcal{W} gegeben durch $\mathcal{W} = (\mathcal{F} \cap \mathcal{W}) \circ (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})$ das 2-von-3-Axiom erfüllen würde:

	$\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$	\mathcal{C}	\mathcal{F}	$\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$	\mathcal{W}	2-von-3
1	bij	alle	alle	bij	bij	✓
2	bij	alle	inj	surj	surj	×
3	bij	alle	bij \cup inj $_{\emptyset}$	alle $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	alle $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	✓
4	bij	alle	surj	inj	inj	×
5	bij	alle	surj \cup inj $_{\emptyset}$	inj $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	inj $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	×
6	inj	surj	alle	bij	bij	✓
7	surj	inj	surj \cup inj $_{\emptyset}$	inj $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	alle $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	✓
8	surj	inj	alle	bij	surj	×
9	surj \cup inj $_{\emptyset}$	inj $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	alle	bij	surj \cup inj $_{\emptyset}$	×
10	bij \cup inj $_{\emptyset}$	alle $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	inj	surj	surj \cup inj $_{\emptyset}$	×
11	bij \cup inj $_{\emptyset}$	alle $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	surj \cup inj $_{\emptyset}$	inj $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	inj $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	×
12	bij \cup inj $_{\emptyset}$	alle $_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$	alle	bij	bij \cup inj $_{\emptyset}$	×

Die Zeile 6 fällt dabei aber bereits weg, da der Schnitt von \mathcal{F} mit \mathcal{W} nicht mit der Wahl von $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ übereinstimmt. Nun bleibt zu prüfen, ob die übrigen drei Möglichkeiten tatsächlich eine Modellstruktur bilden. Dabei weichen wir wieder von [Cam] ab und verwenden stattdessen die Mittel der kompakt erzeugten Modellstrukturen. Dazu folgendes Lemma:

Lemma 5.45. Die Klassen bij und $\text{alle}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$ definieren Unterkategorien von schwachen Äquivalenzen.

Beweis. Offenbar enthalten sie alle Identitäten, also bleibt es zu zeigen, dass sie abgeschlossen unter Retrakten sind. Sei ein Retrakt gegeben mit $g \in \mathcal{W}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 B & \longrightarrow & D & \longrightarrow & B.
 \end{array}$$

1. Fall: $\mathcal{W} = \text{bij}$: Folgt sofort aus 1.3.
2. Fall $\mathcal{W} = \text{alle}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_{\emptyset}\}$: Falls $B \neq \emptyset$ ist, so folgt auch $D \neq \emptyset$ und damit $A \neq \emptyset$, also $f \in \mathcal{W}$. Falls $B = \emptyset$ ist, folgt bereits $D = C = A = \emptyset$, also $f = \text{id}_{\emptyset} \in \mathcal{W}$. \square

Nun können wir Theorem 4.3 anwenden.

Lemma 5.46. Die drei übrigen Möglichkeiten definieren eine kompakt erzeugte Modellstruktur auf **Set**.

Beweis. Sei \mathcal{I} in den jeweiligen Fällen kompakt gewählt mit $\mathcal{I}^\square = \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Der Reihe nach die Zeilen (1), (3) und (7):

- (1) Azyklizität: Nach Lemma 5.41 gibt es eine Abbildung f mit $\text{bij} = \square(f^\square)$, die Klasse bij also linksgesättigt. Nun wähle für die erzeugenden azyklischen Kofaserung $\mathcal{J} = \{f\}$, wobei f eine Bijektion ist mit endlichem Definitionsbereich. Damit habe $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{W}$, also folgt die Azyklizität aus Bemerkung 4.4. Kompatibilität:

$$\mathcal{I}^\square = \text{bij} = \text{alle} \cap \text{bij} = \mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}.$$

