

Satake- und Vogan-Diagramme einfacher reeller Lie-Algebren

Bachelorarbeit

Vorgelegt von

Marek Kasper

aus Hilden

Angefertigt am
Mathematischen Institut
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

22. Mai 2025

Betreuer: Prof. Dr. Holger Kammeyer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
1 Grundlagen	3
2 Wurzelsysteme und Klassifikation von komplexen einfachen Lie-Algebren	10
3 Cartan-Zerlegungen und Cartan-Unteralgebren reeller halbeinfacher Lie-Algebren	20
4 Satake-Diagramme	27
5 Vogan-Diagramme	30
6 Gegenüberstellung der Ansätze	32
Stichwortverzeichnis	37
Literatur	38
Erklärung	39

Einleitung

Zur Klassifikation reeller einfacher Lie-Algebren haben sich zwei Ansätze als besonders hilfreich etabliert: *Satake-Diagramme* und *Vogan-Diagramme*. Beide Ansätze reduzieren das Problem auf die Klassifikation reeller Formen von komplexen einfachen Lie-Algebren, welche bis auf Isomorphie eineindeutig ihren *Dynkin-Diagrammen* zugeordnet werden. Ziel dieser Arbeit ist, beide Ansätze zur Klassifikation reeller Formen komplexer einfacher Lie-Algebren vorzustellen, dabei Gemeinsamkeiten und Unterschiede herauszuarbeiten, und schließlich die Zuordnung von Satake- bzw. Vogan-Diagrammen zu den entsprechenden Lie-Algebren in einer Tabelle gegenüberzustellen.

Hierzu werden zunächst die Grundlagen der Strukturtheorie von Lie-Algebren vorgestellt und mittels des Konzepts der *Komplexifizierung* reeller Lie-Algebren das Problem auf die Klassifikation *reeller Formen* komplexer einfacher Lie-Algebren reduziert.

Mithilfe von *Wurzelsystemen* als Teilmenge einer *Cartan-Unteralgebra* und den zugehörigen *Dynkin-Diagrammen* wird dann ein Überblick über die Klassifikation komplexer einfacher Lie-Algebren, mit den entsprechenden *Isomorphie-* und *Existenzsätzen*, gegeben.

Für die Klassifikation der reellen Formen spielt eine *Cartan-Zerlegung* als Zerlegung in Eigenräume einer *Cartan-Involution* eine entscheidende Rolle: Damit lassen sich die Begriffe einer *maximal kompakten* bzw. *maximal nicht-kompakten* Cartan-Unteralgebra definieren, wobei erstere für die Konstruktion von *Vogan-Diagrammen*, zweitere für die Konstruktion von *Satake-Diagrammen* verwendet werden, die jeweils aus den Dynkin-Diagrammen der Komplexifizierung der entsprechenden Cartan-Unteralgebra gewonnen werden. Die möglichen Satake- und Vogan-Diagramme werden schließlich in einer systematischen Übersicht den entsprechenden reellen einfachen Lie-Algebren zugeordnet.

1 Grundlagen

Dieses Kapitel orientiert sich an den Darstellungen von Humphreys [Hum78, §1-5] und Knapp [Kna96b, I].

Definition 1.1. Sei K ein Körper. Eine **Lie-Algebra** ist ein endlich-dimensionaler¹ K -Vektorraum \mathfrak{g} mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ (der **Lie-Klammer**), sodass für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$ gilt:

1. $[x, x] = 0$
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (**Jacobi-Identität**)

Eine **Lie-Unteralgebra** ist ein Untervektorraum, der abgeschlossen unter der Lie-Klammer ist.

Für Teilmengen $U, V \subset \mathfrak{g}$ setze

$$[U, V] := \text{span}\{[x, y] \mid x \in U, y \in V\}.$$

Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt **abelsch**, falls $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Ein **Ideal** \mathfrak{a} ist ein Untervektorraum von \mathfrak{g} , sodass $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.

Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt **einfach**, falls \mathfrak{g} nicht abelsch ist, und 0 und \mathfrak{g} die einzigen Ideale in \mathfrak{g} sind.

Für eine Lie-Algebra \mathfrak{g} , eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ und eine Teilmenge $A \subset \mathfrak{g}$ ist der **Normalisator**

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{h}}(A) := \{x \in \mathfrak{h} \mid [\{x\}, A] \subset A\}$$

und der **Zentralisator**

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{h}}(A) := \{x \in \mathfrak{h} \mid [\{x\}, A] = 0\}.$$

Das **Zentrum** von \mathfrak{g} ist $Z(\mathfrak{g}) := \mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$.

Eine K -lineare Abbildung $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ zwischen Lie-Algebren heißt **Lie-Algebren-Homomorphismus**, falls für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Eine **Darstellung** einer Lie-Algebra \mathfrak{g} ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ für einen K -Vektorraum V .

Ein Unterraum $U \subset V$ heißt **invariant** unter φ , falls für alle $x \in \mathfrak{g}, v \in U$ gilt $(\varphi(x))(v) \in U$.

¹Eine Lie-Algebra kann allgemein auch unendlich-dimensional sein. In dieser Arbeit werden aber nur endlich-dimensionale Lie-Algebren betrachtet.

Eine Darstellung φ heißt **irreduzibel**, falls V genau zwei invariante Unterräume besitzt.

Eine Darstellung φ heißt **vollständig reduzibel**, falls V in eine direkte Summe invarianter irreduzibler Unterräume zerfällt.

Beispiel 1.2.

- Für einen K -Vektorraum V ist $\mathfrak{gl}(V) := \text{End}(V)$ mit $[f, g] := f \circ g - g \circ f$ eine Lie-Algebra.
- Der Unterraum $\mathfrak{sl}(V) := \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{Tr } f = 0\}$ ist eine Untereralgebra und ein Ideal in $\mathfrak{gl}(V)$.²
- Ideale $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ sind Untereralgebren, denn $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.
- Normalisatoren und Zentralisatoren sind wegen der Jacobi-Identität Untereralgebren, Zentren sind Ideale.
- Für $x, y \in \mathfrak{g}$ sei $\text{ad } x$ definiert durch $\text{ad } x(y) := [x, y]$. Der Homomorphismus

$$\begin{aligned} \text{ad}: \quad \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ x &\longmapsto \text{ad } x \end{aligned}$$

ist die **adjungierte Darstellung**.³

Definition 1.3. Für eine Lie-Algebra \mathfrak{g} sind die **absteigende Zentralreihe** $\mathcal{C}^n \mathfrak{g}$ und die **derivierte Reihe** $\mathcal{D}^n \mathfrak{g}$ definiert durch

- $\mathcal{C}^0 \mathfrak{g} := \mathcal{D}^0 \mathfrak{g} := \mathfrak{g}$
- $\mathcal{C}^{n+1} \mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^n \mathfrak{g}]$
- $\mathcal{D}^{n+1} \mathfrak{g} := [\mathcal{D}^n \mathfrak{g}, \mathcal{D}^n \mathfrak{g}]$

²Denn für $f, g \in \mathfrak{gl}(V)$ ist

$$\text{Tr}([f, g]) = \text{Tr}(f \circ g - g \circ f) = \text{Tr}(f \circ g) - \text{Tr}(g \circ f) = \text{Tr}(f \circ g) - \text{Tr}(f \circ g) = 0.$$

³Das ist tatsächlich eine Darstellung: Für $x, y, z \in \mathfrak{g}$ ist

$$\begin{aligned} [\text{ad } x, \text{ad } y](z) &= \text{ad } x(\text{ad } y(z)) - \text{ad } y(\text{ad } x(z)) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] = -[z, [x, y]] = [[x, y], z] \\ &= \text{ad}[x, y](z) \end{aligned}$$

Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt

- **nilpotent**, falls es $N \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $\mathcal{C}^N \mathfrak{g} = 0$.
Ein Element $x \in \mathfrak{g}$ heißt **ad-nilpotent**, falls $\text{ad } x \in \text{End}(\mathfrak{g})$ nilpotent ist.
- **auflösbar**, falls es $N \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $\mathcal{D}^N \mathfrak{g} = 0$.
- **halbeinfach**, falls $0 \trianglelefteq \mathfrak{g}$ das einzige auflösbare Ideal in \mathfrak{g} ist.

Satz 1.4 (Satz von Engel). *Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} ist genau dann nilpotent, wenn jedes Element $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent ist.*

Zum Beweis siehe [Hum78, §3.3].

Definition 1.5. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über einen Körper K und $L \supset K$ eine Körpererweiterung. Das Tensorprodukt $\mathfrak{g} \otimes_K L$ lässt sich auffassen als L -Vektorraum⁴ und die K -bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g} \otimes_K L) \times (\mathfrak{g} \otimes_K L) &\longrightarrow \mathfrak{g} \otimes_K L \\ (x \otimes a, y \otimes b) &\longmapsto [x, y] \otimes (a \cdot b) \end{aligned}$$

ist auch L -bilinear und induziert auf $\mathfrak{g}^L := \mathfrak{g} \otimes_K L$ die Struktur einer Lie-Algebra über L , wie man auf einem Erzeugendensystem nachrechnet.

Sei \mathfrak{g} umgekehrt eine Lie-Algebra über dem Erweiterungskörper $L \supset K$ und $\dim_K L < \infty$. Dann lässt sich \mathfrak{g} auch als endlich-dimensionaler K -Vektorraum auffassen und die Lie-Klammer induziert die Struktur einer Lie-Algebra über K auf $\mathfrak{g}^K := \mathfrak{g}$.

Im Fall $K = \mathbb{R}, L = \mathbb{C}$ heißt $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ die **Komplexifizierung** der reellen Lie-Algebra \mathfrak{g} und es ist $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$.

Gilt allgemein für eine komplexe Lie-Algebra \mathfrak{g} und eine reelle Lie-Algebra \mathfrak{h} , dass $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{h} \oplus i\mathfrak{h}$, heißt \mathfrak{h} **reelle Form** von \mathfrak{g} . Der Homomorphismus $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, der auf \mathfrak{h} als id operiert und auf $i\mathfrak{h}$ als $-\text{id}$ operiert, ist eine Involution (also ein Isomorphismus) und heißt **Konjugation** von \mathfrak{g} über \mathfrak{h} .

Proposition 1.6. *Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über K und $L \supset K$ eine Körpererweiterung. Identifiziere \mathfrak{g} mit der Teilmenge $\mathfrak{g} \otimes 1 \subset \mathfrak{g}^L$. Dann ist*

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^L = [\mathfrak{g}^L, \mathfrak{g}^L].$$

Beweis.

Sei $[x, y] \otimes a \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^L$. Dann ist $[x, y] \otimes a = [x \otimes a, y \otimes 1] \in [\mathfrak{g}^L, \mathfrak{g}^L]$.

Sei $[x \otimes a, y \otimes b] \in [\mathfrak{g}^L, \mathfrak{g}^L]$. Dann ist $[x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^L$. \square

⁴Für $x \otimes a \in \mathfrak{g} \otimes_K L$ und $b \in L$ setze $(x \otimes a) \cdot b := x \otimes (a \cdot b)$.

Definition 1.7. Die **Killingform** auf einer Lie-Algebra \mathfrak{g} ist die symmetrische bilineare Abbildung

$$B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$$

$$(x, y) \longmapsto \text{Tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y)$$

Proposition 1.8. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über K , sei $L \supset K$ eine Körpererweiterung, B die Killingform auf \mathfrak{g} und B^L die Killingform auf \mathfrak{g}^L . Identifiziere \mathfrak{g} mit $\mathfrak{g} \otimes 1 \subset \mathfrak{g}^L$. Dann ist $B = B^L|_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}}$.

Beweis. Wähle eine Basis $(v_i)_i$ von \mathfrak{g} . Dann ist $(v_i \otimes 1)_i$ eine Basis von \mathfrak{g}^L . Dann werden $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x$ und $\text{ad}_{\mathfrak{g}^L}(x \otimes 1)$ für $x \in \mathfrak{g}$ durch die gleiche Matrix dargestellt. \square

Satz 1.9 (Satz von Lie). Sei \mathfrak{g} eine auflösbare Lie-Algebra über einen Körper $K \subset \mathbb{C}$ mit einem Zwischenkörper $K \subset L \subset \mathbb{C}$, sei zudem $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler L -Vektorraum und $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung. Enthält L alle Eigenwerte aller Elemente in $\varphi(\mathfrak{g})$, existiert eine Basis von V , zu der alle Elemente in $\varphi(\mathfrak{g})$ durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt sind.

