Einführung in die Topologie

Holger Kammeyer (holger.kammeyer@hhu.de)

Inhalte:

V Einführung in die Kategorientheorie

1. Kategorien
2. Funktoren
3. Natürliche Transformationen
4. Adjunktion
5. Limes und Kolimes

VI Berechnung von Fundamentalgruppen

1. Das Fundamentalgruppoid
2. Der Satz von Seifert - van Kampen
3. Beispielberechnungen von Fundamentalgruppen
4. Kofaserungen
5. Fundamentalgruppen von Anheftungen
6. Wie geht es weiter?

I Grundbegriffe der Topologie

I.1 Topologische Räume

Def. I.1.1 Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X (die sogenannten offenen Teilmengen), sodass gilt:

1.) Ist $\{U_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie offener Teilmengen, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

2.) Sind U_1 und U_2 offen, so auch $U_1 \cap U_2$.

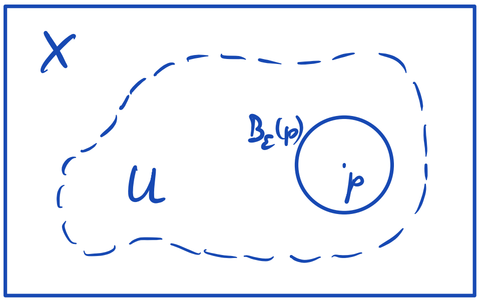
3.) Die Mengen $\emptyset$ und X sind offen.

- Man nennt $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X.
- Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.

Bspe.

- Auf jeder Menge X ist $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ (die Klumpentopologie oder triviale Topologie) und $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X) = \{U : U \subseteq X\}$ (die diskrete Topologie) eine Topologie auf X.

- Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist
$$\mathcal{O}(d) = \{U \subseteq X : \text{Für alle } p \in U \text{ existiert ein } \varepsilon > 0, \text{ sd. } B_\varepsilon(p) \subseteq U\}$$
die durch d induzierte Topologie auf X.
Hier: $B_\varepsilon(p) = \{x \in X : d(x,p) < \varepsilon\}$



Nachweis der Axiome:

1.) und 3.) sind klar.

2.) Sei $p \in U_1 \cap U_2$. Für $i=1,2$ gibt es ε_i mit $B_{\varepsilon_i}(p) \subseteq U_i$. Dann gilt $B_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}(p) \subseteq U \cap V$.

Für $X=\mathbb{R}^n$ mit $d_e(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$ nennen wir $\mathcal{O}(d_e)$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$.

Es gilt $\mathcal{O}_{\text{trivial}} \subsetneq \mathcal{O}(d_e) \subsetneq \mathcal{O}_{\text{diskret}}$ $(n \geq 1)$.

Beachte $\bigcap_{n\geq 1} B_{1/n}(0) = \{0\}$ ist nicht offen.

<u>Frage 1</u>: Wird jede Topologie von einer Metrik induziert?

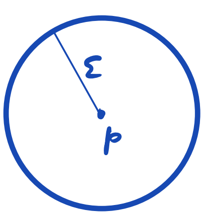
Nein: Sei $X=\{p,q\}$. Für jede Metrik d auf X ist $\{p\}$ offen, da $B_r(p)=\{p\}$ für $r=d(p,q)>0$. Also ist $(X,\mathcal{O}_{\text{trivial}})$ nicht metrisierbar.

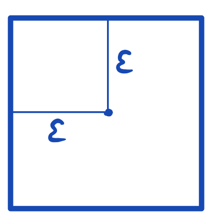
<u>Frage 2</u>: Falls eine Topologie von einer Metrik induziert wird, ist diese eindeutig?

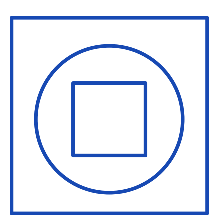
Nein: $X=\mathbb{R}^n$ mit $d_m(x,y)=\max\{|y_1-x_1|,\dots,|y_n-x_n|\}$

<u>Beh.</u>: $\mathcal{O}(d_m)=\mathcal{O}(d_e)$

<u>Bew.</u>: $B_\varepsilon(p)$ für d_e: $B_\varepsilon(p)$ für d_m:







□

Bemerkung: Anders als in einem metrischen, kann man in einem top. Raum nicht mehr ausdrücken, wie nah sich zwei Punkte $x, y \in X$ sind. Man kann aber noch ausdrücken, dass eine Folge $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ von Punkten $x_i \in X$ einem Punkt $y \in X$ beliebig nahe kommt:

$\lim_{i \to \infty} x_i = y \quad :\Leftrightarrow$ Für jede offene Menge $U \subseteq X$ mit $y \in U$ gibt es ein i_0 mit $x_i \in U$ für $i \geq i_0$.

Def I.1.2 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum, $p \in X$, $B \subseteq X$.

- Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt Umgebung von p, falls es eine offene Menge $U \subseteq V$ mit $p \in U$ gibt.
- Der Abschluss von B ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von B, also $\overline{B} := \bigcap_{A \supseteq B \text{ abg.}} A$.
- Das Innere von B ist die größte offene Untermenge von B, also $\mathring{B} := \bigcup_{U \subseteq B \text{ offen}} U$.

Def. I.1.3 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum und $B \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist $\mathcal{O}|_B := \{ U \cap B : U \subseteq X \text{ offen} \}$ die Teilraumtopologie.

Bsp.: $X = \mathbb{R}$ mit Standardtopologie, $B = [0, 2)$. Dann ist $[0, 1) = (-1, 1) \cap [0, 2)$ offen in der Teilraumtopologie von B, aber nicht in X.

$$\mathring{[0,1)} = \begin{cases} [0,1) & \text{bzgl. } \mathcal{O}|_B. \\ (0,1) & \text{" Std.top.} \end{cases}$$

$$\overline{[0,1)} = [0,1] \quad \text{bzgl. } \mathcal{O}|_B \text{ und Std. top.}$$

<u>Def. I.1.4</u> Sei $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum. Dann heißt eine Menge offener Mengen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ (Sub)-Basis der Topologie, falls jede offene Menge U Vereinigung von (endlichen Schnitten von) Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

<u>Bsp.</u> · $\mathcal{B} = \{ B_\varepsilon(p) : \varepsilon > 0, p \in \mathbb{R}^n \}$ ist eine Basis der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$,

$\mathcal{B}' = \{ B_\varepsilon(p) : \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, p \in \mathbb{Q}^n \}$ ist eine abzählbare Basis

· $\mathcal{B} = \{ \{x\} : x \in X \}$ ist Basis der diskreten Topologie auf X.

Sei X eine Menge, S eine Menge von Teilmengen von X. Dann ist

$$\mathcal{O}(S) = \left\{ U \subseteq X : \begin{array}{l} U \text{ ist Vereinigung endlicher} \\ \text{Schnitte von Mengen aus } S \end{array} \right\}$$

die von S erzeugte Topologie mit Subbasis S.

Def. I.1.5 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum, $x_0 \in X$. Eine Menge $\mathcal{U}$ von Umgebungen von x_0 heißt Umgebungsbasis von x_0, falls jede Umgebung V von x_0 eine Umgebung $U \in \mathcal{U}$ enthält.

Bsp.: Ist (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, so ist $\mathcal{U} = \{ B_r(x_0) : r \in \mathbb{Q}_{>0} \}$ eine Umgebungsbasis von x_0, d.h. metrische Räume erfüllen das

1. Abzählbarkeitsaxiom: Jeder Punkt hat eine abzählbare Umgebungsbasis.

Wie oben gesehen, erfüllt $(\mathbb{R}^n, d_e)$ sogar das

2. Abzählbarkeitsaxiom: Es gibt eine abzählbare Basis der Topologie.

Def. I.1.6 Ein top. Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt separabel, falls es eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ gibt, die dicht ist, d.h. $\overline{A} = X$.

Lemma I.1.7 Zweitabzählbar $\Rightarrow$ separabel.

Bew.: Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis. Wähle je einen Punkt für jedes $\emptyset \neq U \in \mathcal{B}$ und erhalte so die Menge $A \subseteq X$. Da $X \setminus \overline{A}$ offen und $\mathcal{B}$

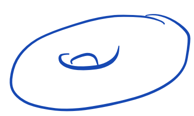
Basis ist, gibt es $U_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$ mit $X \setminus \bar{A} = \bigcup_{i \in I} U_i$, also $U_i \cap A = \emptyset$, d.h. $U_i = \emptyset$, somit $X \setminus \bar{A} = \emptyset$. $\square$

I.2 Summen und Produkte

Sei $X \sqcup Y$ die disjunkte Vereinigung von Mengen X und Y.

Def. I.2.1 Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ top. Räume. Dann ist $(X \sqcup Y, \mathcal{O}(\mathcal{O}_X \sqcup \mathcal{O}_Y))$ die top. Summe von $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

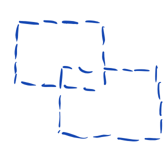
Notiz: $X, Y \subseteq X \sqcup Y$ sind zugleich offen und abgeschlossen.



Def. I.2.2 Das Produkt von $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist

$$(X \times Y, \mathcal{O}(\{U \times V : U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}))$$

Notiz: Es gilt $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$, also ist $\{U \times V : U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ eine Basis, aber i. A. keine Topologie



Sei nun $(X_i, \mathcal{O}_i)$ mit $i \in I$ eine beliebige Familie top. Räume.

Def. I.2.3 Die top. Summe von $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ ist $(\bigsqcup_{i \in I} X_i, \mathcal{O}(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i))$.

Def. I.2.4 Das Produkt von $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ ist

$$\left(\prod_{i\in I} X_i,\ \mathcal{O}\left(\left\{ pr_i^{-1}(U) : U \in \mathcal{O}_i,\ i \in I\right\}\right)\right),$$

wobei $pr_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ die Projektion auf den i-ten Faktor bezeichnet.

Notiz: Für $I = \{1, 2\}$ ist $pr_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2$, $pr_2^{-1}(U_2) = X_1 \times U_2$ und $U_1 \times X_2 \cap X_1 \times U_2 = U_1 \times U_2$, also ergibt sich die vorherige Def.

Warum nicht $\mathcal{O}' = \mathcal{O}\left(\left\{\prod_{i\in I} U_i : U_i \in \mathcal{O}_i\right\}\right)$?
Später: universelle Eigenschaft des Produkts. Jetzt:

Bsp.: $X_i = \left(\{0, 1\}, \mathcal{O}_{diskret}\right)$, $i \in \mathbb{N}$. Dann enthält $\mathcal{O}'$ die einpunktigen Mengen von $\prod_{i\in\mathbb{N}} \{0, 1\}$, ist also diskret. Somit divergiert die Folge $x_k = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, 0, 0, \dots)$ bzgl. $\mathcal{O}'$.

In der Produkttopologie bilden Zylindermengen

$$\left\{ U_1 \times U_2 \times \cdots : U_i \in \mathcal{O}_i,\ U_i = X_i \text{ für fast alle } i\right\}$$

eine Basis und daher $\lim_{k\to\infty} x_k = (1, 1, \dots)$.

I.3 Stetige Abbildungen

Def. I.3.1 Eine Abbildung $f: X \to Y$ topologischer Räume heißt *stetig*, wenn für jede offene Menge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Satz I.3.2 Eine Abb. $f: M \to N$ metrischer Räume ist g.d. stetig bzgl. der induzierten Topologien, wenn f stetig nach ε-δ-Definition ist.

Bew.: Sei f wie oben stetig, $x \in M$, $\varepsilon > 0$. Dann ist $U := f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq M$ offen und $x \in U$, also gibt es $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$, also $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$.

Sei umgekehrt f stetig nach ε-δ-Def und sei $V \subseteq N$ offen. z.z.: $f^{-1}(V) \subseteq M$ ist offen. Sei also $x \in f^{-1}(V)$. Dann gilt $f(x) \in V$ und es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Also gibt es $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$, d.h. $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V)$. $\square$

Lemma I.3.3 Sei $\mathcal{B}$ eine Subbasis von Y. Dann ist $f: X \to Y$ g.d. stetig, wenn $f^{-1}(U)$ für alle $U \in \mathcal{B}$ offen ist.

Bew.: Sei $U \subseteq Y$ offen. Dann gilt $U = \bigcup_{i \in I} U_1^i \cap \dots \cap U_{n_i}^i$ für geeignete $U_j^i \in \mathcal{B}$ und $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_1^i) \cap \dots \cap f^{-1}(U_{n_i}^i)$ ist offen. $\square$

Hausaufgabe: Weitere Charakterisierungen.

Seien $f: X \to Z$, $g: Y \to Z$ stetig. Definiere

$$f \sqcup g: X \sqcup Y \to Z, \quad x \in X \mapsto f(x), \quad y \in Y \mapsto f(y)$$

Sei $U \subseteq Z$ offen. Dann ist $(f \sqcup g)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup g^{-1}(U) \subseteq X \sqcup Y$ offen, also $f \sqcup g$ stetig.

Die Inklusionen $i_X: X \to X \sqcup Y$, $i_Y: Y \to X \sqcup Y$ sind ebenfalls stetig: $i_X^{-1}(U \cup V) = U$.

Dies zeigt die universelle Eigenschaft der top. Summe

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "f"', bend right] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & X \sqcup Y \arrow[d, dashed, "\exists!"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "g", bend left] \arrow[l, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

(alle Abbildungen stetig)

Seien $f: Z \to X$, $g: Z \to Y$ stetig. Definiere

$$f \times g: Z \to X \times Y, \quad z \mapsto (f(x), f(y))$$

Seien $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ offen. $(f \times g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \subseteq Z$ offen, also $f \times g$ stetig.

