Faire und unfaire Preise für Finanzderivate

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
Mathematisches Institut, HHU

Nacht der Wissenschaft 2024

13.09.2024

Einführung

- Nehmen wir an, Sie führen eine Bäckerei.
- Sie wollen expandieren, fürchten aber steigende Preise.

Weizenpreisentwicklung in EUR/Tonne (Quelle: finanzen.net)

Einführung

Ein Investor macht Ihnen folgendes Angebot:

Vertrag

Sie erhalten das *Recht*, eine bestimmte Menge Weizen in einem Jahr zu einem heute festgelegten Preis zu kaufen.

Frage

Wieviel sollte Ihnen ein solcher Vertrag wert sein?

Begriffsbildung

- Ein solcher Vertrag nennt sich europäische Call-Option.
- Der Wert der Option leitet sich von einem Underlying (z.B. Weizen) ab ($\rightarrow$ Derivat).
- Die Option hat einen Ausübungspreis K (Strike) und eine Laufzeit T.

Beispiele für Underlyings sind *Aktien*, *Indizes*, *Währungen*, *Rohstoffe*, *Wetter*, *Optionen*, ...

Einsatzgebiete

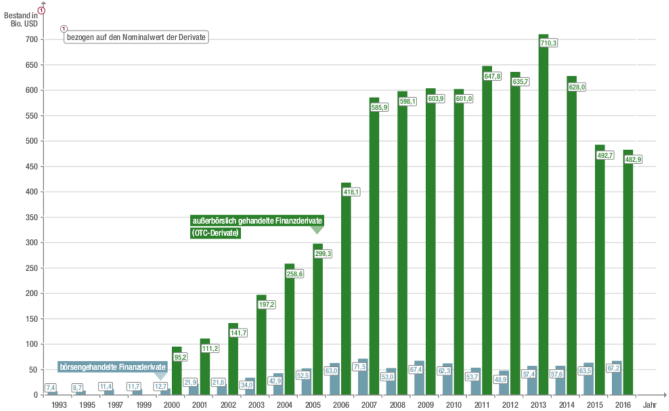
- Optionen dienen zur Absicherung von Kursrisiken.
- Sie können aber auch Spekulationsobjekte sein!

Volumen des Derivatehandels

hhu
Heinrich Heine
Universität Düsseldorf

Börsengehandelte und außerbörslich gehandelte Finanzderivate

Bestand in absoluten Zahlen, weltweit 1993 bis 2016



Quelle: Bank for International Settlements (BIS): Exchange-traded derivatives statistics, Semiannual OTC derivatives statistics

Der Wert einer europäischen Call-Option

Seien

- S_T der Wert des Underlyings am Laufzeitende und
- K der Strike-Preis.

Dann ist der Pay-Off der Call-Option gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & \text{falls } S_T > K, \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} = (S_T - K)_+.$$

Idee: Wir bilden ein Modell für die Zufallsvariable S_T und berechnen den Erwartungswert.

Call-Preis

$$W = \mathbb{E}(S_T - K)_+$$

Ein Rechenbeispiel

Modell für S_T

$$S_0 = 40\text{ €} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\frac{2}{3}} & S_T = 80\text{ €} \\ \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} & S_T = 20\text{ €} \end{matrix}$$

Für einen Strike von $K = 50$ € ergibt sich

$$W = \frac{2}{3} \cdot (80\text{ €} - 50\text{ €}) + \frac{1}{3} \cdot 0\text{ €} = 20\text{ €}.$$

Angebot

Der Investor bietet Ihnen eine Call-Option mit Strike 50 € zum Preis von 15 €.

Frage

Greifen Sie zu?

Der Investor verkauft die Option und kauft zugleich das Underlying für 20 €. **Bilanz:**

Szenario $\nearrow$	Szenario $\searrow$
+15 €	+15 €
–20 €	–20 €
–80 €	0 €
+50 €	0 €
+40 €	+10 €
5 €	5 €

Märkte und Arbitrage

Wir sehen:

- 15 € war ein unfairer Preis für die Option.
- Der faire Preis wäre 10 € gewesen.
- Märkte sind (theoretisch!) arbitragefrei: sie erlauben *keinen risikolosen Gewinn*.

Beobachtung

Unsere Call-Preisformel $W = \mathbb{E}(S_T - K)_+$ ist richtig, wenn das Modell $\mathbb{E}S_T = S_0$ erfüllt.

Ein Rechenbeispiel

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Modell für S_T

$$S_0 = 40\,€ \;\begin{array}{l} \xrightarrow{\frac{2}{3}} S_T = 80\,€ \\ \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} S_T = 20\,€ \end{array}$$

Für einen Strike von $K = 50\,€$ ergibt sich

$$W = \frac{2}{3} \cdot (80\,€ - 50\,€) + \frac{1}{3} \cdot 0\,€ = 20\,€.$$

Angebot

Der Investor bietet Ihnen eine Call-Option mit Strike 50 € zum Preis von 15 €.

Frage

Greifen Sie zu?

Der Investor verkauft die Option und kauft zugleich das Underlying für 20 €. **Bilanz:**

Szenario ↗	Szenario ↘
+15 €	+15 €
–20 €	–20 €
–80 €	0 €
+50 €	0 €
+40 €	+10 €
5 €	5 €

Ein Rechenbeispiel

Modell für S_T

$$S_0 = 40\text{ €} \begin{array}{l} \xrightarrow{\frac{1}{3}} S_T = 80\text{ €} \\ \xrightarrow[\frac{2}{3}]{} S_T = 20\text{ €} \end{array}$$

Für einen Strike von $K = 50$ € ergibt sich

$$W = \frac{1}{3} \cdot (80\text{ €} - 50\text{ €}) + \frac{2}{3} \cdot 0\text{ €} = 10\text{ €}.$$

Angebot

Der Investor bietet Ihnen eine Call-Option mit Strike 50 € zum Preis von 15 €.

Frage

Greifen Sie zu?

Der Investor verkauft die Option und kauft zugleich das Underlying für 20 €. **Bilanz:**

Szenario ↗	Szenario ↘
+10 €	+10 €
–20 €	–20 €
–80 €	0 €
+50 €	0 €
+40 €	+10 €
0 €	0 €

Die Black–Scholes-Formel (für Expert*innen)

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Wir nehmen an, dass

$$(S_{t+\Delta} - S_t) \sim S_t \cdot (X_{t+\Delta} - X_t),$$

wobei X_t ein Wienerprozess ist, d.h. die Zuwächse $X_{t+\Delta} - X_t$ sind $\mathcal{N}(0, \Delta)$-verteilt.
Dies führt auf die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = \sigma \cdot S_t \, dX_t.$$

Lösung ist die geometrische Brownsche Bewegung. Sie erfüllt $\mathbb{E}S_T = S_0$.

Black–Scholes-Formel für den Call-Preis *(Wirtschaftsnobelpreis 1997)*

$$W = \mathbb{E}(S_T - K)_+ = \Phi(d_+) \cdot S_0 - \Phi(d_-) \cdot K$$

$$\text{mit } \; d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \frac{\sigma^2}{2} T \right) \; \text{ und } \; \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Unsere Studiengänge

Bachelor und Master

Mathematik (und Anwendungsgebiete)

Bachelor und Master

Finanz- und Versicherungsmathematik

- Beginn zum Winter- und Sommersemester möglich,
- sehr gutes Betreuungsverhältnis,
- hervorragende Berufsaussichten.