Beweisskizze (Beweis in [Kna96b, §1.5]).

1. Unter obigen Voraussetzungen existiert ein gemeinsamer Eigenvektor der Elemente von $\varphi(\mathfrak{g})$: Induktion über $\dim \mathfrak{g}$ (klar für $\dim \mathfrak{g} = 1$).

Wähle ein Ideal $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ mit Kodimension 1, einen gemeinsamen Eigenvektor e aller Elemente in \mathfrak{h} , wähle zudem $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, sodass $\varphi(h)(e) = \lambda(h)(e)$ für alle $h \in \mathfrak{h}$ und ein Element $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$. Sei $E \subset V$ der von den $(\varphi(x))^k(e)$ aufgespannte $\varphi(x)$ -invariante Unterraum. Dann gilt $\varphi(h)(v) = \lambda(h)(v)$ für alle $h \in \mathfrak{h}, v \in E$:

Zur Basis $\varphi(x)^0 e, \varphi(x)^1 e, \dots$ dargestellt ist $\varphi(h)|_E$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $\lambda(h)$. Wegen $[h, x] \in \mathfrak{h}$ folgt

$$\lambda([h, x]) \cdot \dim E = \text{Tr } \varphi([h, x]) = 0$$

und induktiv $\varphi(h)(\varphi(x))^k e = \lambda(h)(\varphi(x))^k e$.

Wähle einen Eigenvektor $v \in E$ von $\varphi(x)$ als gemeinsamen Eigenvektor der Elemente von $\varphi(\mathfrak{g})$.

2. Es existiert eine vollständige Fahne $V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_m = 0$, sodass alle V_i invariant unter $\varphi(\mathfrak{g})$ sind und $\dim V_i - \dim V_{i+1} = 1$: Induktion über $\dim V$ (klar für $\dim V = 1$).

Wähle einen gemeinsamen Eigenvektor v und eine vollständige Fahne zu der von φ induzierten Darstellung auf V/Kv . Konstruiere daraus eine vollständige Fahne in V .

Satz 1.10 (Cartan-Kriterien für Auflösbarkeit und Halbeinfachheit).

Sei $K \subset L \subset \mathbb{C}$ ein Körper, \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über K und B die Killingform auf \mathfrak{g} . Dann ist \mathfrak{g} genau dann auflösbar, wenn

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \text{Rad } B := \{x \in \mathfrak{g} \mid B(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in \mathfrak{g}\}.$$

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. \mathfrak{g} ist halbeinfach
2. \mathfrak{g}^L ist halbeinfach
3. B ist nicht ausgeartet, also $0 = \text{Rad } B$ (Cartan-Kriterium für Halbeinfachheit)
4. Es gibt bis auf Reihenfolge eindeutige einfache Ideale $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n \trianglelefteq \mathfrak{g}$, sodass $\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$

Beweisskizze (Beweis in [Kna96b, §1.7]).

1. Auflösbarkeit: Nach 1.6 ist \mathfrak{g} genau dann auflösbar, wenn $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ auflösbar ist. Mit Proposition 1.8 folgt, dass $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \text{Rad } B$ genau dann, wenn $[\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}] \subset \text{Rad } B^{\mathbb{C}}$. Sei also oBdA $K = \mathbb{C}$.

„ \Rightarrow “ ist der Satz von Lie 1.9 angewendet auf die Darstellung ad .

„ \Leftarrow “ Sei $x = \sum [x_i, z_i] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit der Jordan-Chevalley-Zerlegung $\text{ad } x = s + n$ in $\text{End}_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die Eigenwerte von s mit Eigenräumen V_1, \dots, V_m . Es operiere $\bar{s} \in \text{End}_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ auf V_i als $\bar{\lambda}_i$. Es folgt $\text{Tr}(\bar{s} \text{ad } x) > 0$, falls $s \neq 0$.

Ferner ist $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(\text{ad } x) = \text{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} s + \text{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} n$ die Jordan-Chevalley-Zerlegung von $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(\text{ad } x)$ und die Eigenwerte von $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} s$ sind die $\lambda_i - \lambda_j$.

Nun ist $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} \bar{s} = r(\text{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(\text{ad } x))$ für ein Polynom r mit $r(0) = 0$, und somit $\text{Tr}(\bar{s} \text{ad } x)$ Summe von Termen der Form $B([y_1, y_2], y_3)$, also 0. Es folgt $s = 0$, also $\text{ad } x$ nilpotent. Nach dem Satz von Engel 1.4 ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent, also \mathfrak{g} auflösbar.

2. Halbeinfachheit:

- „(1) \Rightarrow (3)“: Angenommen, $\text{Rad } B \neq 0$. Man zeige, dass das Ideal $\text{Rad } B \trianglelefteq \mathfrak{g}$ auflösbar ist:

Sei $B_{\text{Rad } B}$ die Killingform auf $\text{Rad } B$. Es ist

$$B_{\text{Rad } B} = B|_{\text{Rad } B \times \text{Rad } B} = 0,$$

also nach dem Cartan-Kriterium für Auflösbarkeit ist $\text{Rad } B$ auflösbar. Also ist \mathfrak{g} nicht halbeinfach.

- „(3) \Rightarrow (1)“: Sei $\text{Rad } B = 0$, $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ abelsch. Es genügt zu zeigen $\mathfrak{a} \subset \text{Rad } B$.
Mit $x \in \mathfrak{a}, y, z \in \mathfrak{g}$ folgt $(\text{ad } x \circ \text{ad } y)^2(z) = 0$, also ist $\text{ad } x \text{ ad } y$ nilpotent, also $\text{Tr}(\text{ad } x \text{ ad } y) = 0$, also $x \in \text{Rad } B$.
- „(1) \Leftrightarrow (2)“: Sei B^L die Killingform auf \mathfrak{g}^L . Nach 1.8 ist B^L genau dann ausgeartet, wenn B ausgeartet ist.
- „(1) \Rightarrow (4)“: Für ein minimales Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ bilde das orthogonale Komplement $\mathfrak{a}^\perp := \{x \in \mathfrak{g} \mid B(x, \mathfrak{a}) = \{0\}\}$ und erhalte $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ und $\mathfrak{a}^\perp \trianglelefteq \mathfrak{g}$ halbeinfach. \mathfrak{a} ist einfach, weil jedes Ideal in \mathfrak{a} auch Ideal in \mathfrak{g} ist. Wiederhole die Konstruktion mit \mathfrak{a}^\perp .
Zur Eindeutigkeit erhalte für ein einfaches Ideal $\mathfrak{a} = \bigoplus_i [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_i]$,
wovon nur ein Summand nichttrivial sein kann.
- „(4) \Rightarrow (1)“: Gibt es eine solche Zerlegung, ist B eine orthogonale Summe nicht ausgearteter Formen, also nicht ausgeartet.

Satz 1.11. *Sei \mathfrak{g} eine reelle einfache Lie-Algebra. Dann gilt*

1. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a}^{\mathbb{R}}$ für eine komplexe einfache Lie-Algebra \mathfrak{a} ; oder
2. $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist eine komplexe einfache Lie-Algebra.

Beweis [Kna96b, Thm. 6.94]. Angenommen, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist nicht einfach, es existiert also ein nicht-triviales Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Sei σ die Konjugation von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ über \mathfrak{g} . Dann sind $\mathfrak{a} \cap \sigma(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{a} + \sigma(\mathfrak{a})$ Ideale in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, die σ -invariant sind, also Komplexifizierungen von Idealen in \mathfrak{g} . Da \mathfrak{g} einfach ist, gilt daher $\mathfrak{a} \cap \sigma(\mathfrak{a}) = 0$ (wegen $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$) und $\mathfrak{a} + \sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ (wegen $\mathfrak{a} \neq 0$). Also folgt $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{a})$. Sei nun φ die Einbettung $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ gefolgt von der Projektion auf \mathfrak{a} . Damit ist φ ein Homomorphismus reeller Lie-Algebren, und da \mathfrak{g} einfach ist, ist $\ker \varphi = 0$ oder $\ker \varphi = \mathfrak{g}$.

Ist $\ker \varphi = \mathfrak{g}$ folgt daher $\mathfrak{g} \subset \sigma(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{g} = \sigma(\mathfrak{g}) \subset \sigma(\sigma(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a} \cap \sigma(\mathfrak{a}) = 0$ und \mathfrak{g} ist nicht einfach, Widerspruch.

Also ist $\ker \varphi = 0$, und φ injektiv. Aus Dimensionsgründen folgt somit $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a}^{\mathbb{R}}$. Dann ist \mathfrak{a} einfach, da jedes Ideal in \mathfrak{a} auch ein Ideal in \mathfrak{g} ist. \square

Bemerkung. Damit ist gezeigt, dass es zur Klassifikation reeller einfacher Lie-Algebren reicht, die komplexen einfachen Lie-Algebren und ihre reellen Formen zu klassifizieren.

Beispiel 1.12. Für $n, m \in \mathbb{N}$ seien $I_{m,n}, J_{n,n}$ die Blockmatrizen

$$I_{m,n} = \left(\begin{array}{c|c} \text{id}_m & 0 \\ \hline 0 & \text{id}_n \end{array} \right) \text{ und } J_{n,n} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \text{id}_n \\ \hline \text{id}_n & 0 \end{array} \right).$$

Knapp [Kna96b, §1.8] zeigt, dass die folgenden Lie-Algebren, die sogenannten **klassischen Matrixalgebren** über \mathbb{R} halbeinfach sind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{Tr } x = 0\} & (n \geq 2) \\ \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{Tr } x = 0\} & (n \geq 2) \\ \mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) \mid \text{Re Tr } x = 0\} & (n \geq 1) \\ \mathfrak{so}(n) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid x^T + x = 0\} & (n \geq 2) \\ \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid x^T + x = 0\} & (n \geq 2) \\ \mathfrak{so}(m, n) &= \{x \in \mathfrak{gl}(m+n, \mathbb{R}) \mid x^T \cdot I_{m,n} + I_{m,n}x = 0\} & (m+n \geq 3) \\ \mathfrak{so}^*(2n) &= \left\{ x \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} x^T I_{n,n} J_{n,n} + I_{n,n} J_{n,n} x = 0 \\ \text{und } \bar{x}^T I_{n,n} + I_{n,n} x = 0 \end{array} \right\} & (n \geq 2) \\ \mathfrak{su}(n) &= \{x \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid \bar{x}^T + x = 0\} & (n \geq 2) \\ \mathfrak{su}(m, n) &= \{x \in \mathfrak{sl}(m+n, \mathbb{C}) \mid \bar{x}^T I_{m,n} + I_{m,n}x = 0\} & (m+n \geq 2) \\ \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) &= \{x \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) \mid x^T J_{n,n} + J_{n,n}x = 0\} & (n \geq 1) \\ \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) &= \{x \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid x^T J_{n,n} + J_{n,n}x = 0\} & (n \geq 1) \\ \mathfrak{sp}(2n) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) \mid \bar{x}^T + x = 0\} & (n \geq 1) \\ \mathfrak{sp}(2m, 2n) &= \{x \in \mathfrak{gl}(m+n, \mathbb{H}) \mid \bar{x}^T I_{m,n} + I_{m,n}x = 0\} & (m+n \geq 1) \end{aligned}$$

Es wird sich durch die Klassifikation herausstellen, dass es sich bei fast allen dieser Lie-Algebren tatsächlich um einfache Lie-Algebren handelt. Ausnahmen davon sind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(4) &\cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) \\ \mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) &\cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{so}(2, 2) &\cong \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2) \\ \mathfrak{so}(3, 1) &\cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) \\ \mathfrak{so}^*(4) &\cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{sl}(2) \end{aligned}$$

2 Wurzelsysteme und Klassifikation von komplexen einfachen Lie-Algebren

Dieses Kapitel orientiert sich an den Darstellungen von Humphreys [Hum78, §7-12] und Knapp [Kna96b, II].

Satz 2.1. *Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra. Dann existieren für alle $x \in \mathfrak{g}$ eindeutige $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$, sodass $\text{ad } x = \text{ad}(x_s) + \text{ad}(x_n)$ die Jordan-Chevalley-Zerlegung von $\text{ad } x$ ist.*

Bemerkung. Das erlaubt uns, in halbeinfachen komplexen Lie-Algebren eine abstrakte Jordan-Chevalley-Zerlegung und die Begriffe **halbeinfach** (bzw. diagonalisierbar) und **nilpotent** für Elemente dieser Lie-Algebren zu definieren.