Die Projektionen $pr_X: X \times Y \to X$, $pr_Y: X \times Y \to Y$ sind stetig. Universelle Eigenschaft des Produkts:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"', bend right] \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, "g", bend left] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "pr_X"'] \arrow[r, "pr_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Unendliche Version: Zu $\{f_i: Z \to X_i\}$ ex. genau ein $f: Z \to \prod_i X_i$ mit

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[d, dashed, "f"] \\ X_i & \prod_i X_i \arrow[l, "pr_{X_i}"] \end{tikzcd}$$.

Weitere Eigenschaften:

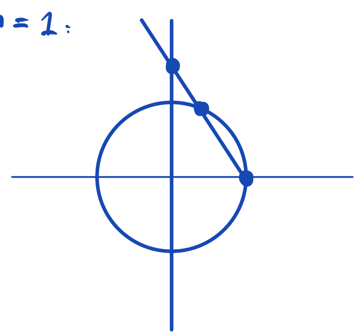
- Sind $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ stetig, so auch $g \circ f: X \to Z$.
- X: top. Raum, dann ist id_X stetig.
- Konstante Abbildungen sind stetig.
- X: top. Raum, $B \subseteq X$, $f: X \to Y$ stetig. Dann ist $f|_B: B \to Y$ stetig. ($f|_B = f \circ i$)
- Eine Abb. $f: X \to Y$ ist immer stetig, wenn X diskret oder Y verklumpt ist.

Def. I.3.4 Eine stetige Bijektion $f: X \to Y$ mit stetiger Umkehrabbildung heißt Homöomorphismus.

Gibt es einen Homöo. $f: X \to Y$, heißen X und Y homöomorph (Notation: $X \cong Y$). Bspe.:

- $(0,1) \cong (1,\infty)$, $\quad x \mapsto \frac{1}{x}$, $y \mapsto \frac{1}{y}$
- $(0,1) \cong (-\infty,\infty)$, $\quad x \mapsto \tan(\pi(x - 1/2))$,
  $y \mapsto 1/\pi \arctan(y) + 1/2$
- $S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1 \}$. $\quad S^n \setminus \{(1,0,\dots,0)\} \cong \mathbb{R}^n$

$n = 1$:



$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0} \right)$$

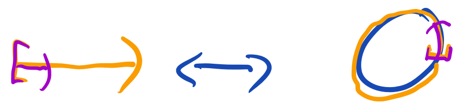
$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{s^2-1}{s^2+1}, \frac{2y_1}{s^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{s^2+1} \right)$$

mit $s^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2$.

„Stereographische Projektion"

Warnung: Eine stetige Bijektion muss kein Homöomorphismus sein. Bspe.:

- $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{diskret}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{trivial}})$
- $[0,1) \longrightarrow S^1$, $t \longmapsto \exp(2\pi i t)$



I.4 Zusammenhang

Def I.4.1 Ein top. Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn X keine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere offene Mengen zulässt.
($\Leftrightarrow$ Nur $\emptyset$ und X sind zugleich offen und abg.)

Bspe · $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend (s.u.)
· $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ ist unzusammenhängend

Satz I.4.2 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt: I ist zshgd. $\Leftrightarrow$ I ist ein Intervall.

Bew. „$\Rightarrow$": Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann gibt es $a < s < b$ mit $a, b \in I$ und $s \notin I$. Dann ist $((-\infty, s) \cap I) \cup ((s, \infty) \cap I)$ eine disjunkte Zerlegung von I in nichtleere offene Mengen.

„$\Leftarrow$": Sei $I = A \cup B$ mit $A, B \subseteq$ offen in I und $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$. Wähle $a \in A$, $b \in B$, o.B.d.A. $a < b$, und setze $s := \inf\{x \in B : x > a\}$.

Sei U eine Umgebung von s. Dann gilt $U \cap B \neq \emptyset$.
Aber auch $U \cap A \neq \emptyset$, denn $s \geq a$ und falls $s > a$, dann ist $(a,s) \cap B = \emptyset$ und weil $(a,s) \subseteq I = A \cup B$, folgt $(a,s) \subseteq A$.
Wir haben also einen Häufungspunkt s von A und B.
Es gilt $s \in I = A \cup B$, o. B. d. A. $s \in A$.
Weil $A \subseteq I$ offen, gibt es $U \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $A = U \cap I$. Weil $s \in U$, gilt $U \cap B \neq \emptyset$, also gibt es $b' \in U \cap B \subseteq U \cap I = A$, d.h. $b' \in A \cap B$, Widerspruch. $\square$

Def I.4.3 Ein top. Raum X heißt weggzusammenhängend, falls es für alle $x, y \in X$ eine stetige Abb. $\gamma : [0,1] \to X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

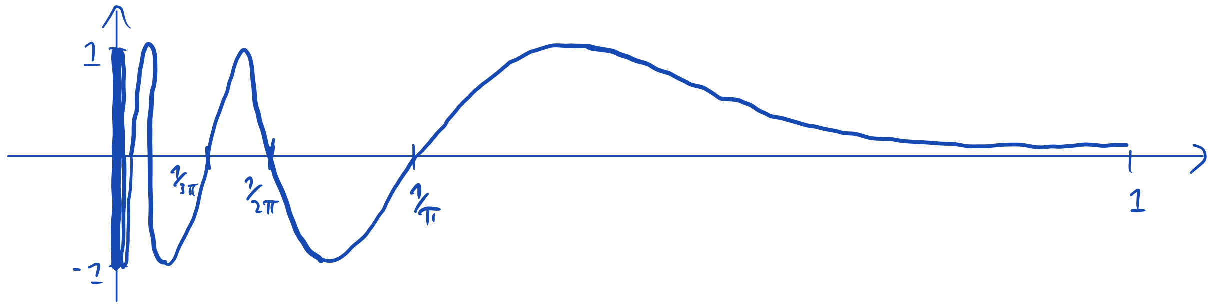
Satz I.4.5 X wegzshgd. $\Rightarrow$ X zshgd.

Bew. Sei X wegzshgd. Ist X nicht zshgd., gilt $X = A \cup B$ mit $A, B \subseteq X$ offen, $A, B \neq \emptyset$ und $A \cap B = \emptyset$. Wähle $a \in A$, $b \in B$. Dann gibt es $\gamma : [0,1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$. Dann ist $\gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$ eine disjunkte Zerlegung von $[0,1]$ in offene nicht-leere Mengen im Widerspruch zum vorherigen Satz. $\square$

Bemerkung: Die Umkehrung ist i. A. falsch:

Sei $\overline{S} = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0, 1]\right\} \cup \{(0,y) : y \in [-1,1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$

die abgeschlossene topologische Sinuskurve:



Lemma I.4.6 Sei X ein top. Raum, $A \subseteq X$ zshgd (in der Teilraumtop.). Dann ist $\overline{A}$ zshgd.

Bew.: Ang. $\overline{A} = U \cup V$ mit $U, V \subseteq \overline{A}$ offen, $U \cap V = \emptyset$. Z.z.: $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. Es gibt $U_0, V_0 \subseteq X$ offen mit $U_0 \cap \overline{A} = U$, $V_0 \cap \overline{A} = V$. Also ist $(A \cap U_0) \cup (A \cap V_0)$ eine disjunkte offene Zerlegung von A. Weil A zshgd., folgt o.B.d.A. $A \cap U_0 = \emptyset$. Da $V \subseteq \overline{A}$ abg., gibt es $V_1 \subseteq X$ abg. mit $V = V_1 \cap \overline{A}$.
Aber $A = A \cap V_0 \subseteq \overline{A} \cap V_0 = V = V_1 \cap \overline{A} \subseteq V_1$.
Weil V_1 abg., folgt $\overline{A} \subseteq V_1$. Damit $V = V_1 \cap \overline{A} = \overline{A}$, also $U = \emptyset$. $\square$

Lemma I.4.7 Sei $f: X \to Y$ stetig, X (weg-)zshgd. Dann ist $f(X) \subseteq Y$ (weg-)zshgd.

Bew.: Sei $f(X) = (U \cap f(X)) \cup (V \cap f(X))$ eine disjunkte Zerlegung mit $U, V \subseteq Y$ offen. Dann ist $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ disj. offene Zerl. von X, also o.B.d.A. $f^{-1}(U) = \emptyset \Rightarrow U \cap f(X) = \emptyset$.

Seien $x, y \in f(X)$. Wähle $x', y' \in X$ mit $f(x') = x$, $f(y') = y$. Wähle $\gamma: [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x'$, $\gamma(1) = y'$. Dann verbindet $f \circ \gamma$ den Punkt x mit dem Punkt y. $\square$

- Für $f: (0,1] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, \sin(1/x))$ gilt $\overline{S} = \overline{f((0,1])}$, also ist $\overline{S}$ zshgd.

- Angenommen, es gäbe $\gamma: [0,1] \to \overline{S}$ stetig mit $\gamma(0) = (0,1)$ und $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. Setze $s := \sup\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in \{0\} \times [-1,1]\}$. Weil γ stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit $\gamma([s, s+\delta]) \subseteq B_{1/2}(\gamma(s))$ (*). Seien $pr_{x/y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Proj. auf die x/y-Achse. Dann ist $pr_x \circ \gamma([s, s+\delta])$ zshgd, also ein Intervall I und $[0, x] \subseteq I$ mit $x := pr_x(\gamma(s+\delta)) > 0$. Daraus folgt jedoch $pr_y \circ \gamma([s, s+\delta]) = [-1,1]$ im Widerspruch zu (*).

Also ist $\bar{S}$ nicht wegzshgd. Insbesondere müssen Abschlüsse wegzshgder Mengen nicht wegzshgd. sein.

<u>Prop. I.4.8</u> Sei $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie (weg-)zshgder Teilräume eines top. Raums X mit $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Dann ist auch $\bigcup_{i\in I} A_i$ (weg-)zshgd.

<u>Bew.</u> Wähle $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Betrachte $\bigcup_{i\in I} A_i = U \cup V$. O.B.d.A. $x \in U$. Sei $y \in V$ und $y \in A_{i_0}$. Erhalte $A_{i_0} = (A_{i_0} \cap U) \cup (A_{i_0} \cap V)$. Für wegzshgd. klar. $\square$

<u>Def. I.4.9</u> Sei X top. Raum, $x \in X$. Dann heißt die Vereinigung aller (weg-)zshgder Teilräume, die x enthalten, die (Weg-)Zusammenhangs-komponente von x.

<u>Notiz</u>. Jeder Raum ist disjunkte Vereinigung seiner (Weg-)Zusammenhangskomponenten.

Der Raum $\bar{S}$ hat eine Zshgskomp. und zwei Wegzshgskomp.en.

I.5 Das Hausdorff-Axiom.

Def. I.5.1 Ein top. Raum X heißt Hausdorffsch, wenn je zwei verschiedene Punkte in X disjunkte Umgebungen haben.

Bspe. • Jeder metrische Raum (X,d) ist Hausdorffsch, denn falls $x, y \in X$, $x \neq y$, gilt $d(x,y) := r > 0$ und $B_{r/2}(x) \cap B_{r/2}(y) = \emptyset$.

• Jeder diskrete Raum ist Hausdorffsch.

Gegenbspe. • Gilt $|X| \geq 2$, so ist $(X, \mathcal{O}_{\text{trivial}})$ nicht Hausdorffsch.

• Sei k ein Körper, dann hat die Zariski-Topologie auf k^n die abgeschlossenen Mengen

$$\left\{ \left\{ x \in k^n : p(x) = 0 \text{ für alle } p \in S \right\} : S \subseteq k[x_1, \dots, x_n] \right\}.$$

$\rightsquigarrow$ Algebraische Geometrie

Notiz. • In einem Hausdorffraum sind Grenzwerte konvergenter Folgen eindeutig, denn Umgebungen zweier Grenzwerte enthalten fast alle Folgenglieder, sind also nicht disjunkt.

• Ist X Hausdorffsch, so auch jeder Teilraum $A \subseteq X$

• Seien $X, Y \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

1.) X, Y Hausdorffsch 2.) $X \sqcup Y$ Hausdorffsch

3.) $X \times Y$ Hausdorffsch

I.6 Kompaktheit

<u>Def. I.6.1</u> Ein top. Raum heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat. (Gilt $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit U_i offen, gibt es $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.)

<u>Bspe.</u>
- $(0,1]$, $[0,\infty)$ sind nicht kompakt
  $\bigcup_{n \geq 1} (1/n, 1] = (0,1]$, $\bigcup_{n \geq 1} [0,n) = [0,\infty)$
- Sei X diskret. Dann gilt X komp. $\Leftrightarrow |X| < \infty$.
- $(X, \mathcal{O}_{\text{trivial}})$ ist kompakt
- Das Einheitsintervall $[0,1]$ ist kompakt.

<u>Bew.:</u> Sei $[0,1] = \bigcup_{i \in I} U_i$. Dann behaupten wir, es gibt $\delta > 0$, sodass jedes Teilintervall $I \subseteq [0,1]$ der Länge δ in einer Menge U_i liegt. Falls nicht, sei x_n Mittelpunkt eines Teilintervalls mit Länge $1/n$, das in keiner Menge U_i liegt. Bolzano-Weierstraß: $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$. Aber $x \in U_{i_0} \subseteq [0,1]$ offen, Widerspruch. Wähle nun endliche Überdeckung von $[0,1]$ durch $\delta/2$-Bälle. Erhalte $[0,1] = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$. □

Kompaktheit erlaubt oftmals eine globale Eigenschaft aus der zugehörigen lokalen Eigenschaft zu schließen:

<u>Lemma I.6.2</u> Sei $f: (X, \mathcal{O}) \to (Y, d)$ stetig, X kompakt. Dann ist $f(X)$ beschränkt.