- (3) Azyklizität: Genauso wie im vorherigen Fall ist $\mathcal{W} = \text{alle}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_\emptyset\}$ linksgesättigt. Für die erzeugenden azyklischen Kofaserungen wähle $\mathcal{J} = \{f\}$ mit f weder surjektiv noch injektiv und mit endlichem Definitionsbereich. Die Azyklizität folgt damit wieder aus Bemerkung 4.4. Kompatibilität:

$$\mathcal{I}^\square = \text{bij} = (\text{bij} \cup \text{inj}_\emptyset) \cap (\text{alle}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_\emptyset\}) = \mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}.$$

- (7) Azyklizität: Die schwachen Äquivalenzen sind wie in (2), also ebenfalls linksgesättigt. Sei $f: A \rightarrow B$ eine nicht-surjektive Injektion mit $A \neq \emptyset$ und endlich. Wähle $\mathcal{J} = \{f\}$, um die Azyklizität wieder aus 4.4 zu erhalten. Kompatibilität:

$$\mathcal{I}^\square = \text{surj} = (\text{surj} \cup \text{inj}_\emptyset) \cap (\text{alle}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_\emptyset\}) = \mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}. \quad \square$$

Somit wurde gezeigt:

Theorem 5.47. Alle möglichen Modellstrukturen auf **Set** sind gegeben durch:

Kofaserungen	Faserungen	schwache Äquivalenzen
alle	bij	alle
$\text{alle}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_\emptyset\}$	$\text{bij} \cup \text{inj}_\emptyset$	alle
inj	surj	alle
surj	inj	alle
$\text{inj}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_\emptyset\}$	$\text{surj} \cup \text{inj}_\emptyset$	alle
bij	alle	alle
alle	alle	bij
alle	$\text{bij} \cup \text{inj}_\emptyset$	$\text{alle}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_\emptyset\}$
inj	$\text{surj} \cup \text{inj}_\emptyset$	$\text{alle}_{\neq \emptyset} \cup \{\text{id}_\emptyset\}$

□

Literatur

- [Cam] Omar Antolin Camarena, *The nine model category structures on the category of sets*, <https://www.matem.unam.mx/~omar/notes/modelcatsets.html>, Abgerufen am: 20.06.2023.
- [Hov99] Mark Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR 1650134
- [Hur55] Witold Hurewicz, *On the concept of fiber space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **41** (1955), 956–961. MR 73987
- [JT07] André Joyal and Myles Tierney, *Quasi-categories vs Segal spaces*, Categories in algebra, geometry and mathematical physics, Contemp. Math., vol. 431, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 277–326. MR 2342834
- [Kam22] Holger Kammeyer, *Introduction to algebraic topology*, Compact Textbooks in Mathematics, Birkhäuser/Springer, Cham, [2022] ©2022. MR 4461044
- [Mar58] A. Markov, *The insolubility of the problem of homeomorphy*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **121** (1958), 218–220. MR 97793
- [May99] J. P. May, *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999. MR 1702278
- [MP12] J. P. May and K. Ponto, *More concise algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2012, Localization, completion, and model categories. MR 2884233
- [nLa23a] nLab authors, *lift*, <https://ncatlab.org/nlab/show/lift>, September 2023, Revision 37.
- [nLa23b] ———, *model structure on topological spaces*, <https://ncatlab.org/nlab/show/model+structure+on+topological+spaces>, September 2023, Revision 37.
- [Qui67] Daniel G. Quillen, *Homotopical algebra.*, Springer-Verlag, Berlin-New York,, 1967. MR 223432
- [Rap10] George Raptis, *Homotopy theory of posets*, Homology Homotopy Appl. **12** (2010), no. 2, 211–230. MR 2721035

- [Sm72] Arne Strøm, *The homotopy category is a homotopy category*, Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 435–441. MR 321082
- [Ste67] N. E. Steenrod, *A convenient category of topological spaces*, Michigan Math. J. **14** (1967), 133–152. MR 210075

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Bachelorarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Düsseldorf, den 15. September 2023

Daniel Dratschuk