Zum Beweis siehe [Hum78, §5.4].

Definition 2.2. Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ heißt **Cartan-Unteralgebra**, falls \mathfrak{h} nilpotent ist und $\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Satz 2.3. *Jede komplexe halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} enthält eine Cartan-Unteralgebra.*

Beweisskizze. Wähle eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$, die maximal ist mit der Eigenschaft, dass alle ihre Elemente halbeinfach sind. Dann ist \mathfrak{h} abelsch, also nilpotent und es existiert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \underbrace{\{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] - \alpha(h) \cdot x = 0 \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}}_{=: \mathfrak{g}_{\alpha}},$$

wobei für nur endliche viele $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ gilt $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0$.

Nach [Hum78, §8.2] ist $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Für $x = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} x_{\alpha} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ ist für alle $h \in \mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_0 \ni [h, x] = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}} [h, x_{\alpha}] \in \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

also $[h, x] = 0$ und $\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Definition 2.4. Sei \mathfrak{g} eine komplexe Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine nilpotente Unteralgebra. Die **verallgemeinerten Gewichtsräume** sind die Untervektorräume

$$\mathfrak{g}_{\alpha} := \{x \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } h - \alpha(h) \cdot \text{id})^n x = 0 \text{ für alle } h \in \mathfrak{h} \text{ und ein } n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathfrak{g}$$

für $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.

Proposition 2.5. Für eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} , ihre Killingform B und eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ erfüllen die verallgemeinerten Gewichtsräume \mathfrak{g}_α

1. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ für $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$.
2. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ für eine endliche Teilmenge $\Phi \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$.
3. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ ist abelsch.
4. Für $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$, $\alpha \neq -\beta$ ist $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.
5. Es ist genau dann $\alpha \in \Phi$, wenn $-\alpha \in \Phi$.
6. Φ ist ein Erzeugendensystem von \mathfrak{h}^* .

Beweis [Kna96b, §2.2, 2.4]. 1. Für $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_\beta$ ist

$$\begin{aligned} & (\text{ad } h - \alpha(h) \cdot \text{id} - \beta(h) \cdot \text{id})[x, y] \\ &= [(\text{ad } h - \alpha(h) \cdot \text{id})x, y] + [x, (\text{ad } h - \beta(h) \cdot \text{id})y], \end{aligned}$$

also induktiv

$$\begin{aligned} & (\text{ad } h - \alpha(h) \cdot \text{id} - \beta(h) \cdot \text{id})^n[x, y] \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} [(\text{ad } h - \alpha(h) \cdot \text{id})^i x, (\text{ad } h - \beta(h) \cdot \text{id})^{n-i} y], \end{aligned}$$

also $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

2. Es ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$, also ist $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.
Wähle eine Basis h_1, \dots, h_r von \mathfrak{h} und setze für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathfrak{g}_{\lambda,i} := \{x \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } h_i - \lambda \cdot \text{id})^n x = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{g}_\lambda.$$

Dann zerfällt \mathfrak{g} in die verallgemeinerten Eigenräume $\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\lambda,1}$. Wie oben sind auch die $\mathfrak{g}_{\lambda,i}$ invariant unter $\text{ad } \mathfrak{h}$ und die $\mathfrak{g}_{\lambda,1}$ zerfallen in die verallgemeinerten Eigenräume von $\text{ad } h_2$. Iterativ erhält man

$$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}} \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{g}_{\lambda_i, i} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$$

Offenbar ist die Menge $\Phi := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ endlich, da \mathfrak{g} endlich-dimensional ist.

Angenommen $\mathfrak{g}_0 \neq \mathfrak{h}$. Wähle die Darstellung

$$\begin{aligned} \varphi: \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}) \\ h &\longmapsto (x + \mathfrak{h} \mapsto [h, x] + \mathfrak{h}) \end{aligned}$$

mit $\varphi(\mathfrak{h})$ auflösbar, da \mathfrak{h} auflösbar ist. Wähle mit dem Satz von Lie 1.9 einen gemeinsamen Eigenvektor $x + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}_0/\mathfrak{h} \setminus \{0\}$. Der gemeinsame Eigenwert ist 0, also $\varphi(h)(x + \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$, also $[h, x] \in \mathfrak{h}$, also $x \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, Widerspruch.

Also folgt $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ und

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

3. Seien $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$. Da \mathfrak{h} nilpotent ist, ist $\text{ad } \mathfrak{h}$ auflösbar und nach dem Satz von Lie 1.9 zu einer Basis durch Dreiecksmatrizen dargestellt. Für Dreiecksmatrizen gilt $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BAC)$, also $B([h_1, h_2], h) = 0$ für alle $h \in \mathfrak{h}$.
Für $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, $\alpha \neq 0$ ist $\text{ad}[h_1, h_2] \text{ad } x: \mathfrak{g}_{\beta} \rightarrow \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ nilpotent, also $B([h_1, h_2], x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Also $[h_1, h_2] \in \text{Rad } B = \{0\}$.
4. Wähle eine Basis aus den verallgemeinerten Eigenräumen und stelle die Matrix von $\text{ad } x \text{ad } y$ für $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, $y \in \mathfrak{g}_{\beta}$ auf. Die Diagonaleinträge verschwinden wegen $\text{ad } x \text{ad } y(\mathfrak{g}_{\gamma}) \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma}$, also $B(x, y) = 0$.
5. B ist nicht ausgeartet, und da für alle $\beta \neq -\alpha$ gilt $B(\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}) = 0$, folgt $B(x, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$.
6. Angenommen, es existiert $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Dann ist $\text{ad } h$ nilpotent, also $B(h, \mathfrak{h}) = 0$, da \mathfrak{h} abelsch ist. Also $h = 0$ und Φ ist Erzeugendensystem von \mathfrak{h}^* . □

Definition 2.6. Sei \mathfrak{g} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine Cartan-Unteralgebra und $\Phi := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0\}$. Dann heißen die $\alpha \in \Phi$ **Wurzeln**, und die Zerlegung $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}$ **Wurzelraumzerlegung**.

Für $\alpha \in \Phi$ sei $t_{\alpha} \in \mathfrak{h}$ eindeutig mit $B(h, t_{\alpha}) = \alpha(h)$ für alle $h \in \mathfrak{h}$.⁵ Man wähle für $\alpha \in \Phi$ außerdem mit dem Satz von Lie 1.9⁶ ein $x_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha} \setminus \{0\}$ mit $[h, x_{\alpha}] = \alpha(h)x_{\alpha}$ für alle $h \in \mathfrak{h}$.

⁵Existenz und Eindeutigkeit folgen aus $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ nicht ausgeartet

⁶angewendet auf die Darstellung $\text{ad } \mathfrak{h}: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{\alpha})$

Proposition 2.7. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ die Wurzelraumzerlegung einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra. Dann gilt:

1. Für $\alpha \in \Phi$, $x \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ist $[x_\alpha, x] = B(x_\alpha, x)t_\alpha$.
2. Für $\alpha, \beta \in \Phi$ ist $\beta(t_\alpha) \in \mathbb{Q}\alpha(t_\alpha)$ und $\alpha(t_\alpha) \neq 0$.
3. Für $\alpha \in \Phi$ ist $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, also $\mathfrak{g}_\alpha = \bigcap_{h \in \mathfrak{h}} \ker(\text{ad } h - \alpha(h) \cdot \text{id})$ und alle $\text{ad } h$ für $h \in \mathfrak{h}$ sind gleichzeitig diagonalisierbar.
4. Die x_α können so festgelegt werden, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{span}\{x_\alpha, x_{-\alpha}, t_\alpha\} & \longrightarrow & \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ x_\alpha & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_{-\alpha} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ [x_\alpha, x_{-\alpha}] & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ein Isomorphismus von Lie-Algebren ist.

Beweis [Kna96b, §2.4]. 1. Für $h \in \mathfrak{h}$ ist

$$\begin{aligned} B([x_\alpha, x], h) &= B(x, [h, x_\alpha]) = \alpha(h)B(x, x_\alpha) = B(t_\alpha, h)B(x, x_\alpha) \\ &= B(B(x, x_\alpha)t_\alpha, h), \end{aligned}$$

also $[x_\alpha, x] = B(x, x_\alpha)t_\alpha$, denn $[x_\alpha, x] \in \mathfrak{h}$ und $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ ist nicht ausgeartet.

2. Wähle $y_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $B(t_\alpha, y_{-\alpha}) = 1$, also $[x_\alpha, y_{-\alpha}] = t_\alpha$ und setze $\mathfrak{g}' := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$. Dann ist \mathfrak{g}' invariant unter $\text{ad } t_\alpha, \text{ad } x_\alpha, \text{ad } y_{-\alpha}$ und

$$\text{Tr}((\text{ad } t_\alpha)|_{\mathfrak{g}'}) = \text{Tr}((\text{ad } x_\alpha)|_{\mathfrak{g}'}(\text{ad } y_{-\alpha})|_{\mathfrak{g}'} - (\text{ad } y_{-\alpha})|_{\mathfrak{g}'}(\text{ad } x_\alpha)|_{\mathfrak{g}'}) = 0.$$

Gleichzeitig hat $\text{ad } t_\alpha$ auf $\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ als einzigen verallgemeinerten Eigenwert $\beta(t_\alpha) + n\alpha(t_\alpha)$, also

$$0 = \text{Tr}((\text{ad } t_\alpha)|_{\mathfrak{g}'}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\beta(t_\alpha) + n\alpha(t_\alpha)) \cdot \dim \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha},$$

also $\beta(t_\alpha) \in \mathbb{Q}\alpha(t_\alpha)$.

Ist $\alpha(t_\alpha) = 0$, folgt $\beta(t_\alpha) = 0$ für alle $\beta \in \Phi$, also auch für alle $\beta \in \mathfrak{h}^*$. Also $t_\alpha = 0$, Widerspruch.

3. Der Raum $\mathfrak{g}'' := \mathbb{C}x_\alpha \oplus \mathbb{C}t_\alpha \oplus \bigoplus_{n<0} \mathfrak{g}_{n\alpha}$ ist invariant unter $\text{ad } t_\alpha$, $\text{ad } x_\alpha$ und $\text{ad } y_{-\alpha}$. Auf jedem Summanden hat $\text{ad } t_\alpha$ einen verallgemeinerten Eigenwert, also ist wie oben

$$0 = \text{Tr}((\text{ad } t_\alpha)|_{\mathfrak{g}''}) = \alpha(t_\alpha) + 0 + \sum_{n<0} n\alpha(t_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{n\alpha}.$$

Also $\sum_{n=1}^{\infty} n \dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} = 1$.

4. Wie oben ist $B(x_\alpha, x_{-\alpha}) \neq 0$ und $\alpha(t_\alpha) \neq 0$. Ersetze also x_α durch $y_\alpha := \frac{2}{\alpha(t_\alpha) \cdot B(x_\alpha, x_{-\alpha})} x_\alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned} [[y_\alpha, x_{-\alpha}], y_\alpha] &= B(y_\alpha, x_{-\alpha})[t_\alpha, y_\alpha] \\ &= \frac{2}{\alpha(t_\alpha) \cdot B(x_\alpha, x_{-\alpha})} \cdot B(x_\alpha, x_{-\alpha}) \cdot \alpha(t_\alpha) y_\alpha = 2y_\alpha \\ [[y_\alpha, x_{-\alpha}], x_{-\alpha}] &= \frac{2}{\alpha(t_\alpha)} \cdot (-\alpha(t_\alpha)) x_{-\alpha} = -2x_{-\alpha}. \end{aligned}$$

Die Klammerrelationen sind also erfüllt und die gleichen Wahlen ergeben ebenso einen Isomorphismus $\text{span}\{x_{-\alpha}, y_\alpha, [x_{-\alpha}, y_\alpha]\} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. \square

Bemerkung. Schreibe $h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, also $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \text{span}\{h, x, y\}$.

Proposition 2.8 (Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$). *Sei $\varphi: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung. Dann ist φ vollständig reduzibel und $\varphi(h)$ ist diagonalisierbar.*

Ist φ irreduzibel, ist $V \cong V_m \oplus V_{m-2} \oplus \dots \oplus V_{-m}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ und die eindimensionalen Eigenräume V_λ von $\varphi(h)$ zum Eigenwert λ .