Bew. Zu $x \in X$ gibt es offene Umg. U_x mit $f(U_x) \subseteq B_1(f(x))$.
Da $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$ für gewisse $x_1, \ldots, x_n$, gilt
$f(X) \subseteq B_1(f(x_1)) \cup \ldots \cup B_1(f(x_n))$. $\square$

Satz I.6.3 Sei X ein top. Raum.
(i) Ist X komp. und $A \subseteq X$ abg., dann ist A kompakt.
(ii) Ist X Hausdorffsch und $A \subseteq X$ kompakt,
dann ist A abgeschlossen.

Bew. (i) Sei $A = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A)$ mit $U_i \subseteq X$ offen.
Dann ist $X = X \setminus A \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ offene Überdeckung von X.
(ii) Sei $A \subsetneq X$ kompakt. Wähle $x \in X \setminus A$. Zu
$y \in A$, seien U_y und V_y Umgebungen von x und y
mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Betrachte $A = \bigcup_{y \in A} (V_y \cap A)$.
Weil A kompakt, gibt es $y_1, \ldots, y_n \in A$ mit
$A \subseteq V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$. Setze $U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$ und
$V = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$. Dann gilt $U \cap V = \emptyset$, insbesondere
$U \cap A = \emptyset$. Also ist x ein innerer Punkt
von $X \setminus A$. Weil $x \in X \setminus A$ beliebig war ist
$X \setminus A$ offen, also A abgeschlossen. $\square$

Satz I.6.4 Sei $f: X \to Y$ stetig.
(i) Ist X kompakt, so auch $f(X)$.
(ii) Ist f bijektiv, X kompakt und Y Hausdorffsch,
dann ist f ein Homöomorphismus.

Bew. (i) Sei $f(X) = \bigcup_{i\in I} (U_i \cap f(X))$. Dann ist $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{i_n}) =$
$= f^{-1}(U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n})$, also $f(X) = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$.

(ii) Sei f bijektiv. Dann gilt:
f^{-1} stetig $\Leftrightarrow$ ($A \subseteq X$ abg. $\Rightarrow f(A) \subseteq Y$ abg.)
Sei also $A \subseteq X$ abg. Weil X kompakt, ist A kompakt, also ist $f(A)$ kompakt. Weil Y Hausdorffsch, ist $f(A)$ abgeschlossen. $\square$

Notiz. Seien $X, Y \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:
1.) X, Y kompakt 2.) $X \sqcup Y$ kompakt 3.) $X \times Y$ kompakt.

Bew. 1.) $\Leftrightarrow$ 2.): klar 3.) $\Rightarrow$ 1.) Wende letzten Satz auf $pr_X: X\times Y \to X$ und $pr_Y: X \times Y \to Y$ an.
1.) $\Rightarrow$ 3.): Sei $X \times Y = \bigcup_{i\in I} U_i$. Zu $(x,y) \in X\times Y$ gibt es $i(x,y) \in I$, $V(x,y) \subseteq X$ offen, $W(x,y) \subseteq Y$ offen mit $(x,y) \in V(x,y) \times W(x,y) \subseteq U_{i(x,y)}$.
Fixiere x. Dann ist $Y = \bigcup_{y\in Y} W(x,y) = W(x, y_1(x)) \cup \ldots \cup W(x, y_{n_x}(x))$.
Setze $V_x := V(x, y_1(x)) \cap \ldots \cap V(x, y_{n_x}(x))$.
Dann gilt $X = \bigcup_{x\in X} V_x = V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_m}$ und
$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_{x_i}} V_{x_i} \times W(x_i, y_j(x_i))$. $\square$

Bemerkung. Es gilt auch für eine unendliche Familie $\{X_i\}$ kompakter Räume, dass $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt ist (Satz von Tychonoff).

Satz I.6.5 (Heine-Borel) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:
(i) K ist kompakt (ii) K ist beschränkt und abg.

Bew. (i) $\Rightarrow$ (ii): Satz I.6.3(ii) und Lemma mit $f = \|\cdot\|$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Für $r \gg 0$ gilt $K \subseteq [-r, r]^n$. Nach Bsp., Notiz und Satz I.6.3(i) ist K kompakt. $\square$

I.7 Die Quotiententopologie

Sei „$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf dem top. Raum X. Dann wollen wir die Menge $X/\sim$ der Äquivalenzklassen mit einer Topologie versehen, sodass folgende universelle Eigenschaft gilt:
Ist $f : X \to Y$ stetig mit $f(x_1) = f(x_2)$ falls $x_1 \sim x_2$, dann

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dashed, "\exists! \, \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(Alle Abb. stetig)

Dann muss $X/\sim$ die feinste Topologie tragen, für die $p : X \to X/\sim$ noch stetig ist, d.h.

$$U \subseteq X/\sim \text{ offen} \iff p^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen},$$

denn

- p soll stetig sein (also nicht feiner)
- $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & X/\sim \\ X/\sim \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$ (also nicht gröber)

<u>Beobachtung.</u> Sei $f: X \to Y$ surjektiv. Dann definiert $x_1 \sim x_2 :\iff f(x_1) = f(x_2)$ eine Äquivalenzrel. auf X, für die $\bar{f}$ eine stetige Bijektion ist und $\bar{f}$ ist genau dann ein Homöo., wenn Y die Quot.top. trägt:

<u>Satz I.7.1</u> Für $f: X \to Y$ surjektiv sind äquivalent:

(i) $\bar{f}: X/\sim \xrightarrow{\cong} Y$.

(ii) Für jede Abb. $g: Y \to Z$ (von Mengen) ist $g \circ f$ genau dann stetig, wenn g stetig ist.

(iii) $U \subseteq Y$ offen $\iff$ $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen.

(iv) $A \subseteq Y$ abg. $\iff$ $f^{-1}(A) \subseteq X$ abg.

<u>Def I.7.2</u> Erfüllt ein surjektives $f: X \to Y$ eine (dann jede) dieser Eigenschaften, heißt sie Identifizierung oder Quotientenabbildung.

<u>Bew.</u> (iii) $\iff$ (iv): klar. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $g: Y \to Z$ eine Abb. von Mengen. Ist g stetig, so auch $g \circ f = g \circ \bar{f} \circ p$. Ist $g \circ f$ stetig, dann auch $g \circ \bar{f}$ nach der univ. Eigenschaft. Also ist $g = (g \circ \bar{f}) \circ \bar{f}^{-1}$ stetig.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wegen (iii) ist f stetig, also $\bar{f}$ stetige Bijektion nach universeller Eigenschaft. Sei $U \subseteq X/\sim$ offen. Dann ist $V = p^{-1}(U) \subseteq X$ offen und $f^{-1}(f(V)) = V$, also ist $\bar{f}(U) = f(V) \subseteq Y$ offen laut (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Betrachte $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y')$, wobei $\mathcal{O}_Y'$ durch (iii) definiert ist. Weil wir schon (iii) $\Rightarrow$ (i) und (i) $\Rightarrow$ (ii) wissen, gilt (ii) auch für $(Y, \mathcal{O}_Y')$. Anwenden von (ii) für $g = id_{(Y,\mathcal{O}_Y)}$ und $g = id_{(Y,\mathcal{O}_Y')}$ zeigt f ist mit beiden Topologien stetig. Also ist auch $id_Y \circ f = f$ stetig für $id_Y : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Y, \mathcal{O}_Y')$ und $id_Y : (Y, \mathcal{O}_Y') \to (Y, \mathcal{O}_Y)$. Nach (ii) sind also beide Identitäten stetig, d.h. $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y'$. $\square$

<u>Notiz</u>. Injektive Identifizierungen sind Homöomorphismen.

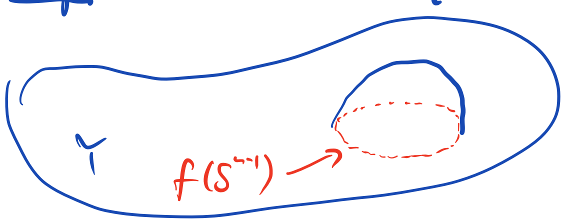
<u>Beispiele</u> 1.) Verkleben von Räumen:

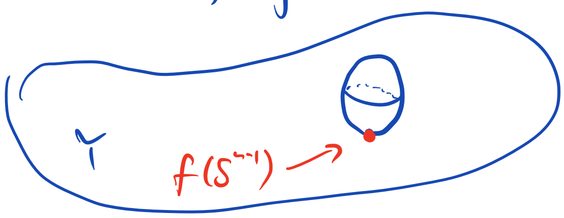
Für $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$ stetig sei „$\sim$" die feinste Äquivalenzrelation auf $X \sqcup Y$, für die $a \sim f(a)$ für alle $a \in A$ gilt. Dann heißt

$$X \sqcup_f Y := X \sqcup Y/_\sim$$

die Anheftung von X an Y mit Anheftungsabb. f

<u>Bsp</u>: $S^{n-1} \subseteq D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, $f : S^{n-1} \to Y$





„Anheften einer n-Zelle" $\square$

Lemma I.7.3 Wir haben eine kanonische Inklusion $Y \subseteq X \sqcup_f Y$ (aber i. A. nicht $X \subseteq X \sqcup_f Y$).

Beweis. Injektiv ✓ Stetig ✓. Sei $U \subseteq Y$ offen.
z.z.: $p(U) \subseteq p(Y)$ offen. Es ist $f^{-1}(U) \subseteq A$ offen, also gibt es $V \subseteq X$ offen mit $f^{-1}(U) = V \cap A$. Somit folgt $p^{-1}(p(V \sqcup U)) = V \sqcup U \subseteq X \sqcup Y$ offen, also ist $p(V \sqcup U) \subseteq X \sqcup_f Y$ offen und $p(U) =$
$= p(V \sqcup U) \cap p(Y)$. $\square$

2.) Kollabieren eines Teilraums zu einem Punkt.
Dies ist der Spezialfall einer Anheftung mit $Y = \bullet$.
Notation: $X/A := X \sqcup_f \bullet$ mit $f: A \to \bullet$.

Bsp. Wir behaupten $[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$. $(\bullet\!-\!\bullet \rightsquigarrow \bigcirc)$

Bew.
$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \sqcup \bullet} \arrow[r, "{\substack{\bullet \mapsto 1 \\ t \mapsto e^{2\pi i t}}}", "f"'] \arrow[d, "p"'] & S^1 \\
{[0,1]/\{0,1\}} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

- $\bar{f}$ ist stetige Bijektion.
- $[0,1]/\{0,1\} = p([0,1] \sqcup \bullet)$ ist komp.
- $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ ist Hausdorffsch. $\square$

So ähnlich $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

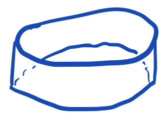
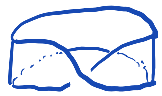
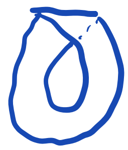
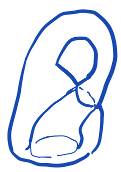
Beachte:
- Für $x_0 \in X$ gilt $X/\{x_0\} \cong X$,
- $X/\emptyset \cong X \sqcup \bullet$, insbes. $\emptyset/\emptyset = \bullet$.

3.) Abbildungstori und Selbstverklebungen

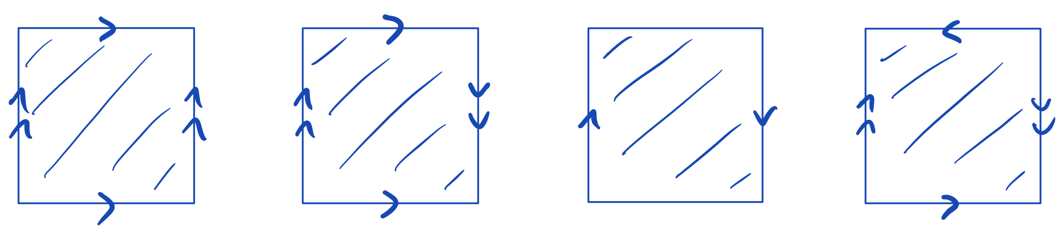
Sei $f: X \xrightarrow{\cong} X$ ein Homöomorphismus. Dann heißt

$$T_f := X \times [0,1] \Big/ _{(x,1) \sim (f(x),0)}$$

der Abbildungstorus von f. Bsp.:

- $f = \mathrm{id}_{[-1,1]}$, $T_f =$  „Zylinder"
- $f = -\mathrm{id}_{[-1,1]}$, $T_f =$  $=$  „Möbiusband"
- $f = \mathrm{id}_{S^1}$, $T_f =$  „Torus"
- $f: S^1 \to S^1$, $(x,y) \mapsto (-x,y)$, $T_f =$  „Kleinsche Flasche"

Selbstverklebungen gibt man meist schematisch an:



Torus — Kleinsche Flasche — Möbiusband — $D^2 /_{S^1 \ni x \sim -x \in S^1}$

$\cong S^2 /_{x \sim -x} \cong \mathbb{RP}^2$

(Boysche Fläche)

4.) Orbiträume von Gruppenwirkungen

<u>Def. I.7.4</u> Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G, sodass G zugleich ein top. Raum ist und
$G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$, sowie
$G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ stetig sind.

<u>Bem.</u> Meist fordert man zusätzlich Hausdorffsch.

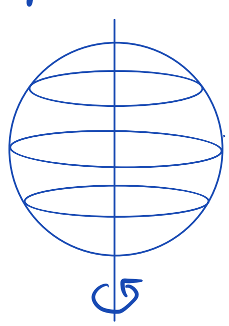
<u>Def I.7.5</u> Eine Gruppenwirkung $G \curvearrowright X$ einer top. Gruppe G auf einen top. Raum X heißt stetig, wenn
$G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$ stetig ist.

Zu $x \in X$ heißt $Gx = \{gx : g \in G\}$ die **Bahn** oder der **Orbit** von x. „Im selben Orbit liegen" definiert eine Äquivalenzrelation „$\sim$" auf X und

$$X/G := X/\sim$$

heißt der **Orbitraum** von $G \curvearrowright X$.

<u>Bsp.</u>: $SO(2) \curvearrowright S^2$ durch Drehung um x_3-Achse:



$$\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[r, "pr_3"] \arrow[d] & {[-1,1]} \\
S^2/SO(2) \arrow[ur, dashed, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

Zu $x \in X$ heißt $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ die Standgruppe von x.

Lemma I.7.6 Sei G komp., X Hausd., $G/G_x \xrightarrow{\cong} Gx$, $gG_x \mapsto gx$

Bew. Wohldefiniert: ✓ Surjektiv: ✓ Injektiv:
$gx = hx \Rightarrow h^{-1}gx = x \Rightarrow h^{-1}g \in G_x \Rightarrow gG_x = hG_x$.
Stetig: Betrachte $G \to G/G_x \to Gx$, $g \mapsto gx$, wende obigen Satz w. (ii) an. Nun ist G/G_x komp. und $Gx \subseteq X$ Hausdorffsch. $\Rightarrow$ folgt $G/G_x \cong Gx$. $\square$

Warnung 1. Kompaktheit und (Weg-) Zusammenhang vererbt sich auf den Quotienten, die Hausdorff-Eigenschaft i. A. nicht.

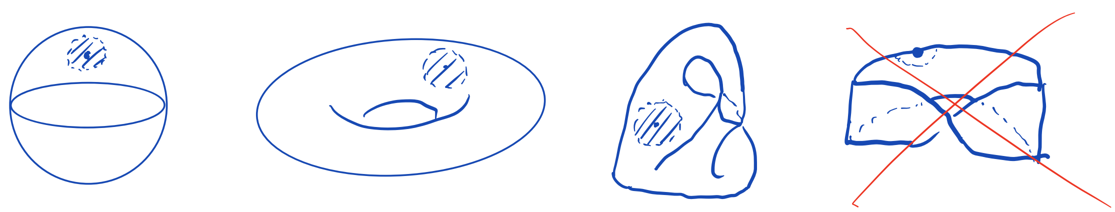
Warnung 2. Eine Quot.abb. muss weder offen noch abgeschlossen sein. Bsp.: $f: [0,3) \to S^1$, $t \mapsto \exp(\pi i t)$ ist Quot.abb. Aber $f([0,1)) = f([2,3)) \subseteq S^1$ ist weder offen noch abgeschlossen.

II Mannigfaltigkeiten und Flächen

II.1 Mannigfaltigkeiten

Def. II.1.1 Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein zweitabzählbarer Hausdorffraum M, der lokal euklidisch ist: jedes $p \in M$ hat eine Umgebung $U_p \subseteq M$ mit $U_p \cong \mathbb{R}^n$.

Bem. 1.) Es gilt
$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \frac{x}{1-\|x\|}.$$



2.) Ein Homöomorphismus $\varphi : U_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ heißt Karte um p. Eine weitere Karte $\psi : V_q \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ wechselt glatt mit φ, falls

$$\psi \circ \varphi^{-1}\big|_{\varphi(U_p \cap V_q)} : \varphi(U_p \cap V_q) \longrightarrow \psi(U_p \cap V_q)$$

ein Diffeomorphismus ist, d.h. glatt (C^∞) mit glatter Umkehrabbildung. Ein Atlas ist eine Menge von Karten, die M überdecken.
Eine glatte Struktur auf M ist ein maximaler Atlas aus glatt wechselnden Karten.
$\rightsquigarrow$ Differentialtopologie

Satz (Kervaire-Milnor) Es gibt 28 wesentlich verschiedene glatte Strukturen auf S^7.

Eine glatte Struktur erlaubt Def. des Tangentialbündels, auf dem man geometrische Strukturen studiert (Riemannsche Metriken, symplektische Formen, ...) $\rightsquigarrow$ Differentialgeometrie.

Bspe: 1.) Jeder diskrete höchstens abzählbare Raum ist 0-dim. Mannigfaltigkeit

2.) $\mathbb{R}$ und S^1 sind 1-dim. Mfken.

3.) M: m-dim. Mfk., N: n-dim. Mfk.

Dann ist $M \times N$ eine $(m+n)$-dim Mfk.

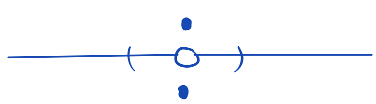
($S^1 \times S^1 =$ )

4.) Sind M und N n-dim. Mfk.en, ist $M \sqcup N$ eine n-dim. Mfk.

Gegenbeispiele: 1.) $\overline{S}$ ist nicht lokal euklidisch.

2.) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{diskret})$ ist lokal eukl. und Hausd., aber nicht zweitabzählbar.

3.) $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} / {\scriptstyle i_1(x) \sim i_2(x) \text{ für } x \neq 0}$ ist lokal eukl. und zweitabzb., aber nicht Hausdorffsch



Satz II.1.2 $\mathbb{R}P^n$ ist eine n-dim. Mfk.

Bew. Zweitabzählbar: $p: S^n \to \mathbb{RP}^n$ ist offen, denn für $U \subseteq S^n$ offen ist $p^{-1}(p(U)) = U \cup -U$ offen. Stetige, offene, surjektive Abb. $f: X \to Y$ bilden Basen auf Basen ab: Sei $\mathcal{B}$ Basis von X, $U \subseteq Y$ offen. Schreibe $f^{-1}(U) = \bigcup_{V \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}} V$. Dann ist $U = f(f^{-1}(U)) = \bigcup_{V} f(V)$.

Hausdorff: Seien $[x], [y] \in \mathbb{RP}^n$, $[x] \neq [y]$. Dann existieren disjunkte offene Umgen $U, V \subseteq S^n$ von x, y, sodass $\pm U, \pm V$ disjunkt, also sind $p(U)$, $p(V)$ disjunkte Umgebungen von $[x], [y]$.

Lokal euklidisch: Sei $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{RP}^n$. Dann gibt es ein i mit $x_i \neq 0$ und $U = \{ (y_0 : \dots : y_n) : y_i \neq 0 \}$ ist offene Umg. von x.

Beh.: $\varphi: U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$, $(y_0 : \dots : y_n) \mapsto \left(\frac{y_0}{y_i}, \dots, \widehat{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i}\right)$.

Bew.: wohldefiniert ✓ Weil $U \subseteq \mathbb{RP}^n$ offen ist, trägt U die Quotiententopologie von $p|_{p^{-1}(U)}$. Definieren wir $\varphi': p^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$, $(y_0, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{y_0}{y_i}, \dots, \widehat{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i}\right)$, gilt $\varphi \circ p|_{p^{-1}(U)} = \varphi'$. Weil φ' stetig ist, ist φ nach Satz I.7 stetig. □ Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \to U$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_i : \dots : x_n)$ ist als Komposition $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = 1 \} \longrightarrow \{ x \in S^n : x_i > 0 \} \xrightarrow{p} U$ ebenfalls stetig. □

Satz II.1.3 Jede zusammenhängende 1-dim. Mfk. ist entweder homöomorph zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1.

Bew.: [D. Gale, The classification of 1-manifolds] $\square$

II.2 Flächen

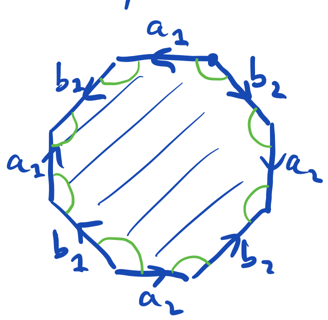
Def. II.2.1 Eine 2-dim. Mfk. nennen wir auch Fläche.

Konstruktion von Flächen: Betrachte ein Wort, z. B.

$w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$

- aus einem Alphabet aus n Buchstaben,
- sodass jeder Buchstabe genau zweimal vorkommt,
- mit beliebiger Wahl des Exponenten ± 1.

Beschrifte rundherum ein $2n$-Eck mit diesem Wort.



Fakt I: Die zugehörige Selbstverklebung ist eine zusammenhängende kompakte Fläche.

Fakt II: Zu jeder zusammenhängenden kompakten Fläche F gibt es ein Wort w wie oben mit $F \cong F_w$.

(Wähle Triangulierung, zähle Dreiecke benachbart auf, verklebe immer nur eine Kante, erhalte $2n$-Eck)

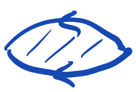
Satz II.2.1 (Klassifikation von Flächen) Die Flächen F_w folgender Wörter w bilden ein vollständiges Repräsentantensystem der Homöomorphieklassen zusammenhängender kompakter Flächen:

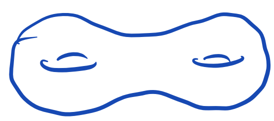
1.) aa^{-1},

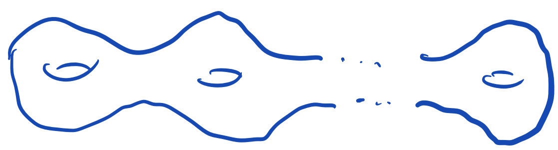
2.) $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ $\quad (g \geq 1)$,

3.) $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g$ $\quad (g \geq 1)$.

Bilder:

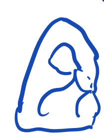
1)   $= S^2$

2.) $g=1$: , $g=2$: ,

 g Löcher, $= T^2 \# \cdots \# T^2$, $T^2 = S^1 \times S^1$

$M \# N$ = verbundene Summe = entferne offene n-Bälle von M und N, verklebe Ränder.

Orientierbare Fläche von Geschlecht g. Notation: Σ_g.

3.) $g=1$:  $\mathbb{RP}^2$ $\quad g=2$:  

$\mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$ $\quad g$ Kopien,

Nichtorientierbare Fläche von Geschlecht g

Notation: N_g.

Bem. Wir nennen zwei Wörter w und w' äquivalent ($w \sim w'$), falls $F_w \cong F_{w'}$. Folgende Operationen liefern äquivalente Wörter:

1.) Zyklische Vertauschung, z.B. $a^2bca \sim a^3bc$,

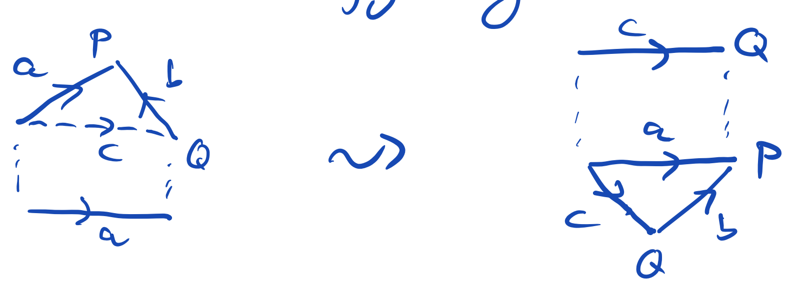
2.) Invertieren: $abc \sim c^{-1}b^{-1}a^{-1}$,

3.) Einen festen Buchstaben überall invertieren, z.B.
$ab^{-2}cbab^{-1} \sim ab^2cb^{-1}ab$

4.) Löschen (echter) Teilwörter der Form aa^{-1}, z.B.
$baa^{-1}b \sim b^2$

Beh.: Jedes Wort w kann durch ein äquivalentes Wort w' ersetzt werden kann, bei dem alle Eckpunkte identifiziert werden.

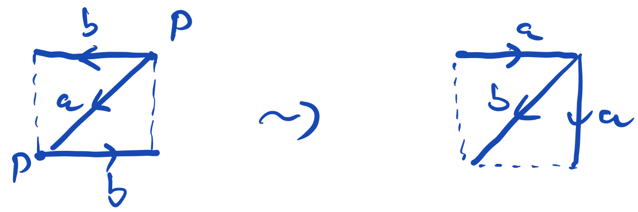
Bew.: Sei w ohne Teilwort der Form „aa^{-1}" gegeben. Seien P, Q benachbarte Ecken aus verschiedenen Identifizierungsklassen:



$\rightsquigarrow$ Q-Klasse um einen Punkt größer
P- " " " " kleiner. □

Wir können also annehmen, w sei reduziert (keine „aa^{-1}"-Teilwörter, alle Ecken identifiziert)

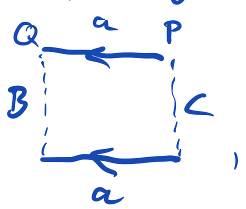
Mache Seitenpaare vom Typ I $(\dots a \dots a \dots)$ benachbart:



(bleibt reduziert)

Beh. Hat w mind. vier Buchstaben und ein Typ II-Seitenpaar $(\dots a \dots a^{-1} \dots)$, dann hat w die Form $\dots b \dots a \dots b^{-1} \dots a^{-1} \dots$.

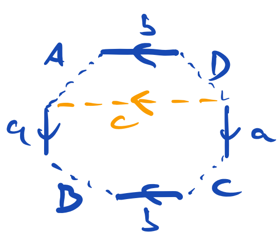
Bew.: Gäbe es nur ein Typ II-Seitenpaar,



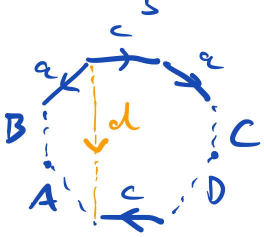
, wäre keine Kante in B mit einer Kante in C identifiziert, weil Typ I-Seitenpaare benachbart sind. Weil w reduziert ist, sind B und C nicht leer, also $P \neq Q$, Widerspruch. Genauso schließt man aus, dass alle Typ II-Seitenpaare unverschachtelt sind. □

Beh.: $\dots b \dots a \dots b^{-1} \dots a^{-1} \sim \dots b a b^{-1} a^{-1} \dots$

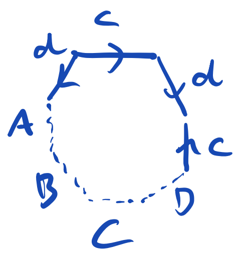
Bew.:



Falls A, B, C, D leer, fertig! O.B.d.A. $A \neq \emptyset$. Zerschneide an c, verklebe an b.