Für jede Dimension $r \in \mathbb{Z}^+$ existiert eine solche irreduzible Darstellung $\varphi: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ und es gibt eine Basis v_0, \dots, v_{r-1} von \mathbb{C}^r , sodass

- $\varphi(h)v_i = (r - 1 - 2i)v_i$
- $\varphi(x)v_i = i(r - i)v_{i-1}$, wobei $v_{-1} := 0$
- $\varphi(y)v_i = v_{i+1}$, wobei $v_r = 0$.

Zum Beweis siehe [Hum78, §7].

Definition 2.9. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ die Wurzelraumzerlegung einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra. Wähle $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ wie in Proposition 2.7 und setze $\mathfrak{sl}_2^\alpha := \text{span}\{x_\alpha, \underbrace{x_{-\alpha}}_{=:y_\alpha}, \underbrace{[x_\alpha, x_{-\alpha}]}_{=:h_\alpha}\} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Für $\alpha \in \Phi$ und $\beta \in \Phi \cup \{0\}$ sei $(\Phi \cup \{0\}) \cap \{\beta + n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}$ die α -Kette von Wurzeln durch β .

Zu $\alpha, \beta \in \Phi$ sei $\langle \beta, \alpha \rangle := \beta(h_\alpha)$ die **Cartan-Zahl**.

Proposition 2.10. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ die Wurzelraumzerlegung einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra. Dann gilt:

1. Für $\alpha \in \Phi$, $c\alpha \in \Phi$ mit $c \in \mathbb{C}$ folgt $c = \pm 1$
2. Für $\alpha, \beta \in \Phi$ ist $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ und $\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \Phi$
3. Für $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \pm\beta$. Dann ist die α -Kette durch β ununterbrochen. Für $r, q \in \mathbb{Z}$ maximal mit $\beta - r\alpha, \beta + q\alpha \in \Phi$ ist $\langle \beta, \alpha \rangle = r - q$
4. Für $\alpha = \sum_{\beta \in \Phi} \lambda_\beta \beta$ mit $\lambda_\beta \in \mathbb{C}$ sind alle $\lambda_\beta \in \mathbb{R}$
5. B induziert auf $\mathbb{R}\Phi$ ein Skalarprodukt und $\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2B(h_\beta, h_\alpha)}{B(h_\alpha, h_\alpha)}$.

Zum Beweis siehe [Hum78, §8.4, 8.5].

Definition 2.11. Sei $(V, (\cdot, \cdot))$ ein euklidischer Vektorraum, $\alpha, \beta \in V \setminus \{0\}$. Setze $\langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ und $\sigma_\alpha(\beta) := \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$. Eine endliche Teilmenge $\Phi \subset V \setminus \{0\}$ heißt **abstraktes Wurzelsystem**, falls gilt

1. $V = \mathbb{R}\Phi$
2. $\sigma_\alpha(\Phi) \subset \Phi$ für alle $\alpha \in \Phi$
3. $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$.

Ein abstraktes Wurzelsystem Φ heißt

- **reduziert**, falls zusätzlich für alle $\alpha \in \Phi$ gilt $\Phi \cap R\alpha = \{\pm\alpha\}$,
- **reduzibel**, falls es eine disjunkte Zerlegung $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ gibt mit $\Phi_2 \subset \Phi_1^\perp$,
- **irreduzibel**, falls Φ nicht reduzibel ist.

Zwei Wurzelsysteme $\Phi \subset V, \Phi' \subset V'$ heißen **isomorph**, falls es einen Vektorraumisomorphismus $f: V \rightarrow V'$ gibt mit $f(\Phi) = \Phi'$ und für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ gilt $\langle f(\alpha), f(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$.

Eine Teilmenge $\Delta \subset \Phi$ heißt **Basis**, falls Δ eine Basis von V ist und jede Wurzel $\beta \in \Phi$ geschrieben werden kann als $\sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha$, wobei alle $n_\alpha \in \mathbb{N}_0$ (schreibe dann $\alpha > 0$) oder alle $n_\alpha \in -\mathbb{N}_0$ (schreibe dann $\alpha < 0$). Die Elemente $\alpha \in \Delta$ heißen **einfache Wurzeln**.

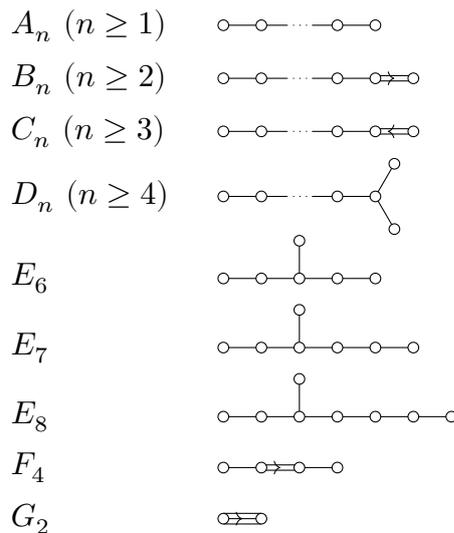
Ist eine Basis $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Phi$ gewählt, heißt $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{ij} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ **Cartan-Matrix**. Das **Dynkin-Diagramm** von Φ enthält für jede einfache Wurzel einen Knoten und zwei Knoten α, β werden mit $\langle \alpha, \beta \rangle \cdot \langle \beta, \alpha \rangle$ Kanten verbunden. Ist $(\alpha, \alpha) \neq (\beta, \beta)$, werden die Kanten mit einem Pfeil versehen, der in Richtung der kleineren Wurzel zeigt.

Proposition 2.12. 1. Die Wurzeln einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra bilden bezüglich dem von der Killingform induzierten Skalarprodukt ein reduziertes abstraktes Wurzelsystem.

2. Das Wurzelsystem einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} ist genau dann irreduzibel, wenn \mathfrak{g} einfach ist.

3. Jedes abstrakte Wurzelsystem hat eine Basis.

4. Dynkin-Diagramme sind wohldefiniert und die Isomorphieklassen von irreduziblen reduzierten Wurzelsystemen entsprechen eineindeutig den folgenden Dynkin-Diagrammen:



(1) ist direkte Folge aus den vorherigen Aussagen. Der Beweis zu (2) wird unten skizziert. Zum Beweis von (3) und (4) siehe [Hum78, §10.1, §11.4, §12.1].

Beweisskizze (zu (2)). „ \Rightarrow “: Angenommen, \mathfrak{g} ist direkte Summe nichttrivialer Ideale $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$. Für ein $x_\alpha = \underbrace{x'_\alpha}_{\in \mathfrak{g}'} + \underbrace{x''_\alpha}_{\in \mathfrak{g}''} \in \mathfrak{g}_\alpha$ zeige $x'_\alpha, x''_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, also $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}'$

oder \mathfrak{g}'' . Dann ist $\Phi = \{\alpha \in \Phi \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}'\} \cup \{\alpha \in \Phi \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}''\}$.

„ \Leftarrow “: Angenommen $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$. Zeige, dass

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}' &= \sum_{\alpha \in \Phi'} \{\mathbb{C}h_\alpha + \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}\} && \text{und} \\ \mathfrak{g}'' &= \sum_{\alpha \in \Phi''} \{\mathbb{C}h_\alpha + \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}\} \end{aligned}$$

(also $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$) Ideale sind.

Definition 2.13. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über einen Körper K mit Charakteristik 0. Für $x \in \mathfrak{g}$, $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(\text{ad } x)^n = 0$ sei

$$\exp x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} (\text{ad } x)^i$$

ein **innerer Automorphismus**. Die von den inneren Automorphismen erzeugte Gruppe⁷ sei $\text{Int } \mathfrak{g}$.

Ist $\mathbb{R} \subset K \subset \mathbb{C}$, heißt \mathfrak{g} **kompakt**, falls $\text{Int } \mathfrak{g}$ mit der Teilraumtopologie von $\text{GL}(\mathfrak{g})$ kompakt ist.

Proposition 2.14. Sei \mathfrak{g} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \leq \mathfrak{g}$ Cartan-Unteralgebren. Dann existiert $a \in \text{Int } \mathfrak{g}$ mit $a(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$, \mathfrak{h}_1 und \mathfrak{h}_2 sind also **konjugiert** unter $\text{Int } \mathfrak{g}$.

Beweisskizze (Beweis in [Kna96b, §2.3]). Setze für $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$

$$R_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{h} \mid \dim \ker(\text{ad } x)^{\dim \mathfrak{g}} \text{ ist minimal für Elemente aus } \mathfrak{h}\}$$

und zeige für eine Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h}

1. $R_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{h} \mid \alpha(x) \neq 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathfrak{h}^* \text{ mit } \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$
 $= \{x \in \mathfrak{h} \mid \ker(\text{ad } x)^{\dim \mathfrak{g}} = \mathfrak{h}\}$
2. Für alle $x \in R_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ operiert $\text{ad } x$ nichtsingulär auf $\bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$

⁷Es ist $\exp x \circ \exp(-x) = \text{id}$

3. Das Bild von

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathfrak{h}}: \quad \text{Int } \mathfrak{g} \times R_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (a, x) &\longmapsto a(x) \end{aligned}$$

ist offen in \mathfrak{g} und enthalten in $R_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$

4. Falls für alle $a \in \text{Int } \mathfrak{g}$ gilt $a(\mathfrak{h}_1) \neq \mathfrak{h}_2$, sind die Bilder von $\sigma_{\mathfrak{h}_1}$ und $\sigma_{\mathfrak{h}_2}$ disjunkt
5. Die Bilder der $\sigma_{\mathfrak{h}}$ überdecken $R_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$, die Konjugationsklassen von Cartan-Unteralgebren induzieren also eine disjunkte offene Überdeckung von $R_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$
6. $R_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ ist zusammenhängend.

Satz 2.15 (Isomorphiesatz). *Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ komplexe halbeinfache Lie-Algebren mit Cartan-Unteralgebren $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ und Wurzelsystemen Φ, Φ' . Sind die Wurzelsysteme isomorph via $\varphi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}'$ (also $\varphi^t: \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}'^*$), existiert ein Isomorphismus $\tilde{\varphi}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ von Lie-Algebren. Durch Wahl einer Basis Δ von Φ und $\tilde{\varphi}(x_\alpha) \in \mathfrak{g}'_\alpha$ für ein $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$ wird $\tilde{\varphi}$ eindeutig festgelegt.*

Beweisskizze (Beweis in [Kna96b, §2.10]). Eindeutigkeit: Für zwei solcher Isomorphismen $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ ist $\tilde{\varphi}_0 := \tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Automorphismus, der auf \mathfrak{h} als Identität operiert. Assoziiert man mit jeder einfachen Wurzel $\alpha \in \Delta$ das Tripel $(h_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ mit $h_\alpha := \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}t_\alpha$ und $B(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}$ erhält man auch $\tilde{\varphi}_0(y_\alpha) = y_\alpha$. Zudem erzeugen die $(h_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ die Lie-Algebra \mathfrak{g} , also $\tilde{\varphi}_0 = \text{id}_{\mathfrak{g}}$.

Existenz: Sei h_α wie oben. Erhalte damit $\varphi(h_\alpha) = h_{(\varphi^t)^{-1}(\alpha)} =: h'_\alpha$. Für $x'_\alpha := \varphi(x_\alpha) \in \mathfrak{g}'_\alpha$ bestimme $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ und $y'_\alpha \in \mathfrak{g}'_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ bzw. $[x'_\alpha, y'_\alpha] = h'_\alpha$ und erhalte Erzeugendensysteme $X = \{h_\alpha, x_\alpha, y_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ und $X' = \{h'_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$. Mit den von X, X' erzeugten freien Lie-Algebren $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ und den darin von den **Serre-Relationen**

$$\begin{aligned} [h_\alpha, h_\beta] &= 0 & [x_\alpha, y_\beta] &= \delta_{\alpha\beta} h_\alpha \\ [h_\alpha, x_\beta] &= \langle \alpha, \beta \rangle x_\beta & [h_\alpha, y_\beta] &= -\langle \alpha, \beta \rangle y_\beta \\ (\text{ad } x_\alpha)^{-\langle \alpha, \beta \rangle + 1} x_\beta &= 0 \text{ für } \alpha \neq \beta & (\text{ad } y_\alpha)^{-\langle \alpha, \beta \rangle + 1} y_\beta &= 0 \text{ für } \alpha \neq \beta \end{aligned}$$

erzeugten Idealen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ erhält man kanonische Isomorphismen $\mathfrak{F}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{g}$, $\mathfrak{F}'/\mathfrak{R}' \cong \mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{F}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{F}'/\mathfrak{R}'$.