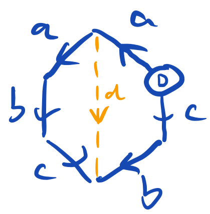
Falls CD leer, fertig! Sonst: Zerschneide an d, verklebe an a



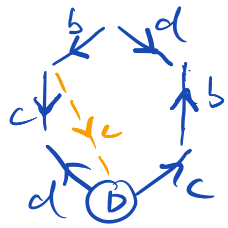
Ersetze „d" mit „b^{-1}" und „c" mit „a" (bleibt reduziert). □

<u>Beh.</u>: $aabcb^{-1}c^{-1}D \sim aabbccD$.

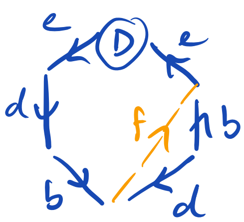
<u>Bew.</u>:



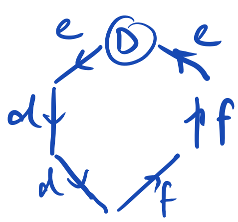
Zerschneide an d, verklebe an a.



Zerschneide an e, verklebe an c.



Zerschneide an f, verklebe an b.



Vertausche zyklisch und benenne d, e, f um in a, b, c. □

Indem man Kommutatoren durch zyklische Vertauschung nach einem „a"-Wort anordnet, erhält man so nach und nach eine der Standardformen. Diese Flächen sind alle verschieden → Fundamentalgruppe, siehe Abschnitt VI.3. □

III Homotopie und Fundamentalgruppe

III.1 Homotopie, Homotopieäquivalenz, Deformationsretrakte

Setze $I := [0,1]$.

Def. III.1.1 Seien X, Y top. Räume. Dann heißen stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ homotop, falls es eine stetige Abbildung

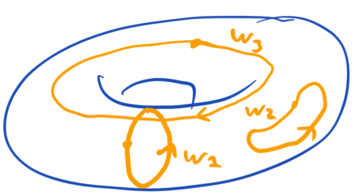
$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

gibt mit $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$.

- Die Abbildung H heißt Homotopie von f nach g. (Notation: $f \simeq_H g$ oder nur $f \simeq g$.)
- Für $t \in I$, sei $H_t : X \to Y$, $x \mapsto H(t,x)$.
- Man kann sich H als „Film" vorstellen, der f kontinuierlich in g überführt.

Bsp. (Homotopien von Wegen/Pfaden)

- Sei $X = S^1$, $Y = T^2$. Dann sind $w_1, w_2, w_3 : X \to Y$ nicht homotop. (Beweis später)



- Je zwei Abb. $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ sind homotop, denn $f \simeq_H (X \to \mathbb{R}, x \mapsto 0)$ mit $H(x,t) = (1-t)\cdot f(x)$, genauso für g, und es gilt

Lemma III.1.2 "$\simeq$" ist eine Äquivalenzrelation auf $C(X,Y) = \{ f: X \to Y : f \text{ stetig} \}$.

Bew. Reflexiv: $f \simeq_H f$ mit $H(x,t) = f(x)$. Symmetrisch: Sei $f \simeq_H g$, dann $g \simeq_{\bar{H}} f$ mit $\bar{H}(x,t) = H(x, 1-t)$.
Transitiv: Sei $f \simeq_H g$ und $g \simeq_{H'} h$. Dann $f \simeq_{H''} h$ mit $H''(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ H'(x,2t-1) & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$. □

Notiz. 1) Seien $f_1, f_2 : Y \to Z$, $g_1, g_2 : X \to Y$, $f_1 \simeq_H f_2$, $g_1 \simeq_{H'} g_2$. Dann gilt $f_1 \circ g_1 \simeq_{H''} f_2 \circ g_2$, wobei $H''_t = H_t \circ H'_t$.

2.) Seien $f_1, f_2 : X \to Y$, $g_1, g_2 : Z \to W$, $f_1 \simeq_H f_2$, $g_1 \simeq_{H'} g_2$. Dann gilt für $f_1 \times g_1, f_2 \times g_2 : X \times Z \to Y \times W$, dass $f_1 \times g_1 \simeq_{H''} f_2 \times g_2$ mit $H''_t = H_t \times H'_t$.

Def. III.1.3 Eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ heißt Homotopieäquivalenz, wenn es eine stetige Abbildung $g: Y \to X$ gibt (das Homotopieinverse), sodass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.

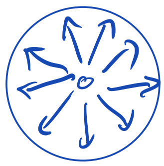
- Gibt es so eine Homotopieäquivalenz $f: X \to Y$, heißen X und Y homotopieäquivalent. (Notation $X \simeq Y$).

- „$X \simeq Y$" ist eine Äquivalenzrelation und aus $X \simeq Y$ und $X' \simeq Y'$ folgt $X \times X' \simeq Y \times Y'$.
- Spezialfall: Ist $f: X \hookrightarrow Y$ die Inklusion eines Teilraums und $g: Y \to X$ eine Retraktion, d.h. $g \circ f = id_X$ (nicht nur $g \circ f \simeq id_X$), und $f \circ g \simeq_H id_Y$, dann heißt X ein Deformationsretrakt von Y und H heißt Deformationsretraktion. Gilt zudem $H(x, t) = x$ für $x \in X$ und $t \in I$, heißt X starker Deformationsretrakt und H heißt starke Deformationsretraktion.
- Ein top. Raum X heißt zusammenziehbar, falls ein Punkt in X ein Deformationsretrakt von X ist (insbes. gilt also $X \neq \emptyset$). Äquivalent: $X \simeq \bullet$.

<u>Bspe.</u>: • $\{0\} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n$ ist starker Deformationsretrakt:
$H: \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, $(x, t) \mapsto t \cdot x$.

- Allgemeiner: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, d.h. es gibt $x_0 \in U$, sodass $\{x_0 + t(x - x_0) : t \in I\} \subseteq U$ für alle $x \in U$, dann ist $\{x_0\} \hookrightarrow U$ starker Def.-retrakt

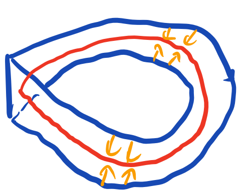
- $S^{n-1} \overset{j}{\hookrightarrow} D^n$ ist noch nicht mal ein Retrakt: Es gibt keine stetige Abbildung $D^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$ mit $j \circ r = \mathrm{id}_{D^n}$. (Beweis für $n=2$ später, für $n \geq 3$ in Topologie I).
- $S^{n-1} \hookrightarrow D^n \setminus \{0\}$ ist starker Def. retrakt



$$H: D^n \setminus \{0\} \times I \longrightarrow D^n \setminus \{0\}$$
$$(x, t) \longmapsto (1-t) \cdot x + t \cdot \frac{x}{\|x\|}$$

- Für $S^{n-1} \subseteq D^n \setminus \{0\}$ und $\varphi: S^{n-1} \to Y$ sei $D^n \setminus \{0\} \cup_\varphi Y$ die Anheftung einer n-Zelle „mit Loch". Dann ist $Y \subseteq D^n \setminus \{0\} \cup_\varphi Y$ starker Deformationsretrakt.

- Sei M das Möbiusband. Dann ist die Mittellinie $S^1 \subseteq M$ starker Def. retrakt.



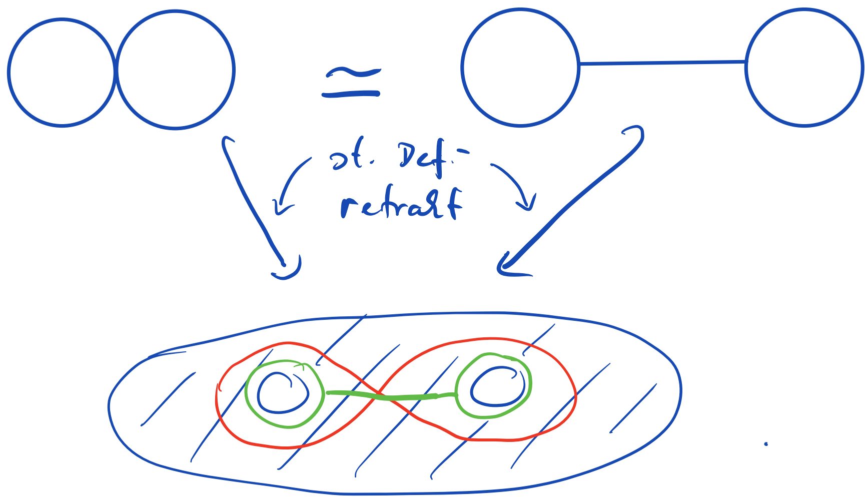
$$M = [-1,1]^2 / (-1,x) \sim (1,-x)$$

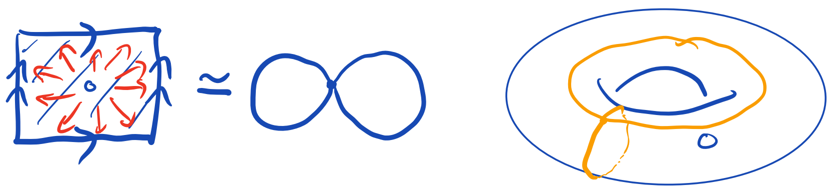
$$j: S^1 = [-1,1]/\{-1,1\} \to M$$
$$[x] \longmapsto [(x,0)]$$

$r: M \to S^1 = [-1,1]/\{-1,1\}, \quad [(x,y)] \longmapsto [x]$

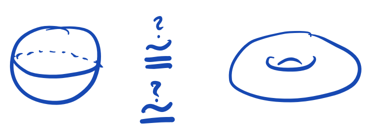
$r \circ j = \mathrm{id}_{S^1}$, $\quad j \circ r \simeq_H \mathrm{id}_M$,

$H_t([(x,y)]) = [(x, t \cdot y)]$.

- 

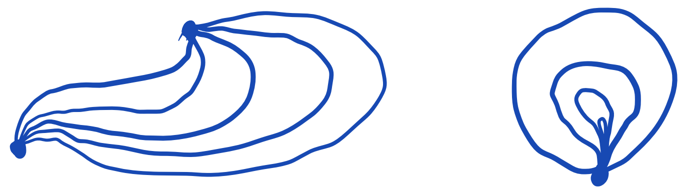
- $T^2 \setminus \{pt\}$ 

III.2 Fundamentalgruppe



Def. III.2.1 Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen homotop relativ $A \subseteq X$, falls es eine Homotopie $f \simeq_H g$ gibt mit $H(a,t) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$, $t \in I$.
Notation: $f \simeq_A g$. Falls $A = \{x_0\}$, heißt H punktierte Homotopie.

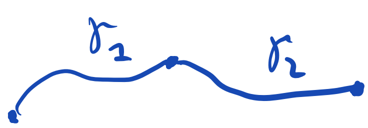
Falls $X = I$, $A = \{0, 1\}$, heißt H Homotopie rel. Endpunkte



- Eine stetige Abbildung $\gamma : I \to X$ nennen wir Weg (oder Pfad). Gilt für zwei Wege $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$, dass $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, so heißt

$$\gamma_1\gamma_2 : I \to X, \; t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

die Konkatenation von γ_1 und γ_2.



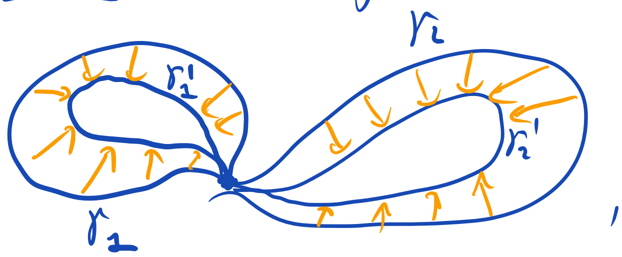
Einen Weg $\gamma : I \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ nennen wir Schleife.

Satz III.2.2 Sei X ein top. Raum und $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Dann erklärt die Konkatenation eine wohldefinierte Gruppenstruktur auf der Menge

$$\pi_1(X, x_0) := \{ \gamma : I \to X : \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \} /_{\simeq_{\{0,1\}}}$$

der Homotopieklassen rel. Endpunkte von Schleifen in X mit Start- und Endpunkt x_0. Wir nennen $\pi_1(X, x_0)$ die **Fundamentalgruppe** von X zum Basispunkt x_0.

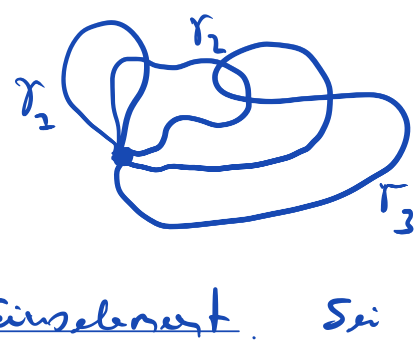
<u>Bew.</u>: · <u>Wohldefiniert.</u> Seien $\gamma_1 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1'$, $\gamma_2 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_2'$

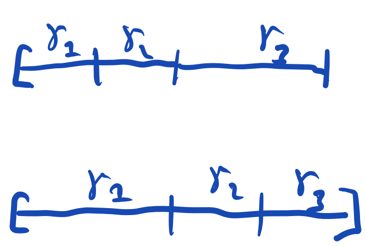


also $\gamma_1\gamma_2 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1'\gamma_2'$.

Beobachtung: Für jedes $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ und jedes $\gamma : I \to X$ gilt $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma \circ \varphi$ durch $H : I \times I \to X$, $(s,t) \mapsto \gamma((1-t)\cdot s + t \cdot \varphi(s))$ (Reskalierung des Zeitparameters).

· <u>Assoziativ.</u> Es gilt $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ durch Reskalieren des Zeitparameters.

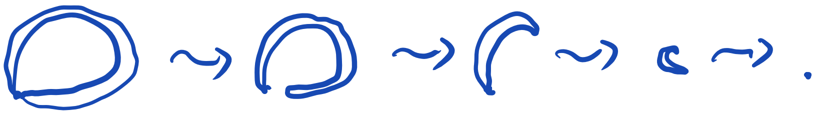




· <u>Einselement.</u> Sei $c_{x_0} : I \to X$, $t \mapsto x_0$ der konstante Weg. Dann gilt $c_{x_0}\gamma \simeq_H \gamma \simeq \gamma c_{x_0}$.

· <u>Inverse</u>. Zu $\gamma : I \to X$, sei $\bar{\gamma} : I \to X$, $t \mapsto \gamma(1-t)$.

$\bar{\gamma}\gamma \simeq c_{x_0} \simeq_H \gamma\bar{\gamma}$, $H_t(s) = \gamma(t\cdot s)\bar{\gamma}(t\cdot(1-s))$.



$\square$

Seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ Teilräume. Dann nennen wir $f : X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$ eine Abbildung von Raumpaaren (Notation: $f : (X, A) \to (Y, B)$.) Im Spezialfall $A = \{x_0\}$, $B = \{y_0\}$ notieren wir $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ für eine punktierte Abbildung punktierter Räume.

<u>Prop. III.2.3</u> Eine stetige Abb. $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$
$$[\gamma] \longrightarrow [f \circ \gamma].$$

<u>Bew.</u> $\pi_1(f)([\alpha][\beta]) = \pi_1(f)([\alpha\beta]) =$
$= [f \circ (\alpha\beta)] = [(f\circ\alpha)(f\circ\beta)] = [f\circ\alpha][f\circ\beta] =$
$= \pi_1(f)(\alpha)\, \pi_1(f)(\beta)$. $\square$

<u>Prop. III.2.4</u> Seien $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ stetig. Dann gilt $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$.

<u>Bew.</u> $\pi_1(g\circ f)(\gamma) = [(g\circ f)\circ\gamma] = [g\circ(f\circ\gamma)] =$

$= \pi_1(g)([f\circ\gamma]) = \pi_1(g)(\pi_1(f)([\gamma]))$. $\square$

<u>Prop. III.2.5</u> $\pi_1(id_{(X,x_0)}) = id_{\pi_1(X,x_0)}$.

<u>Bew.</u> $\pi_1(id_{(X,x_0)})([\gamma]) = [id_{(X,x_0)}\circ\gamma] = [\gamma]$. $\square$

<u>Prop. III.2.6</u> Seien $f,g : (X,x_0) \to (Y,y_0)$, $f \simeq^H_{\{x_0\}} g$.
Dann gilt $\pi_1(f) = \pi_1(g)$.

<u>Bew.</u> Sei $[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)$. Definiere
$H^\gamma : I\times I \to Y$, $(s,t) \mapsto H(\gamma(s),t)$.
Dann gilt $H^\gamma_0 = f\circ\gamma$, $H^\gamma_1 = g\circ\gamma$, $H^\gamma(0,t) =$
$= H^\gamma(1,t) = x_0$ für alle $t\in I$, d.h.
$f\circ\gamma \simeq_{\{0,1\}} g\circ\gamma \Leftrightarrow [f\circ\gamma] = [g\circ\gamma] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \pi_1(f)([\gamma]) = \pi_1(g)([\gamma])$. $\square$

<u>Prop. III.2.7</u> Sei $j : A \hookrightarrow X$ ein starker Deformationsretrakt und sei $a\in A$. Dann gilt
$$\pi_1(j) : \pi_1(A,a) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X,a)$$
<u>Bew.</u> Sei $r : X \to A$ die Retraktion mit $r\circ j = id_A$
und $j\circ r \simeq_A id_X$. Dann gilt $\pi_1(r)\circ\pi_1(j) = id_{\pi_1(A,a)}$
und $\pi_1(j)\circ\pi_1(r) = \pi_1(id_X) = id_{\pi_1(X,x_0)}$. $\square$

<u>Bsp.</u> $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) \cong \pi_1(\{0\}, 0) \cong \{1\}$.

<u>Prop. III.2.8</u> Für $f : (X,x_0) \xrightarrow{\cong} (Y,y_0)$ ist $\pi_1(f)$ ein Iso.

Bew. Hausaufgabe. □

Wir definieren $(X,x_0)\times(Y,y_0) := (X\times Y,(x_0,y_0))$.

Prop. III.2.9 $\pi_1((X,x_0)\times(Y,y_0)) \cong \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$.

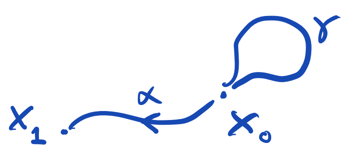
Bew. $(\gamma : I\to X\times Y)\longmapsto(pr_X\circ\gamma,\ pr_Y\circ\gamma)$

$(\gamma: I\to X,\ \gamma': I\to Y)\longmapsto \left(\gamma\times\gamma' : \begin{array}{l} I\to X\times Y \\ t\mapsto(\gamma(t),\gamma'(t))\end{array}\right)$ □

Bsp. · Später $\pi_1(S^1,\cdot)\cong\mathbb{Z}$, daher

$\pi_1(T^n,\cdot)\cong\pi_1((S^1,\cdot)\times\dots\times(S^1,\cdot))\cong\mathbb{Z}^n$.

Prop. III.2.10 Seien $x_0,x_1\in X$ und $\alpha: I\to X$ mit $\alpha(0)=x_0$ und $\alpha(1)=x_1$. Dann gilt $\Phi_\alpha:\pi_1(X,x_0)\xrightarrow{\cong}\pi_1(X,x_1)$,
$[\gamma]\mapsto[\bar\alpha\gamma\alpha]$



Bew. Wohldefiniert ✓

Homomorphismus: $\Phi_\alpha([\gamma][\gamma']) = \Phi_\alpha([\gamma\gamma']) =$

$= [\bar\alpha\gamma\gamma'\alpha] = [\bar\alpha\gamma\alpha\bar\alpha\gamma'\alpha] = [\bar\alpha\gamma\alpha][\bar\alpha\gamma'\alpha] =$

$= \Phi_\alpha([\gamma])\,\Phi_\alpha([\gamma'])$.

Inverses: $[\gamma]\mapsto[\alpha\gamma\bar\alpha]$. □

Def III.2.11 Ein top. Raum X heißt einfach zusammenhängend, falls X nicht leer und wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X,x_0)=\{1\}$.

Satz III.2.12 Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend.

Lemma III.2.13 (Lebesgue) Sei (X, d) komp. metr. Raum mit einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$. Dann existiert $\delta > 0$, sodass jeder Teilraum $A \subseteq X$ von Durchmesser $< \delta$ in einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.

Bew. Betrachte $X = \bigcup_{x \in X} B_{\varepsilon(x)}(x)$, sd. $B_{2\varepsilon(x)}(x) \subseteq U_i$ für irgendein $U_i \in \mathcal{U}$. Erhalte $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon(x_i)}(x_i)$ und setze $\delta := \min\{\varepsilon(x_1), \dots, \varepsilon(x_n)\}$. Wäre $B \subseteq X$ ein Ball von Radius $< \delta$, der in keinem $B_{2\varepsilon(x_1)}(x_1), \dots, B_{2\varepsilon(x_n)}(x_n)$ enthalten ist, läge der Mittelpunkt von B außerhalb von $\bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon(x_i)}(x_i) = X$, Widerspruch. $\square$

Man spricht von einem Lebesgue-δ für $(X, \mathcal{U})$.

Lemma III.2.14 Sei $n \geq 2$ und $\gamma : (I, \{0,1\}) \to (S^n, x_0)$. Dann gibt es eine nicht-surjektive Abbildung $\gamma' : (I, \{0,1\}) \to (S^n, x_0)$ mit $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma'$.

Bew. Sei $\mathcal{U}$ die Überdeckung von S^n durch offene Hemisphären. Wähle ein Lebesgue-δ für $(\gamma(I), \mathcal{U}|_{\gamma(I)})$. Weil γ stetig auf einem Kompaktum ist, ist γ gleichmäßig stetig, also gibt es $m \in \mathbb{N}$, sodass $\underbrace{\gamma([\tfrac{k}{m}, \tfrac{k+1}{m}])}_{\text{Durchmesser} < \delta} \subseteq U_k \in \mathcal{U}$ für $k = 0, \dots, m-1$.

Sei $\gamma_\ell : [\frac{\ell}{m}, \frac{\ell+1}{m}] \to \mathbb{R}^{n+1}$ die Strecke von $\gamma(\frac{\ell}{m})$ nach $\gamma(\frac{\ell+1}{m})$. Definiere $H: I \times I \to S^n$ durch

$$H(s,t) = \frac{(1-t)\gamma(s) + t\gamma_\ell(s)}{\|(1-t)\gamma(s) + t\gamma_\ell(s)\|} \quad \text{für } s \in \left[\frac{\ell}{m}, \frac{\ell+1}{m}\right],$$

$\neq 0$, weil γ und γ_ℓ im selben offenen Halbraum liegen.

Dann ist $\gamma' := H_1$ für $n \geq 2$ nicht surjektiv und $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma'$. □

<u>Bew.</u> (von Satz III.2.12) Für $[\gamma] \in \pi_1(S^n, x_0)$ sei $\gamma' \simeq_{\{0,1\}} \gamma$ und $y_0 \notin \mathrm{Bild}(\gamma')$. Betrachte

$$\begin{tikzcd} S^n \setminus \{y_0\} \arrow[r, "j"] & S^n \\ & I \arrow[ul, "\gamma''"] \arrow[u, "\gamma'"'] \end{tikzcd}$$

Es gilt $[\gamma] = [\gamma'] = [j \circ \gamma'] =$
$= \pi_1(j)([\gamma'']) = 1$, denn

$\pi_1(S^n \setminus \{y_0\}, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n, x_1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n, 0) \cong 1$,
also $[\gamma''] = 1$. □

Weil $\pi_1(T^2, \cdot) = \mathbb{Z}^2$, aber $\pi_1(S^2, \cdot) = \{1\}$, gilt also tatsächlich  $\not\simeq$  und erst recht  $\not\cong$ . (Schulden noch $\pi_1(S^1, \cdot) \cong \mathbb{Z}$ → nächstes Kapitel).

IV Überlagerungen

IV.1 Faserbündel und Überlagerungen

Beobachtung: Eine Abbildung $p: X \to Y$ induziert eine disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{y \in Y} p^{-1}(y)$ von X in die Fasern $p^{-1}(y)$ über $y \in Y$.
(p surjektiv: Jede Faser enthält mind. ein Element.
p injektiv: " " " höchstens " " .)

Def. IV.1.1 Ein Faserbündel besteht aus einer surjektiven stetigen Abbildung $p: E \to B$ (die Bündelprojektion) und einem top. Raum F (die Faser), sodass es zu jedem $b \in B$ eine offene Umgebung $U \subseteq B$ von b und einen Homöomorphismus $\varphi: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$ gibt, sodass das Diagramm

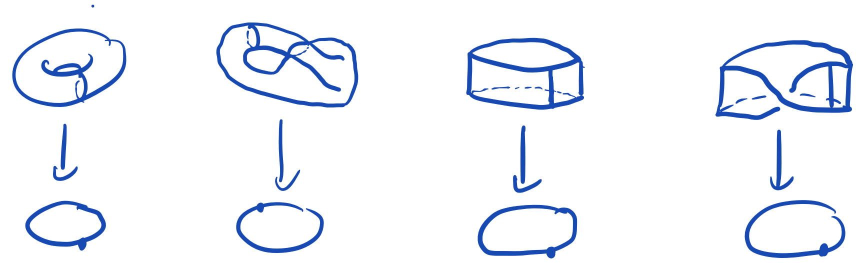
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(U)}"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert (Lokale Trivialitätsbedingung).

- Ein Faserbündel heißt (global) trivial, falls

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & B \times F \arrow[dl, "pr_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

- Bspe:



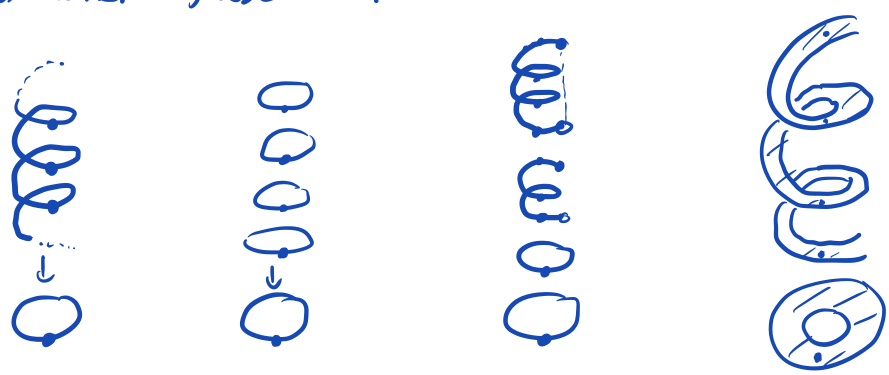
trivial — nicht trivial — trivial — nicht trivial

Der Raum E heißt **Totalraum**, der Raum B heißt **Basisraum** des Faserbündels.