Satz 2.16. *Sei Φ ein reduziertes Wurzelsystem. Dann existiert eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra \mathfrak{g} mit Wurzelsystem Φ .*

Beweisskizze (Beweis in [Kna96b, §2.11]). Für eine Basis $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ von Φ setze $X := \{h_i, x_i, y_i\}_{i=1}^l$. Sei \mathfrak{F} die freie Lie-Algebra aus X und \mathfrak{R} das von den Serre-Relationen erzeugte Ideal. Setze $\mathfrak{g} := \mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ und zeige (sehr aufwändig) $\mathfrak{R} \cap \text{span}\{h_i\}_{i=1}^l = \{0\}$.

3 Cartan-Zerlegungen und Cartan-Unteralgebren reeller halbeinfacher Lie-Algebren

Dieses Kapitel orientiert sich an der Darstellung von Knapp [Kna96b, IV].

Satz 3.1. *Sei \mathfrak{g} eine reelle Lie-Algebra, und die Killingform B auf \mathfrak{g} negativ definit. Dann ist \mathfrak{g} kompakt.*

Beweisskizze (Der vollständige Beweis in [Kna96b, §4.4] verwendet verschiedene Aussagen über Lie-Gruppen). Nach dem Cartan-Kriterium 1.10 ist \mathfrak{g} halbeinfach. Dann liegt $\text{Int } \mathfrak{g}$ abgeschlossen in $\mathbf{GL}(\mathfrak{g})$. Zudem ist $\text{Int } \mathfrak{g}$ eine Gruppe orthogonaler Transformationen, also ist $\text{Int } \mathfrak{g}$ eine abgeschlossene Untergruppe der orthogonalen Gruppe, also kompakt.

Definition 3.2. Sei \mathfrak{g} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra, \mathfrak{g}_0 eine reelle Form von \mathfrak{g} und es gebe eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ mit Wurzelsystem Φ und eine Wahl der $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, sodass

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}x_\alpha$$

mit $\mathfrak{h}_0 := \{h \in \mathfrak{h} \mid \alpha(h) \in \mathbb{R} \text{ für alle } \alpha \in \Phi\}$. Dann heißt \mathfrak{g}_0 **zerfallende reelle Form** von \mathfrak{g} .

Lemma 3.3. *Sei \mathfrak{g} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra mit Killingform B , \mathfrak{h} eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Φ . Für $\alpha \in \Phi$ kann $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ so gewählt werden, dass*

$$[x_\alpha, x_{-\alpha}] = t_\alpha \qquad [x_\alpha, x_\beta] = n_{\alpha,\beta} x_{\alpha+\beta}$$

falls $\alpha + \beta \in \Phi$ und mit $n_{\alpha,\beta} = -n_{-\alpha,-\beta}$. Ist $\{\beta - p\alpha, \dots, \beta + q\alpha\}$ die α -Kette durch β , gilt dann $n_{\alpha,\beta}^2 = \frac{1}{2}q(1+p)\alpha(t_\alpha)$. Insbesondere hat \mathfrak{g} eine zerfallende reelle Form.

Beweis. Sei $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Automorphismus mit $\varphi|_{\mathfrak{h}} = -\text{id}_{\mathfrak{h}}$, der nach dem Isomorphiesatz 2.15 existiert. Wähle also zunächst für alle $\alpha \in \Phi$ ein $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ mit $B(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$ und $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = t_\alpha$ und lege $c_\alpha \in \mathbb{C}$ für alle $\alpha \in \Phi$ so fest, dass gilt $\varphi(e_\alpha) = c_{-\alpha} e_{-\alpha}$. Es ist

$$c_{-\alpha} c_\alpha = c_{-\alpha} c_\alpha B(e_{-\alpha}, e_\alpha) = B(\varphi(e_\alpha), \varphi(e_{-\alpha})) = B(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$$

Wähle $a_\alpha \in \mathbb{C}$, sodass $a_\alpha a_{-\alpha} = 1$ und $a_\alpha^2 = -c_\alpha$ und setze $x_\alpha := a_\alpha e_\alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned} [x_\alpha, x_{-\alpha}] &= a_\alpha a_{-\alpha} [e_\alpha, e_{-\alpha}] = t_\alpha && \text{und} \\ \varphi(x_\alpha) &= a_\alpha \varphi(e_\alpha) = a_\alpha c_{-\alpha} e_{-\alpha} = a_\alpha c_\alpha^{-1} e_{-\alpha} \\ &= -a_\alpha^{-1} e_{-\alpha} = -a_{-\alpha} e_{-\alpha} = -x_{-\alpha} \end{aligned}$$

Mit $n_{\alpha,\beta}$, sodass $[x_\alpha, x_\beta] = n_{\alpha,\beta}x_{\alpha+\beta}$ falls $\alpha + \beta \in \Phi$ folgt nach 2.8

$$n_{-\alpha,\alpha+\beta} \cdot n_{\alpha,\beta} \cdot x_\beta = [x_{-\alpha}, [x_\alpha, x_\beta]] = \frac{1}{2}q(1+p)\alpha(t_\alpha)x_\beta,$$

denn x_β ist dort Vielfaches von v_q , identifiziert man $\text{span}\{t_\alpha, x_\alpha, x_{-\alpha}\}$ mit $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Ferner ist

$$\begin{aligned} n_{-\alpha,\alpha+\beta}t_\beta &= n_{-\alpha,\alpha+\beta}[x_\beta, x_{-\beta}] = [[x_{-\alpha}, x_{\alpha+\beta}], x_{-\beta}] \\ &= [x_{-\alpha}, [x_{\alpha+\beta}, x_{-\beta}]] + [x_{\alpha+\beta}, [x_{-\beta}, x_{-\alpha}]] \\ &= n_{\alpha+\beta,-\beta}[x_{-\alpha}, x_\alpha] + n_{-\beta,-\alpha}[x_{\alpha+\beta}, x_{-\alpha-\beta}] \\ &= n_{\alpha+\beta,-\beta}t_{-\alpha} + n_{-\beta,-\alpha}t_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

und wegen $t_\beta = t_{-\alpha} + t_{\alpha+\beta}$ folgt $n_{-\alpha,\alpha+\beta} = n_{-\beta,-\alpha} = -n_{\beta,\alpha} = n_{\alpha,\beta}$, also

$$n_{\alpha,\beta}^2 = \frac{1}{2}q(1+p)\alpha(t_\alpha).$$

□

Satz 3.4. *Sei \mathfrak{g} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra. Dann existiert eine reelle Form \mathfrak{u}_0 von \mathfrak{g} , die kompakt ist.*

Beweis [Kna96b, §6.1]. Mit zerfallender reeller Form $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}x_\alpha$ setze

$$\mathfrak{u}_0 := \sum_{\alpha \in \Phi} i\mathbb{R}t_\alpha + \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}(x_\alpha - x_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in \Phi} i\mathbb{R}(x_\alpha + x_{-\alpha}).$$

Offenbar ist $\mathfrak{g}^\mathbb{R} = \mathfrak{u}_0 \oplus_{\mathbb{R}} i\mathfrak{u}_0$. Für $\alpha \neq \pm\beta$ ist

$$\begin{aligned} [it_\alpha, it_\beta] &= 0 \\ [it_\alpha, x_\alpha - x_{-\alpha}] &= \alpha(t_\alpha)i(x_\alpha + x_{-\alpha}) \\ [it_\alpha, x_\beta - x_{-\beta}] &= \beta(t_\alpha)i(x_\beta + x_{-\beta}) \\ [it_\alpha, i(x_\alpha + x_{-\alpha})] &= -\alpha(t_\alpha)(x_\alpha - x_{-\alpha}) \\ [it_\alpha, i(x_\beta + x_{-\beta})] &= -\beta(t_\alpha)(x_\beta - x_{-\beta}) \\ [x_\alpha - x_{-\alpha}, x_\beta - x_{-\beta}] &= n_{\alpha,\beta}(x_{\alpha+\beta} - x_{-\alpha-\beta}) - n_{-\alpha,\beta}(x_{-\alpha+\beta} - x_{\alpha-\beta}) \\ [x_\alpha - x_{-\alpha}, i(x_\beta + x_{-\beta})] &= n_{\alpha,\beta}i(x_{\alpha+\beta} + x_{-\alpha-\beta}) - n_{-\alpha,\beta}i(x_{-\alpha+\beta} + x_{\alpha-\beta}) \\ [i(x_\alpha + x_{-\alpha}), i(x_\beta + x_{-\beta})] &= -n_{\alpha,\beta}(x_{\alpha+\beta} - x_{-\alpha-\beta}) - n_{-\alpha,\beta}(x_{-\alpha+\beta} - x_{\alpha-\beta}) \\ [x_\alpha - x_{-\alpha}, i(x_\alpha + x_{-\alpha})] &= 2it_\alpha \end{aligned}$$

Also ist $\mathfrak{u}_0 \leq \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ eine Unteralgebra, also reelle Form.

Nach 2.10 ist die Killingform B auf $\sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}t_\alpha$ positiv definit, also auf $\sum_{\alpha \in \Phi} i\mathbb{R}t_\alpha$ negativ definit. Zudem ist nach 2.5 für $\alpha \neq \pm\beta$

$$\begin{aligned} B(x_\alpha - x_{-\alpha}, x_\beta - x_{-\beta}) &= 0 \\ B(x_\alpha - x_{-\alpha}, i(x_\beta + x_{-\beta})) &= 0 \\ B(i(x_\alpha + x_{-\alpha}), i(x_\beta + x_{-\beta})) &= 0 \\ B(x_\alpha - x_{-\alpha}, i(x_\alpha + x_{-\alpha})) &= iB(x_\alpha, x_\alpha) - iB(x_{-\alpha}, x_{-\alpha}) = 0 \\ B(x_\alpha - x_{-\alpha}, x_\alpha - x_{-\alpha}) &= -2B(x_\alpha, x_{-\alpha}) = -2 \\ B(i(x_\alpha + x_{-\alpha}), i(x_\alpha + x_{-\alpha})) &= -2B(x_\alpha, x_{-\alpha}) = -2 \end{aligned}$$

Also ist B negativ auf einem orthogonalen Erzeugendensystem, also negativ definit auf ganz \mathfrak{u}_0 . Nach 3.1 ist \mathfrak{u}_0 eine kompakte reelle Form von \mathfrak{g} . \square

Definition 3.5. Sei \mathfrak{g} eine reelle halbeinfache Lie-Algebra mit Killingform B , und $\vartheta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Automorphismus mit $\vartheta^2 = \text{id}_{\mathfrak{g}}$. Ist die symmetrische Bilinearform $B_\vartheta(x, y) := -B(x, \vartheta y)$ positiv definit, heißt ϑ **Cartan-Involution**.

Beispiel 3.6. Für eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} mit kompakter reeller Form \mathfrak{u}_0 ist die Konjugation über \mathfrak{u}_0 eine Cartan-Involution von $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$.

Satz 3.7. Sei \mathfrak{g}_0 eine reelle einfache Lie-Algebra. Dann existiert eine Cartan-Involution $\mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_0$.

Beweisskizze (Beweis in [Kna96b, §6.2]). Sei \mathfrak{u}_0 eine kompakte reelle Form der Komplexifizierung \mathfrak{g} von \mathfrak{g}_0 , und σ, τ die Konjugationen von \mathfrak{g} über \mathfrak{g}_0 und \mathfrak{u}_0 . Dann existiert ein Automorphismus $\varphi \in \text{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}})$, sodass $\varphi\tau\varphi^{-1}\sigma = \sigma\varphi\tau\varphi^{-1}$: Es ist

$$\begin{aligned} (B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}})_\tau(\sigma\tau(x), y) &= B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}}(\sigma\tau(x), \tau(y)) = B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}}(\tau(x), \sigma\tau(y)) = B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}}(x, \tau\sigma\tau(y)) \\ &= (B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}})_\tau(x, \sigma\tau(y)), \end{aligned}$$

also $\sigma\tau$ symmetrisch und $\sigma\tau\sigma\tau$ positiv definit. Also existiert eine Basis von $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, in der die Matrix $(a_{ij})_{i,j}$ von $\sigma\tau\sigma\tau$ Diagonalgestalt hat und setze $(\sigma\tau\sigma\tau)^r$ für $r \in \mathbb{R}$ als das Element in $\text{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}})$, das in dieser Basis durch die Matrix $(a_{ij}^r)_{i,j}$ dargestellt wird. Man erhält mithilfe der Matrixeinträge in dieser Basis $(\sigma\tau\sigma\tau)^r\tau = \tau(\sigma\tau\sigma\tau)^{-r}$ und $(\sigma\tau\sigma\tau)^r\sigma = \sigma(\sigma\tau\sigma\tau)^{-r}$ und mit $\varphi := (\sigma\tau\sigma\tau)^{\frac{1}{4}}$:

$$\begin{aligned} (\varphi\tau\varphi^{-1})\sigma &= (\sigma\tau\sigma\tau)^{\frac{1}{4}}\tau(\sigma\tau\sigma\tau)^{-\frac{1}{4}}\sigma = (\sigma\tau\sigma\tau)^{\frac{1}{2}}\tau\sigma = (\sigma\tau\sigma\tau)^{-\frac{1}{2}}\sigma\tau\sigma\tau\sigma \\ &= (\sigma\tau\sigma\tau)^{-\frac{1}{2}}\sigma\tau = \sigma\tau(\sigma\tau\sigma\tau)^{-\frac{1}{2}} = \sigma(\sigma\tau\sigma\tau)^{\frac{1}{4}}\tau(\sigma\tau\sigma\tau)^{-\frac{1}{4}} \\ &= \sigma(\varphi\tau\varphi^{-1}) \end{aligned}$$

Nun ist $(B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}})_{\varphi\tau\varphi^{-1}}$ positiv definit. Für $x \in \mathfrak{g}_0$ gilt $\sigma(x) = x$, also ist $\varphi\tau\varphi^{-1}(x)$ auch ein Fixpunkt von σ , also in \mathfrak{g}_0 . Setze $\vartheta := (\varphi\tau\varphi^{-1})|_{\mathfrak{g}_0}$ und erhalte, dass B_{ϑ} positiv definit ist, also eine Cartan-Involution.

Definition 3.8. Sei \mathfrak{g} eine reelle halbeinfache Lie-Algebra mit Killingform B , und $\mathfrak{k}, \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ Untervektorräume, sodass $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Die Zerlegung von \mathfrak{g} in $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ heißt **Cartan-Zerlegung**, falls gilt:

1. $B|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}}$ ist negativ definit, $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$ ist positiv definit
2. $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$

Beispiel 3.9. Für eine reelle halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} und eine Cartan-Involution ϑ ist die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ in die Eigenräume von ϑ zu den Eigenwerten 1 und -1 eine Cartan-Zerlegung.

Satz 3.10. *Jede reelle halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} hat eine Cartan-Unteralgebra.*

Beweis. Ein Unterraum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ist genau dann eine Cartan-Unteralgebra, wenn $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist, wie man jeweils auf einer Basis überprüft.

Wähle eine Cartan-Involution $\vartheta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, die dazu korrespondierende Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ und maximale abelsche Unteralgebren $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{Z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ und setze $\mathfrak{h} := \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$. Wie in Satz 2.3 reicht es zu zeigen, dass $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ eine maximale abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist und alle $\text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} h$ für $h \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar sind.

Offenbar ist $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ abelsch. Angenommen, es gibt $z = x \otimes 1 + y \otimes i \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ mit $[z, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}] = 0$. Dann ist auch $[x \otimes 1, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}] = 0 = [y \otimes i, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}] = i[y \otimes 1, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}]$, und insbesondere $[x \otimes 1, \mathfrak{a}] = 0 = [y \otimes 1, \mathfrak{a}]$, also $x \otimes 1, y \otimes 1 \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{Z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$. Es reicht also, $x \otimes 1$ zu betrachten. Schreibe x statt $x \otimes 1$. Da ϑ auf $\mathfrak{k} \supset \mathfrak{Z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ als id bzw. $-\text{id}$ operiert, ist auch $\vartheta(x) \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{Z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$. Also ist $x + \vartheta(x) \in \mathfrak{k}$ und wegen $[x, \mathfrak{t}] = 0$ auch $x + \vartheta(x) \in \mathfrak{t}$. Ebenso ist $x - \vartheta(x) \in \mathfrak{p}$, also in \mathfrak{a} . Also ist $x \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$ und $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ ist maximal abelsch.

Es ist für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} B_{\vartheta}(\text{ad } \vartheta(x))(y), z) &= -B([\vartheta(x), y], \vartheta(z)) = B(y, [\vartheta(x), \vartheta(z)]) \\ &= B(y, \vartheta([x, z])) = -B_{\vartheta}(y, (\text{ad } x)(z)) \\ &= -B_{\vartheta}((\text{ad } x)^t(y), z), \end{aligned}$$

also $\text{ad } x = -(\text{ad } \vartheta(x))^t$ bezüglich dem Skalarprodukt B_{ϑ} . Also sind alle Elemente von $\text{ad } \mathfrak{a}$ symmetrisch mit reellen Einträgen und alle Elemente von $\text{ad } \mathfrak{t}$ schiefssymmetrisch, also diagonalisierbar über \mathbb{C} . Da alle Elemente von $\text{ad } \mathfrak{h}$ kommutieren, sind alle Elemente von $\text{ad } \mathfrak{a}$, $\text{ad } \mathfrak{t}$ gleichzeitig diagonalisierbar über \mathbb{C} , also alle Elemente von $\text{ad } \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar. \square

Satz 3.11. Sei \mathfrak{g} eine reelle halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine Cartan-Unteralgebra. Dann gibt es $\varphi \in \text{Int } \mathfrak{g}$ mit $\vartheta(\varphi(\mathfrak{h})) = \varphi(\mathfrak{h})$.

Beweisskizze (Beweis in [Kna96b, §6.6]). Konstruiere wie in 3.4 aus $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ eine kompakte reelle Form \mathfrak{u} und setze σ, τ als die Konjugationen von $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$ über \mathfrak{g} bzw. \mathfrak{u} . Nach Konstruktion ist $\tau(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ und τ eine Cartan-Involution. Erhalte wie im Beweis zu 3.7 $\psi := (\sigma\tau\sigma\tau)^{\frac{1}{4}} \in \text{Int } \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ mit $\psi\tau\psi^{-1}\sigma = \sigma\psi\tau\psi^{-1}$, also $\psi\tau\psi^{-1}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Mit $\sigma(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \tau(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ folgt $\psi\tau\psi^{-1}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, also $\psi\tau\psi^{-1}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Wie im Beweis zu 3.7 ist $\eta := \psi\tau\psi^{-1}$ eine Cartan-Involution von \mathfrak{g} . Dann gibt es $\varphi \in \text{Int } \mathfrak{g}$ mit $\vartheta = \varphi\eta\varphi^{-1}$:

Wie oben gibt es $\varphi \in \text{Int } \mathfrak{g}$ mit $\vartheta\varphi\eta\varphi^{-1} = \varphi\eta\varphi^{-1}\vartheta$, also haben die Cartan-Involutionen ϑ und $\varphi\eta\varphi^{-1}$ die gleichen Eigenräume. Wären die Eigenwerte zu den Eigenräumen unterschiedlich, etwa oBdA $\vartheta(x) = x$, $\varphi\eta\varphi^{-1}(x) = -x$ folgt

$$\begin{aligned} 0 < B_{\vartheta}(x, x) &= -B(x, \vartheta(x)) = -B(x, x) \\ 0 < B_{\varphi\eta\varphi^{-1}}(x, x) &= -B(x, \varphi\eta\varphi^{-1}(x)) = B(x, x), \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Also stimmen auch die Eigenwerte zu den Eigenräumen überein und $\vartheta = \varphi\eta\varphi^{-1}$. Also ist

$$\vartheta(\varphi(\mathfrak{h})) = \varphi\eta\varphi^{-1}\varphi(\mathfrak{h}) = \varphi\eta(\mathfrak{h}) = \varphi(\mathfrak{h}).$$

Definition 3.12. Sei \mathfrak{g} eine reelle halbeinfache Lie-Algebra, ϑ eine Cartan-Involution, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ die korrespondierende Cartan-Zerlegung, $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine Cartan-Unteralgebra und $\varphi \in \text{Int } \mathfrak{g}$, sodass $\vartheta\varphi(\mathfrak{h}) = \varphi(\mathfrak{h})$. Die **kom-
pakte Dimension** und die **nicht-kompakte Dimension** von \mathfrak{h} sei jeweils die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 bzw. -1 von $\vartheta|_{\varphi(\mathfrak{h})}$. Die Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ heißt **maximal kompakt**, wenn sie unter allen Cartan-Unteralgebren die größte kompakte Dimension hat, und **maximal nicht-kompakt**, wenn sie unter allen Cartan-Unteralgebren die größte nicht-kompakte Dimension hat.

Bemerkung 3.13. Die kompakte bzw. nicht-kompakte Dimension einer Cartan-Unteralgebra ist unabhängig von der Wahl von $\varphi \in \text{Int } \mathfrak{g}$ mit $\varphi(\mathfrak{h})$ invariant unter der Cartan-Involution ϑ .

Definition 3.14. Sei $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine ϑ -invariante Cartan-Unteralgebra einer reellen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Eine Wurzel $\alpha \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ heißt **reell**, falls $\alpha(\mathfrak{h}) \subset \mathbb{R}$, **imaginär**, falls $\alpha(\mathfrak{h}) \subset i\mathbb{R}$ und sonst **komplex**.

Proposition 3.15. Sei $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine ϑ -invariante Cartan-Unteralgebra einer reellen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} , und $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ die korrespondierende

Cartan-Zerlegung. Für eine Wurzel $\alpha \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ ist $\vartheta\alpha$ mit $\vartheta\alpha(h) := \alpha(\vartheta(h))$ eine Wurzel, α ist reellwertig auf $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ und rein imaginär auf $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$. Ist α imaginär, folgt $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\alpha} \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ (dann heißt α **kompakt**) oder $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\alpha} \subset \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ (dann heißt α **nicht-kompakt**).

Beweis. Sei $x_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ mit $[h, x_{\alpha}] = \alpha(h)x_{\alpha}$ für alle $h \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Dann ist

$$[h, \vartheta(x_{\alpha})] = \vartheta([\vartheta(h), x_{\alpha}]) = \vartheta(\alpha(\vartheta(h))x_{\alpha}) = \alpha(\vartheta(h))\vartheta(x_{\alpha}),$$

also $\vartheta(x_{\alpha}) \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\vartheta\alpha}$.

Wie oben sind die Elemente von $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ symmetrisch bezüglich B_{ϑ} und die Elemente von $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ schiefssymmetrisch bezüglich B_{ϑ} . Eine Wurzel α bildet Elemente $h \in \mathfrak{h}$ ab auf die Eigenwerte von $\text{ad } h$, die für $h \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ reell sind und für $h \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ rein imaginär.

Ist nun α imaginär, verschwindet α auf $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$, also ist $\vartheta\alpha = \alpha$ und $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\alpha}$ invariant unter ϑ . Da $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\alpha}$ eindimensional ist, ist \mathfrak{g}_{α} Eigenraum von ϑ , also $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\alpha} \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ oder $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\alpha} \subset \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$. \square

Satz 3.16. Sei $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine ϑ -invariante Cartan-Unteralgebra einer reellen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Es gelten:

- \mathfrak{h} ist genau dann maximal kompakt, wenn \mathfrak{h} keine reellen Wurzeln enthält.
- \mathfrak{h} ist genau dann maximal nicht-kompakt, wenn \mathfrak{h} keine nicht-kompakten Wurzeln enthält.

Beweis. Mittels Cayley-Transformationen [Kna96b, §6.7] lassen sich Cartan-Unteralgebren von \mathfrak{g} aus \mathfrak{h} konstruieren, mit höherer kompakter Dimension, falls \mathfrak{h} eine reelle Wurzel enthält, und mit höherer nicht-kompakter Dimension, falls \mathfrak{h} eine nicht-kompakte Wurzel enthält.

Sei nun $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ die zu ϑ korrespondierende Cartan-Zerlegung und $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ die Zerlegung von \mathfrak{h} in Eigenräume von ϑ zum Eigenwert 1 bzw. -1 . Ferner sei $\Phi \subset (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ das Wurzelsystem zu $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \leq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, und $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\alpha}$ die

Zerlegung in Gewichtsräume. Da $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \leq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ als Cartan-Unteralgebra abelsch ist, ist auch \mathfrak{h} abelsch.

Falls \mathfrak{h} keine reellen Wurzeln enthält, folgt also

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Phi \\ \alpha \text{ reell}}} (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\alpha} = \mathfrak{h},$$

also $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{t}$. Damit ist \mathfrak{t} maximal abelsch in \mathfrak{k} , und da jede Cartan-Unteralgebra von \mathfrak{g} abelsch ist, gibt es keine mit höherer kompakter

Dimension.