Prop. IV.1.2 Die Bündelabbildung eines Faserbündels ist eine offene Identifizierung.

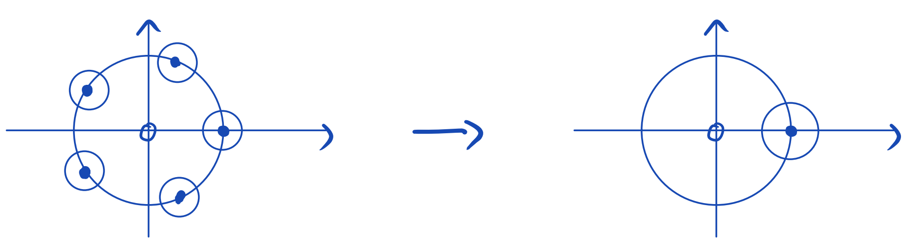
Bew. Hausaufgabe. $\square$

Def. IV.1.3 Eine **Überlagerung** ist ein Faserbündel $p: E \to B$ mit diskreter Faser F.



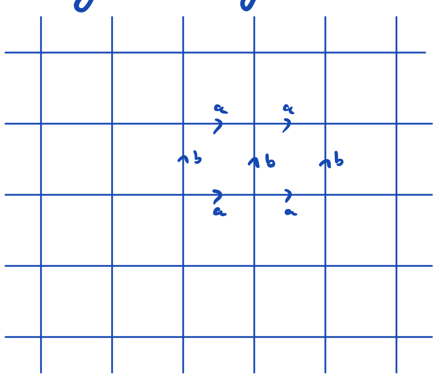
Notiz. Die Zahl $|F| \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ heißt **Blätterzahl** der Überlagerung.

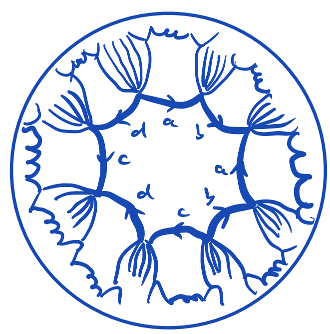
Bsp. · Für $n \in \mathbb{N}$ ist $p: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto z^n$ eine n-blättrige Überlagerung. Für $z = r \cdot \exp(2\pi i \varphi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $p^{-1}(z) = \{ \sqrt[n]{r} \exp(2\pi i \varphi/n), \dots, \sqrt[n]{r} \exp(2\pi i (\frac{n-1+\varphi}{n})) \}$.



· $p: S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ ist n-blättrige Überlagerung.

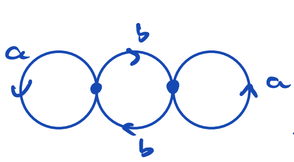
- $p: \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ ist ∞-blättrig.
- Endliche Produkte von Überlagerungen sind Überlagerungen, z.B.
  $p: \mathbb{R}^n \to T^n$, $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (\exp(2\pi i t_1), \dots, \exp(2\pi i t_n))$
- $p: S^n \to \mathbb{RP}^n$, $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$
  Für $x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{RP}^n$ sei o.B.d.A. $x_0 \neq 0$.
  Dann ist $U = \{(x_0' : \dots : x_n') : x_0' \neq 0\}$ offene Umgebung von x und $p^{-1}(U) = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n : x_0 < 0\}$
  $\cup \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n : x_0 > 0\}$,
  also ist p eine zweiblättrige Überlagerung.
- Für $g \geq 1$ gibt es eine Überlagerung $p: \mathbb{R}^2 \to \Sigma_g$.

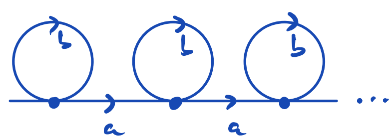


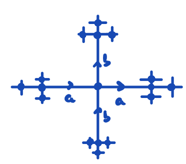


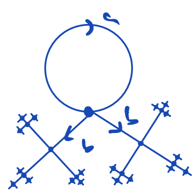
- Besonders reichhaltig ist die Überlagerungstheorie von $S^1 \vee S^1 =$ 

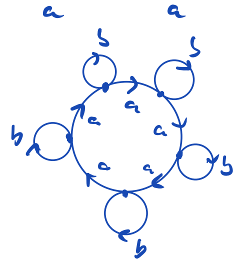
:

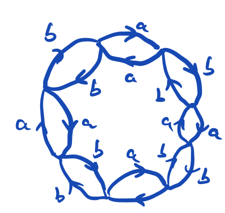


,


,




,


,


IV.2 Hochhebungen

Sei $p: Y \to X$ eine Überlagerung.

Hochhebeproblem (HHP) für Wege:

$$\begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ (I, 0) \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Prop. IV.2.1 Zu jedem Weg $\gamma: I \to X$ mit $\gamma(0) = x_0$ und jedem Punkt $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = x_0$ gibt es genau einen Weg $\tilde{\gamma}: I \to Y$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ und $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Bew. Eindeutigkeit Sei $\tilde{\gamma}': I \to Y$ mit $\tilde{\gamma}'(0) = y_0$ ein weiterer Weg mit $\tilde{\gamma}'(0) = y_0$ und $p \circ \tilde{\gamma}' = \gamma$.

Dann sind die Mengen

$$\{ t \in I : \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t) \} \text{ und } \{ t \in I : \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t) \}$$

jeweils offen, denn $\gamma(t) \in X$ hat eine offene Umgebung $U \subseteq Y$ mit

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & U \times F \arrow[d, "pr_U"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Also ist lokal die U-Komponente durch die Hochhebebedingung $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ bestimmt, während die F-Komponente konstant bleiben muss, weil F diskret ist. Weil I zshgd. ist und $0 \in \{ t \in I : \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t) \}$, folgt $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t)$ für alle $t \in I$.

<u>Existenz.</u> Sei $t_0 = \sup\left\{ t \in I : \exists \begin{array}{l} \tilde\gamma : [0,t_0] \to Y, \\ \tilde\gamma(0) = y_0,\ p \circ \tilde\gamma = \gamma. \end{array} \right\}$

Es gilt $t_0 \geq 0$. Z.z. $t_0 = 1$. Angenommen $t_0 < 1$.
Sei
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong", "\varphi"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
lokale Trivialisierung um $\gamma(t_0) \in X$.

Dann gibt es $0 < \delta < t_0$ mit $\gamma([t_0-\delta, t_0+\delta]) \subseteq U$.
Sei $\tilde\gamma : [0, t_0-\delta] \to Y$ mit $\tilde\gamma(0) = y_0$. Setze $f := pr_F(\tilde\gamma(t_0))$.
Dann setzt $[t_0-\delta, t_0+\delta] \to Y$, $t \mapsto \varphi^{-1}(\gamma(t), f)$ die Hochhebung $\tilde\gamma$ nach $[0, t_0+\delta]$ fort, Widerspruch. □

HHP für Homotopien:

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "\tilde H_0"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists!\ \tilde H"] & X \end{tikzcd}$$

Für $Z = \bullet$ ist dies das Hochhebungsproblem für Wege.
Setze $H^z : I \to X$, $t \mapsto H(z,t)$
und sei $\tilde H^z$ die eindeutige Hochhebung von H^z mit $\tilde H^z(0) = \tilde H_0(z)$.

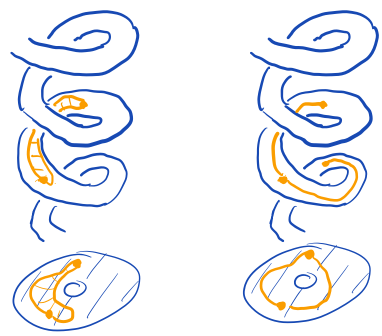
<u>Prop. IV.2.2</u> Die Abbildung $\tilde H : Z \times I \to Y$, $(z,t) \mapsto \tilde H^z(t)$ ist stetig, d.h. das HHP für Homotopien ist eindeutig lösbar.

<u>Bew.</u> Sei $(z_0, t_0) \in Z \times I$ und sei $U \subseteq Y$ eine Umgebung von $y_0 := \tilde H(z_0, t_0)$. Dann gibt es eine lokale Trivialisierung
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[rr, "\cong", "\varphi"'] \arrow[dr, "p"'] & & V \times F \arrow[dl, "pr_V"] \\ & V & \end{tikzcd}$$
mit einer Umgebung V von $p(y_0)$ und daher eine möglicherweise kleinere offene Umgebung $W \subseteq U$ von y_0 mit $p|_W : W \xrightarrow{\cong} p(W) \subseteq V$.
Dann ist $U' := H^{-1}(p(W))$ offene Umgebung von (z_0, t_0) und $p(\tilde H(U')) = H(U') \subseteq p(W) \Rightarrow \tilde H(U') \subseteq W \subseteq U$. □

Lemma IV.2.3 (Monodromielemma) Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ Wege mit $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$, $\gamma_1(1)=\gamma_2(1)$ und $\gamma_1 \simeq^{H}_{\{0,1\}} \gamma_2$. Sei $y_0 \in Y$ mit $p(y_0)=\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$, seien $\tilde\gamma_1, \tilde\gamma_2 : I \to Y$ die eindeutigen Hochhebungen mit $\tilde\gamma_1(0)=\tilde\gamma_2(0)=y_0$ und sei $\tilde H$ die eindeutige Hochhebung von H mit Anfangshochhebung $\tilde\gamma_1$. Dann gilt $\tilde\gamma_1 \simeq^{\tilde H}_{\{0,1\}} \tilde\gamma_2$ und insbesondere $\tilde\gamma_1(1)=\tilde\gamma_2(1)$.

Bew. Die Abb. $\tilde H$ löst das HHP

$$\begin{tikzcd} I \times \{0\} \arrow[r, "\tilde\gamma_1"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\tilde H"] & X \end{tikzcd}.$$



Es gilt $p \circ \tilde H_t(0) = H_t(0) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) =: x_0$ für $t \in I$. Also erhalten wir $I \to p^{-1}(x_0)$, $t \mapsto \tilde H_t(0)$. Weil die Faser $p^{-1}(x_0)$ diskret ist, ist diese Abbildung konstant, also $\tilde H_0(0) = \tilde H_1(0)$. Genauso folgt $\tilde H_0(1) = \tilde H_1(1)$. Also gilt $\tilde H_1(0) = \tilde H_0(0) = \tilde\gamma_1(0) = y_0$ und $p \circ \tilde H_1 = H_1 = \gamma_2$. Nach Eindeutigkeit der Wegehochhebung folgt $\tilde H_1 = \tilde\gamma_2$. Daher $\tilde\gamma_2(1) = \tilde H_1(1) = \tilde H_0(1) = \tilde\gamma_1(1)$. $\square$

Sei nun $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung.

Notiz. $\pi_1(p) : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv.

Bew. Gilt für eine Schleife $\gamma : (I, \{0,1\}) \to (Y, y_0)$, dass $c_{x_0} \simeq^{H}_{\{0,1\}} p \circ \gamma$, dann zeigt die Hochhebung $\tilde H$ mit Anfang c_{y_0} nach dem Monodromielemma, dass $c_{y_0} \simeq^{\tilde H}_{\{0,1\}} \gamma$. $\square$

Def. IV.2.4 Die Untergruppe $G(Y,y_0) := \mathrm{Bild}(\pi_1(p)) \leq \pi_1(X,x_0)$ heißt charakteristische Untergruppe der punktierten Überlagerung p.

Wir wollen nun das Hochhebeproblem

$$\begin{tikzcd} & (Y,y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Z,z_0) \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \tilde{f}"] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

lösen. Hierfür muss notwendigerweise gelten

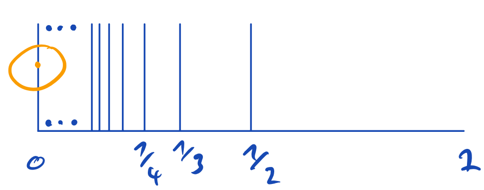
$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(\pi_1(f)) &= \mathrm{Bild}(\pi_1(p\circ\tilde{f})) = \\ &= \mathrm{Bild}(\pi_1(p)\circ\pi_1(\tilde{f})) \\ &\leq \mathrm{Bild}(\pi_1(p)) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R},0) \arrow[d, "p"] \\ (S^1,1) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, dashed, "\times"] & (S^1,1) \end{tikzcd}$$

Ziel: Finde eine Bedingung an Z, unter der dieses Kriterium auch hinreichend ist.

Def. IV.2.5 Ein top. Raum heißt lokal wegzusammenhängend, wenn in jeder Umgebung eines jeden Punktes eine wegzusammenhängende Umgebung liegt.

Bsp.: (Topologischer Kamm)



- wegzusammenhängend
- nicht lokal wegzusammenhängend

- Jede Mannigfaltigkeit ist lokal wegzusammenhängend.