Falls \mathfrak{h} keine nicht-kompakten Wurzeln enthält, folgt ebenso

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}) &= \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Phi \\ \alpha \text{ imaginär}}} (\mathfrak{g})_{\alpha} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Phi \\ \alpha \text{ kompakt}}} (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\alpha}, & \text{also} \\
 \mathfrak{p} \cap \mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}) &= \mathfrak{g} \cap (\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a})) \\
 &= \mathfrak{g} \cap \left(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \left(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Phi \\ \alpha \text{ kompakt}}} \overbrace{(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\alpha}}^{\subset \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}} \right) \right) \\
 &= \mathfrak{g} \cap (\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{a}.
 \end{aligned}$$

Wie oben ist \mathfrak{a} maximal abelsch in \mathfrak{p} und somit \mathfrak{h} maximal nicht-kompakt. \square

4 Satake-Diagramme

Satz 4.1. Sei $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ für eine reelle halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} eine maximal nicht-kompakte Cartan-Unteralgebra, $\Phi \subset (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ das zugehörige Wurzelsystem und Φ_0 die Teilmenge der imaginären⁸ Wurzeln. Sei ferner σ die Konjugation von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ über \mathfrak{g} , die mittels der Killingform auf $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ fortgesetzt wird.

Dann ist Φ_0 ein Wurzelsystem und es existiert eine Basis $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ von Φ , sodass $\Delta_0 = \{\alpha_{l-l_0+1}, \dots, \alpha_l\}$ Basis von Φ_0 ist. Außerdem gilt für $i \in \{1, \dots, l-l_0\}$:

$$\sigma(\alpha_i) = \alpha_{i'} + \sum_{j=l-l_0+1}^l c_{ij} \alpha_j$$

für $i' \in \{1, \dots, l-l_0\}$, $(i')' = i$ und $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ für $j \in \{l-l_0, \dots, l\}$.

Beweis [Sat60, §1.1, Lem. 1]. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ die entsprechende Cartan-Zerlegung von \mathfrak{g} . Schreibe $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. Nach Proposition 3.15 sind alle Wurzeln reellwertig auf $\mathfrak{h}_0 := i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, es kann also Φ als Teilmenge von $(\mathfrak{h}_0)^*$ aufgefasst werden. Für $\alpha \in \Phi$ und x_α aus dem Wurzelraum \mathfrak{g}_α ist für $h \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} [h, \sigma(x_\alpha)] &= \sigma(\sigma([h, \sigma(x_\alpha)])) = \sigma([\sigma(h), x_\alpha]) = \sigma(\alpha(\sigma(h))x_\alpha) \\ &= \overline{\alpha(\sigma(h))} \cdot \sigma(x_\alpha) = (\sigma(\alpha))(h) \cdot \sigma(x_\alpha), \end{aligned}$$

also $\sigma(x_\alpha) \in \mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}$. Somit ist $\sigma(\alpha)$ eine Wurzel und $\sigma(\Phi) = \Phi$.

Sei außerdem v_1, \dots, v_k eine Basis von \mathfrak{a} , die durch eine Basis v_{k+1}, \dots, v_l von $i\mathfrak{t}$ zu einer Basis von \mathfrak{h}_0 ergänzt wird. Auf $(\mathfrak{h}_0)^*$ sei nun folgendermaßen eine **lexikographische Ordnung** definiert: Für $\alpha \in (\mathfrak{h}_0)^*$ sei $\alpha > 0$, falls es $i \in \{1, \dots, l\}$ gibt mit $\alpha(v_j) = 0$ für $j < i$ und $\alpha(v_i) > 0$. Knapp [Kna96b, Prop. 2.49] zeigt, dass dann eine Basis $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ von Φ existiert, sodass die bezüglich der lexikographischen Ordnung positiven Wurzeln genau die positiven Wurzeln bezüglich Δ sind. Ferner ist $\Delta \cap \Phi_0$ eine Basis von Φ_0 , sei also oBdA $\Delta \cap \Phi_0 = \{\alpha_{l-l_0+1}, \dots, \alpha_l\}$.

Schreibe nun $\sigma(\alpha_i) = \sum_{j=1}^l c_{ij} \alpha_j$ mit $c_{ij} \in \mathbb{Z}$. Für $\alpha_i \notin \Phi_0$ ist $\sigma(\alpha_i) \neq -\alpha_i$ und α_i verschwindet nicht auf \mathfrak{a} . In diesem Fall ist $\sigma(\alpha_i)|_{\mathfrak{a}} = \alpha_i|_{\mathfrak{a}}$, also $\sigma(\alpha_i)$

⁸Da \mathfrak{h} maximal nicht-kompakt ist, sind das genau die kompakten Wurzeln.

wieder eine positive Wurzel und alle $c_{ij} \geq 0$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \sigma(\sigma(\alpha_i)) = \sum_{j=1}^l c_{ij} \sigma(\alpha_j) \\
&= \sum_{j=1}^{l-l_0} c_{ij} \sigma(\alpha_j) + \sum_{j=l-l_0+1}^l c_{ij} \sigma(\alpha_j) \\
&= \sum_{j=1}^{l-l_0} \sum_{k=1}^l c_{ij} c_{jk} \alpha_k - \sum_{j=l-l_0+1}^l c_{ij} \alpha_j
\end{aligned}$$

Somit folgt, dass es genau ein $j \in \{1, \dots, l-l_0\}$ gibt mit $c_{ij} > 0$, also

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha_i) &= \alpha_{i'} + \sum_{j=l-l_0+1}^l c_{ij} \alpha_j && \text{und} \\
\sigma(\sigma(\alpha_i)) &= \alpha_{(i')'} + \sum_{j=l-l_0+1}^l (c_{i'j} - c_{ij}) \alpha_j
\end{aligned}$$

und wegen $\sigma(\sigma(\alpha_i)) = \alpha_i$ folgt $(i')' = i$. \square

Definition 4.2. Sei $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine maximal nicht-kompakte Cartan-Unteralgebra einer reellen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} und Δ wie in Satz 4.1. Das zugehörige **Satake-Diagramm** sei das Dynkin-Diagramm von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezüglich $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ und Δ zusammen mit folgenden Zusatzinformationen:

- Kompakte Wurzeln werden ausgemalt: \bullet
- Reelle Wurzeln werden nicht ausgemalt: \circ
- Paare von komplexen Wurzeln $\alpha_i, \alpha_{i'}$ wie in Satz 4.1 werden mit einem Pfeil verbunden: \leftrightarrow

Satz 4.3. Seien $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ reelle Formen von komplexen einfachen Lie-Algebren $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$. Die Satake-Diagramme von $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ sind dann unabhängig von der Wahl einer maximal nicht-kompakten Cartan-Unteralgebra und der Wahl der Basis des Wurzelsystems von $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$. Ferner ist genau dann $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$, wenn \mathfrak{g}_1 und \mathfrak{g}_2 das gleiche Satake-Diagramm haben.

Beweisskizze. Wähle maximal nicht-kompakte Unteralgebren $\mathfrak{h}_1 \leq \mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{h}_2 \leq \mathfrak{g}_2$ und Basen Δ_1, Δ_2 der Wurzelsysteme in $\mathfrak{h}_1^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_2^{\mathbb{C}}$, sodass \mathfrak{g}_1 und \mathfrak{g}_2 das gleiche Satake-Diagramm haben. Dann haben die Satake-Diagramme das gleiche unterliegende Dynkin-Diagramm und da Cartan-Unteralgebren

komplexer einfacher Lie-Algebren konjugiert sind, kann nach Satz 2.15 oBdA $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}} =: \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ und $\mathfrak{h}_1^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_2^{\mathbb{C}} =: \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ angenommen werden.

Araki [Ara62, Kor. 2.15] zeigt unter dieser Voraussetzung, dass genau dann $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$, wenn die entsprechenden Systeme einfacher Wurzeln bezüglich der Konjugation von \mathfrak{g} über \mathfrak{g}_1 bzw. \mathfrak{g}_2 sind.

Bemerkung 4.4. Nicht jedes nach Definition 4.2 theoretisch denkbare Satake-Diagramm gehört auch tatsächlich zu einer reellen Form einer komplexen einfachen Lie-Algebra. Araki [Ara62, §4-5] beweist notwendige und hinreichende Kriterien, die eine Auflistung aller Satake-Diagramme, die zu einer reellen Form einer komplexen einfachen Lie-Algebra gehören, möglich machen.

5 Vogan-Diagramme

Satz 5.1. *Sei $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine ϑ -invariante maximal kompakte Cartan-Unteralgebra einer reellen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} , Φ das zugehörige Wurzelsystem zu $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Dann hat Φ eine Basis Δ mit $\vartheta(\Delta) = \Delta$. Die Fixpunkte von ϑ sind dann genau die imaginären Wurzeln.*

Beweis. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ die zu ϑ korrespondierende Cartan-Zerlegung. Schreibe $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. Fasse Φ wie oben als Teilmenge von $\mathfrak{h}_0 = i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ auf. Da \mathfrak{h} maximal kompakt ist, enthält Φ keine reellen Wurzeln, also keine Wurzel, die auf \mathfrak{t} verschwindet. Wie in Satz 4.1 erhält man also eine Basis Δ , bezüglich der ϑ die positiven Wurzeln permutiert, also auch die einfachen Wurzeln. Die Fixpunkte von ϑ sind diejenigen Wurzeln, die auf \mathfrak{a} verschwinden, also die imaginären Wurzeln. \square

Definition 5.2. Sei $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine ϑ -invariante maximal kompakte Cartan-Unteralgebra einer reellen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} mit Wurzelsystembasis Δ , sodass $\vartheta(\Delta) = \Delta$ (insbesondere induziert ϑ einen Automorphismus des Dynkin-Diagramms zu $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$). Das zugehörige **Vogan-Diagramm** ist das Dynkin-Diagramm von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezüglich $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ mit folgenden Zusatzinformationen:

- Die nicht-kompakten einfachen Wurzeln $\alpha \in \Delta$ mit $\vartheta(\alpha) = \alpha$ werden ausgemalt: \bullet
- Die kompakten einfachen Wurzeln $\alpha \in \Delta$ mit $\vartheta(\alpha) = \alpha$ werden nicht ausgemalt: \circ
- Je zwei Wurzeln aus nicht-trivialen Orbits unter ϑ werden mit einem Pfeil verbunden: \leftrightarrow

Bemerkung 5.3. Es gibt für Vogan-Diagramme keine analoge Aussage zu Satz 4.3, lediglich ein Teil dieser Aussage stimmt: Knapp [Kna96b, Thm. 6.74] zeigt, dass zwei halbeinfache reelle Lie-Algebren, denen übereinstimmende Vogan-Diagramme zugeordnet werden können, bereits isomorph sind. Tatsächlich können dagegen verschiedene Vogan-Diagramme zu der gleichen halbeinfachen reellen Lie-Algebra gehören. Diese Redundanz wird durch den folgenden Satz weitgehend aufgelöst, für die Ausnahmetypen löst Knapp [Kna96b, §VI.10] die übrige Redundanz.

Satz 5.4 (Satz von Borel und de Siebenthal). *Sei $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine ϑ -invariante maximal kompakte Cartan-Unteralgebra einer reellen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Die Basis Δ des Wurzelsystems in $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ kann so gewählt werden, dass Δ maximal eine nicht-kompakte Wurzel enthält.*

Beweisskizze ([Kna96a, Lem. 2], [Kna96b, Thm. 6.96]). Schreibe wie oben $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ und betrachte die Menge Φ_0 der imaginären Wurzeln. Der von Φ_0 erzeugte Untervektorraum von $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ korrespondiert zu einem Untervektorraum $V \subset i\mathfrak{t}$. Sei $\Lambda \subset V$ die Menge der Elemente, die jede Wurzel aus Φ_0 auf eine ganze Zahl abbildet, und jede nicht-kompakte Wurzel auf eine ungerade ganze Zahl abbildet.

Wählt man eine Basis $\Delta_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ von Φ_0 , und bildet die duale Basis $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ mit $(\alpha_i, \omega_j) = \delta_{ij}$ für das induzierte Skalarprodukt (\cdot, \cdot) auf V^* , erhält man

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ \alpha_i \text{ nicht-} \\ \text{kompakt}}} \omega_i \in \Lambda,$$

insbesondere $\Lambda \neq \emptyset$.

Wähle nun $H_0 \in \Lambda$ mit kleinstmöglicher Norm und eine Basis Δ von Φ_0 , sodass H_0 dominant ist. Damit erhält man $H_0 = 0$ oder $H_0 = \omega_i$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$. Im Fall $H_0 = 0$ enthält Δ keine nicht-kompakten Wurzeln, im Fall $H_0 = \omega_i$ ist α_i die einzige nicht-kompakte Wurzel in Δ .

Satz 5.5. *Zu jedem nach Definition 5.2 möglichen Vogan-Diagramm existiert eine reelle halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} , der dieses Diagramm zugeordnet werden kann.*

Beweisskizze ([Kna96b, Thm. 6.88]). Mit Satz 2.16 erhält man eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, die als Komplexifizierung von \mathfrak{g} fungieren soll. Konstruiere aus einer geeigneten Basis einer kompakten reellen Form wie in Satz 3.4, sowie den Informationen aus dem Vogan-Diagramm eine reelle Form \mathfrak{g} von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

6 Gegenüberstellung der Ansätze

Bump [Bum13, Tabelle 28.1], Helgason [Hel78, Kap. X] und Knapp [Kna96b, §6.10] liefern folgende Klassifizierung und Zuordnung von reellen Formen $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ komplexer einfacher Lie-Algebren zu ihren Satake- und Vogan-Diagrammen:

Typ	\mathfrak{g}	\mathfrak{k}	Satake-Diagramm	Vogan-Diagramm
A	$\mathfrak{su}(n+1)$	$\mathfrak{su}(n+1)$	$\bullet \bullet \cdots \bullet \bullet$	$\circ \circ \cdots \circ \circ$
A I	$\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}),$ $n \equiv 1 \pmod{2}$	$\mathfrak{so}(n+1)$	$\circ \circ \cdots \circ \circ$	
A I	$\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}),$ $n \equiv 0 \pmod{2}$	$\mathfrak{so}(n+1)$	$\circ \circ \cdots \circ \circ$	
A II	$\mathfrak{sl}(\frac{1}{2}(n+1), \mathbb{H}),$ $n \equiv 1 \pmod{2}$	$\mathfrak{sp}(n+1)$	$\bullet \circ \cdots \circ \bullet$	
A III	$\mathfrak{su}(2, n-1),$ $n \geq 4$			$\circ \bullet \cdots \circ \circ$
A III	$\mathfrak{su}(3, n-2),$ $n \geq 6$			$\circ \circ \bullet \cdots \circ \circ$
A III	\vdots		\vdots	\vdots
A III	$\mathfrak{su}(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1),$ $n \equiv 0 \pmod{2}$			$\circ \cdots \circ \bullet \cdots \circ \cdots \circ$
A III	$\mathfrak{su}(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}),$ $n \equiv 1 \pmod{2}$			$\circ \cdots \circ \bullet \cdots \circ \cdots \circ$
A IV	$\mathfrak{su}(1, n),$ $n \geq 2$			$\bullet \circ \cdots \circ \circ$

Typ	\mathfrak{g}	\mathfrak{k}	Satake-Diagramm	Vogan-Diagramm
B	$\mathfrak{so}(2n+1)$	$\mathfrak{so}(2n+1)$	$\bullet \bullet \cdots \bullet \bullet \rightleftarrows \bullet$	$\circ \circ \cdots \circ \circ \rightleftarrows \circ$
B I	$\mathfrak{so}(2, 2n-1),$ $n \geq 2$		$\circ \circ \cdots \circ \circ \rightleftarrows \circ$	$\bullet \circ \cdots \circ \circ \rightleftarrows \circ$
B I	$\mathfrak{so}(4, 2n-3),$ $n \geq 3$		$\circ \circ \cdots \circ \circ \rightleftarrows \bullet$	$\circ \bullet \circ \cdots \circ \circ \rightleftarrows \circ$
B I	$\mathfrak{so}(6, 2n-5),$ $n \geq 4$		$\circ \circ \cdots \circ \bullet \rightleftarrows \bullet$	$\circ \circ \bullet \cdots \circ \circ \rightleftarrows \circ$
B I	\vdots		\vdots	\vdots
B I	$\mathfrak{so}(2n-2, 3),$ $n \geq 2$		$\circ \circ \bullet \cdots \bullet \rightleftarrows \bullet$	$\circ \circ \cdots \circ \bullet \rightleftarrows \bullet$
B II	$\mathfrak{so}(2n, 1)$		$\circ \bullet \cdots \bullet \bullet \rightleftarrows \bullet$	$\circ \circ \cdots \circ \circ \rightleftarrows \bullet$
C	$\mathfrak{sp}(2n)$	$\mathfrak{sp}(2n)$	$\bullet \bullet \cdots \bullet \bullet \leftleftarrow \bullet$	$\circ \circ \cdots \circ \circ \leftleftarrow \circ$
C I	$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$		$\circ \circ \cdots \circ \circ \leftleftarrow \circ$	$\circ \circ \cdots \circ \circ \leftleftarrow \bullet$
C II	$\mathfrak{sp}(2n-2, 2),$ $n \geq 3$	$\mathfrak{sp}(2n-2)$ $\oplus \mathfrak{sp}(2)$	$\bullet \circ \bullet \cdots \bullet \bullet \leftleftarrow \bullet$	$\bullet \circ \cdots \circ \circ \leftleftarrow \circ$ oder $\circ \circ \cdots \circ \bullet \leftleftarrow \bullet$
C II	\vdots		\vdots	\vdots
C II	$\mathfrak{sp}(n+1, n-1),$ $n \equiv 1 \pmod{2},$ $n \geq 3$	$\mathfrak{sp}(n+1)$ $\oplus \mathfrak{sp}(n-1)$	$\bullet \circ \bullet \cdots \circ \bullet \circ \leftleftarrow \bullet$	$\circ \cdots \circ \bullet \circ \cdots \circ \leftleftarrow \circ$ oder $\circ \cdots \circ \bullet \circ \cdots \circ \leftleftarrow \circ$
C II	$\mathfrak{sp}(n, n),$ $n \equiv 0 \pmod{2},$ $n \geq 4$	$\mathfrak{sp}(n)$ $\oplus \mathfrak{sp}(n)$	$\bullet \circ \bullet \cdots \circ \bullet \leftleftarrow \bullet$	$\circ \cdots \circ \bullet \circ \cdots \circ \leftleftarrow \circ$

Typ	\mathfrak{g}	\mathfrak{k}	Satake-Diagramm	Vogan-Diagramm
D	$\mathfrak{so}(2n)$	$\mathfrak{so}(2n)$		
D I	$\mathfrak{so}(2n-2, 2)$, $n \geq 4$			
D I	$\mathfrak{so}(2n-3, 3)$, $n \geq 5$			oder
D I	$\mathfrak{so}(2n-4, 4)$, $n \geq 6$			oder
D I	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
D I	$\mathfrak{so}(n+2, n-2)$, $n \equiv 0 \pmod{2}$, $n \geq 6$			$\frac{n}{2} - 2$ $\frac{n}{2} - 1$
D I	$\mathfrak{so}(n+2, n-2)$, $n \equiv 1 \pmod{2}$, $n \geq 5$			oder $\frac{n-5}{2}$ $\frac{n-1}{2}$
D I	$\mathfrak{so}(n+1, n-1)$, $n \equiv 0 \pmod{2}$, $n \geq 4$			oder $\frac{n-2}{2}$ $\frac{n-1}{2}$
D I	$\mathfrak{so}(n+1, n-1)$, $n \equiv 1 \pmod{2}$, $n \geq 5$			oder $\frac{n-3}{2}$ $\frac{n-3}{2}$

Typ	\mathfrak{g}	\mathfrak{k}	Satake-Diagramm	Vogan-Diagramm
D I	$\mathfrak{so}(n,n)$, $n \equiv 0 \pmod{2}$			
D I	$\mathfrak{so}(n,n)$, $n \equiv 1 \pmod{2}$			
D II	$\mathfrak{so}(2n-1,1)$			
D III	$\mathfrak{so}^*(2n)$, $n \equiv 0 \pmod{2}$			
D III	$\mathfrak{so}^*(2n)$, $n \equiv 1 \pmod{2}$			
E	\mathfrak{e}_6	\mathfrak{e}_6		
E	\mathfrak{e}_7	\mathfrak{e}_7		
E	\mathfrak{e}_8	\mathfrak{e}_8		
E I		$\mathfrak{sp}(8)$		
E II		$\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$		
E III		$\mathfrak{so}(10) \oplus \mathbb{R}$		
E IV		\mathfrak{f}_4		
E V		$\mathfrak{su}(8)$		
E VI		$\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$		
E VII		$\mathfrak{e}_6 \oplus \mathbb{R}$		
E VIII		$\mathfrak{so}(16)$		
E IX		$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$		

Typ	\mathfrak{g}	\mathfrak{k}	Satake-Diagramm	Vogan-Diagramm
F	\mathfrak{f}_4	\mathfrak{f}_4		
F I		$\mathfrak{sp}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$		
F II		$\mathfrak{so}(9)$		
G	\mathfrak{g}_2	\mathfrak{g}_2		
G I		$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$		

Aus dieser Tabelle entstehen noch keine offensichtlichen Beziehungen zwischen den Diagrammen: Zwar hat eine reelle Form einer komplexen einfachen Lie-Algebra des Typs A_n oder E_6 genau dann komplexe Wurzeln in der Komplexifizierung einer maximal kompakten Cartan-Unteralgebra, wenn dies nicht für eine maximal nicht-kompakte Cartan-Unteralgebra gilt. Für reelle Formen einer komplexen einfachen Lie-Algebra des Typs D_n gibt es jedoch keine derartige Beziehung.

Stichwortverzeichnis

- ad-nilpotent, 5
- exp, 17
- absteigende Zentralreihe, 4
- Cartan-Involution, 22
- Cartan-Kriterien, 7
- Cartan-Matrix, 16
- Cartan-Unteralgebra, 10
- Cartan-Zahl, 15
- Cartan-Zerlegung, 23
- Darstellung, 3
 - adjungierte, 4
 - invarianter Unterraum, 3
 - irreduzibel, 4
 - vollständig reduzibel, 4
- derivierte Reihe, 4
- Dynkin-Diagramm, 16
- einfache Wurzeln, 16
- Exponentialfunktion, 17
- Ideal, 3
- innerer Automorphismus, 17
- Jacobi-Identität, 3
- Kette von Wurzeln, 15
- Killingform, 6
- klassische Matrixalgebren, 9
- kompakte Dimension, 24
 - nicht-kompakte Dimension, 24
- Komplexifizierung, 5
- Konjugation, 5
- konjugiert, 17
- lexikographische Ordnung, 27
- Lie-Algebra, 3
 - abelsch, 3
 - auffösbar, 5
 - einfach, 3
 - halbeinfach, 5
 - Homomorphismus, 3
 - kompakt, 17
 - nilpotent, 5
 - Unteralgebra, 3
- Lie-Klammer, 3
- maximal kompakt, 24
- maximal nicht-kompakt, 24
- Normalisator, 3
- reelle Form, 5
- Satake-Diagramm, 28
- Satz von Engel, 5
- Satz von Lie, 6
- Serre-Relationen, 18
- verallgemeinerter Gewichtsraum, 10
- Vogan-Diagramm, 30
- Wurzel
 - imaginär, 24
 - kompakt, 25
 - komplex, 24
 - nicht-kompakt, 25
 - reell, 24
- Wurzeln, 12
- Wurzelraumzerlegung, 12
- Wurzelsystem
 - abstrakt, 15
 - Basis, 16
 - irreduzibel, 15
 - Isomorphie, 16
 - reduzibel, 15
 - reduziert, 15
- Zentralisator, 3
- Zentrum, 3
- zerfallende reelle Form, 20

Literatur

- [Ara62] Shôrô Araki. On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces. *J. Math. Osaka City Univ.*, 13:1–34, 1962.
- [Bum13] Daniel Bump. *Lie groups*, volume 225 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [Hel78] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 80 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.
- [Hum78] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. Second printing, revised.
- [Kna96a] A. W. Knaapp. A quick proof of the classification of simple real Lie algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(10):3257–3259, 1996.
- [Kna96b] Anthony W. Knaapp. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.
- [Sat60] Ichirô Satake. On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces. *Ann. of Math. (2)*, 71:77–110, 1960.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Bachelorarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Düsseldorf, den 22. Mai 2025

Marek Kasper