Satz IV.2.6 (Hochhebungskriterium) Sei Z wegzshgd. und lokal wegzshgd. Dann gibt es zu $f: (Z, z_0) \to (X, x_0)$ genau dann eine eindeutige Abb. $\tilde{f}: (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$, wenn $\mathrm{Bild}(\pi_1(f)) \leq G(Y, y_0)$.

$$\begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Z, z_0) \arrow[ur, dashed, "\exists!"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "\pi_1(p)"] \\ \pi_1(Z, z_0) \arrow[ur, dashed, "\exists!"] \arrow[r, "\pi_1(f)"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

Bew. Eindeutigkeit: Sei $\tilde{f}'$ eine zweite Hochhebung. Zu $z \in Z$ wähle $\gamma: I \to Z$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$. Dann sind $\tilde{f} \circ \gamma$ und $\tilde{f}' \circ \gamma$ zwei Hochhebungen des Wegs $f \circ \gamma$ mit Startpunkt y_0. Also folgt $\tilde{f} \circ \gamma = \tilde{f}' \circ \gamma$ und insbesondere $\tilde{f}(z) = \tilde{f}(\gamma(1)) = \tilde{f}'(\gamma(1)) = \tilde{f}'(z)$.

Existenz: Zu $z \in Z$ wählen wir wie eben $\gamma: I \to Z$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$. Sei $\widetilde{f \circ \gamma}: I \to Y$ die eindeutige Hochhebung von $f \circ \gamma$ mit $\widetilde{f \circ \gamma}(0) = y_0$. Wir setzen $\tilde{f}(z) := \widetilde{f \circ \gamma}(1)$. Dies ist wohldefiniert, denn ist $\gamma': I \to Z$ ein weiterer Weg mit $\gamma'(0) = z_0$ und $\gamma'(1) = z$, dann ist $[f \circ (\gamma \bar{\gamma}')] \in G(Y, y_0)$ und deshalb ist $\widetilde{f \circ (\gamma \bar{\gamma}')} = \widetilde{(f \circ \gamma)(f \circ \bar{\gamma}')} = (\widetilde{f \circ \gamma})(\widetilde{f \circ \bar{\gamma}'})$, eine Schleife, wobei $\widetilde{f \circ \bar{\gamma}'}$ die Weghochhebung mit Startpunkt $\widetilde{f \circ \gamma}(1)$ bezeichnet. Somit folgt

$$\widetilde{f \circ \gamma'}(1) = \overline{\widetilde{f \circ \gamma'}}(0) = \widetilde{\overline{f \circ \gamma'}}(0) = \widetilde{f \circ \bar{\gamma}'}(0) = \widetilde{f \circ \gamma}(1).$$

Es gilt $p \circ \tilde{f}(z) = p(\widetilde{f \circ \gamma}(1)) = f \circ \gamma(1) = f(z)$ und so

bleibt nur die Stetigkeit zu zeigen. Sei dazu $z_1 \in Z$ und $U \subseteq Y$ eine O.B.d.A. so kleine Umgebung von $\tilde{f}(z_1)$, dass $p|_U$ ein Homöomorphismus ist. Dann gibt es eine wegzshgde Umgebung V von z_1 mit $f(V) \subseteq p(U)$. Fixiere einen Weg $\gamma : I \to Z$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$. Für $z \in V$ wähle $\gamma' : I \to V$, $\gamma'(0) = z_1$, $\gamma'(1) = z$. Dann ist $(\widetilde{f \circ \gamma})(p^{-1} \circ f \circ \gamma') = \widetilde{f \circ (\gamma\gamma')}$, also $\tilde{f}(z) =$
$= p^{-1}(f(\gamma'(1))) = p^{-1}(f(z)) \in U$. $\square$

<u>Bsp.</u> Sei $g \geq 1$. Dann ist jede Abb. $S^2 \xrightarrow{f} \Sigma_g$ nullhomotop (d.h. homotop zu einer konstanten Abb.)

Weil $\pi_1(S^2, \cdot) = \{1\}$, haben wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R}^2, 0) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "p"] & (0,0) \\ (S^2, \cdot) \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (\Sigma_g, \cdot) & \end{tikzcd}$$

$\square$

IV.3 Klassifizierung der Überlagerungen

Sei (X, x_0) wegzshgd. und lokal wegzshgd.

<u>Ziel</u>: Finde alle wegzshgden Überlagerungen $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ bis auf basispunkterhaltenden Isomorphismus:

$$\begin{tikzcd} (X, x_0) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & (X, x_0') \arrow[dl, "p'"] \\ & (Y, y_0) & \end{tikzcd}$$

<u>Wunsch</u>: $\left\{p:(Y,y_0)\to(X,y_0) \text{ wegzshgd}\right\}/_{\cong} \xrightarrow{1:1} \left\{ G \leqslant \pi_1(X,x_0)\right\}$

$$[p:(Y,y_0)\to(X,x_0)] \longmapsto G(Y,y_0)$$

<u>Satz IV.3.1</u> (Eindeutigkeitssatz) Seien $p:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ und $p':(Y',y_0')\to(X,x_0)$ wegzshgde. Überlagerungen.

Dann gilt:
$$\begin{tikzcd} (Y,y_0) \arrow[rr, "\cong", "\varphi"'] \arrow[dr, "p"'] & & (Y',y_0') \arrow[dl, "p'"] \\ & (X,x_0) & \end{tikzcd} \iff G(Y,y_0) = G(Y',y_0')$$

<u>Bew.</u> „$\Rightarrow$": $G(Y,y_0) = \mathrm{Bild}(p) = \mathrm{Bild}(p'\circ\varphi) = \mathrm{Bild}(p') = G(Y',y_0')$.

„$\Leftarrow$":
$$\begin{tikzcd} & (Y',y_0') \arrow[d, "p'"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\varphi"] \arrow[r, "p"] & (X,x_0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (Y,y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y',y_0') \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\psi"] \arrow[r, "p'"] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & (Y,y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, dashed, "\psi\circ\varphi"] \arrow[r, "p"] & (X,x_0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (Y',y_0') \arrow[d, "p'"] \\ (Y',y_0') \arrow[ur, dashed, "\varphi\circ\psi"] \arrow[r, "p'"] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

Aus der Eindeutigkeit der Hochhebung folgt $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_{(Y,y_0)}$ und $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}_{(Y',y_0')}$. $\square$

Sei nun $G \leqslant \pi_1(X,x_0)$ gegeben. Zu $x\in X$ setze

$$Y_x := \left\{ \gamma: I\to X \,:\, \gamma(0)=x_0,\ \gamma(1)=x \right\}/_{\sim}\,, \text{ wobei}$$

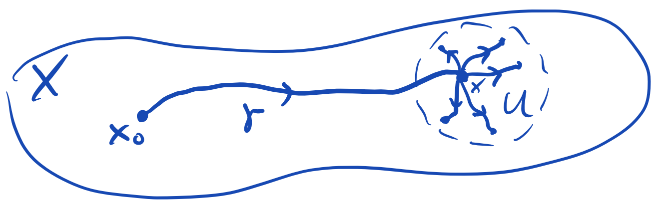
$\gamma\sim\gamma' :\iff [\gamma\overline{\gamma'}] \in G$. Sei $Y := \bigsqcup_{x\in X} Y_x$ und definiere

$p: Y \to X$, $y \mapsto x$ für $y \in Y_x$ sowie $y_0 = [c_{x_0}]$.
Dann gilt $p(y_0) = x_0$ und p ist surjektiv. To do:

1.) Erkläre wegzshgde Topologie auf Y.
2.) Zeige p ist Überlagerung (stetig, lokal trivial, diskrete Fasern)
3.) Zeige $G(Y, y_0) = G$.

1.) Für $y := [\gamma] \in Y$ und eine offene wegzshgde Umgebung $U \subseteq X$ von $x := \gamma(1)$ sei

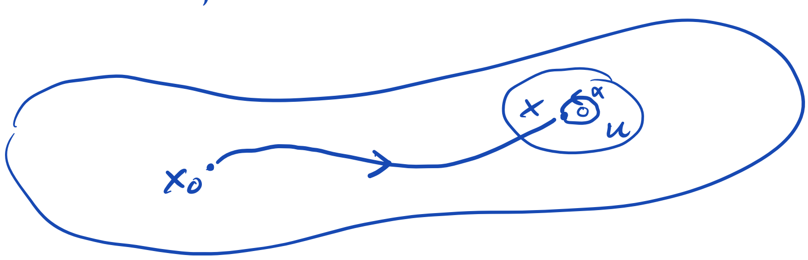
$$V(U, y) = \{ [\gamma\alpha]_\sim : \alpha : I \to U, \alpha(0) = x \}.$$



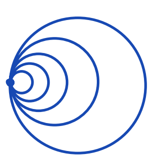
Dies ist wohldefiniert, denn falls $[\gamma\overline{\gamma'}] \in G$, gilt $[\gamma\alpha\overline{\gamma'\alpha}] = [\gamma\alpha\overline{\alpha}\overline{\gamma'}] = [\gamma\overline{\gamma'}] \in G$, also $[\gamma\alpha]_\sim = [\gamma'\alpha]_\sim$.
Wir erklären $V \subseteq Y$ sei offen, falls es für alle $y \in V$ ein $V(U, y)$ wie oben gibt mit $V(U, y) \subseteq V$.
Dies definiert eine Topologie, denn $\emptyset, Y$ sind offen, Vereinigungen offener Mengen sind offen und der Schnitt zweier offener Mengen V_1, V_2 ist offen, weil für $y \in V_1 \cap V_2$ und $V(U_1, y) \subseteq V_1$, $V(U_2, y) \subseteq V_2$ auch $U_1 \cap U_2$ wieder eine wegzshgde Umgebung von $p(y)$ enthält, denn X ist lok. wegzshgd.
Nach Konstruktion bilden die $V(U, y)$ eine Umg.basis von y.

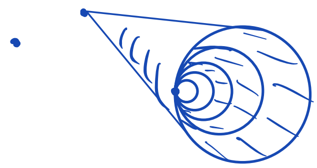
Der Raum Y ist wegzshgd., denn für $y=[\gamma]_\sim \in Y$ ist $I \to Y$, $t \mapsto [I \to Y,\ s \mapsto \gamma(s \cdot t)]_\sim$ ein stetiger Weg von y_0 nach y.

2.) Die Abb. $p: Y \to X$ ist stetig, denn für $y \in Y$ und eine wegzshgde Umgebung U von $p(y)$ gilt $p(V(U,y)) = U$. Wir wollen nun nachweisen, dass $p: Y \to X$ lokal trivial mit diskreten Fasern ist. Letzteres bedeutet, dass es für alle $x \in X$ und $y \in Y_x$ eine offene wegzshgde. Umg. $U \subseteq X$ von x gibt mit $Y_x \cap V(U,y) = \{y\}$. Für $y = [\gamma]_\sim$ soll also für alle $\alpha: I \to U$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x$ gelten $[\gamma\alpha]_\sim = [\gamma]_\sim$, also $[\gamma\alpha\bar{\gamma}] \in G$.



Damit das auch für $G = \{1\}$ erfüllt sein kann, muss man also für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \subseteq X$ von x finden können, sodass jede Schleife an x in U nullhomotop in X ist. Einen solchen Raum nennen wir semilokal einfach zusammenhängend.

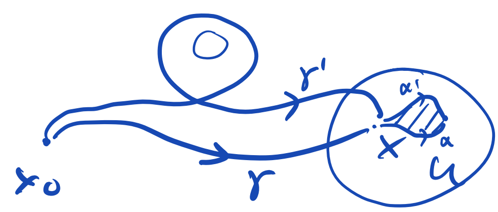
-  Der Hawaiische Ohrring ist nicht semilokal einfach zshgd.

-  Der Kegel über dem Hawaiischen Ohrring ist semilokal einfach zshgd. aber nicht lokal einfach zshgd.

- Mannigfaltigkeiten sind sogar lokal einfach zshgd.

Fortan sei X semilokal einfach zshgd. Dann gilt für hinreichend kleines U, dass $\gamma\alpha\bar{\gamma} \simeq_{\{0,1\}} c_{x_0}$, also $[\gamma\alpha\bar{\gamma}] = 1 \in G$.

Für so ein offenes U gilt außerdem: gibt es $z \in V(U,y) \cap V(U,y')$ für $y, y' \in Y_x$, $y = [\gamma]_\sim$, $y' = [\gamma']_\sim$



, d.h. $z = [\gamma\alpha]_\sim = [\gamma'\alpha']_\sim$

dann folgt $[\gamma]_\sim = [\gamma']_\sim$, also $y = y'$. Demnach gilt $V(U,y) \cap V(U,y') = \emptyset$ für $y \neq y'$. Außerdem sind alle $V(U,y)$ offen und $p|_{V(U,y)}$ ist eine stetige Bijektion und offen, also ein Homöomorph. Somit erhalten wir einen Homöomorphismus

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{y \in Y_x} V(U,y) \cong \bigsqcup_{y \in Y_x} V(U,y) \cong U \times Y_x,$$

der $p|_{p^{-1}(U)}$ in pr_U überführt.

3.) Für $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt $[\gamma] \in G(Y, y_0)$ genau dann, wenn für $\tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ auch $\tilde{\gamma}(1) = y_0$ gilt. Weil $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]_\sim$, ist dies äquivalent zu

$$[\gamma]_\sim = [c_{x_0}]_\sim \iff [\gamma \overline{c_{x_0}}] \in G \iff [\gamma] \in G.$$

Damit haben wir bewiesen:

<u>Satz IV.3.2</u> (Existenzsatz) Sei (X, x_0) wegzshgd., lokal wegzshgd. und semilokal einfach zshgd. Dann gibt es zu jeder Untergruppe $G \leq \pi_1(X, x_0)$ eine wegzshgde Überlagerung $p: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit $G(Y, y_0) = G$.

<u>Bemerkung</u>. Wie wir bereits wissen, ist diese eindeutig bis auf punktierten Iso., sie ist ebenfalls lokal wegzshgd. und auch semilokal einfach zshgd. (durch Hochheben einer Nullhomotopie).

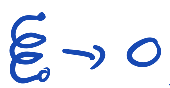
<u>IV.4 Decktransformationen und Galoiskorrespondenz</u>

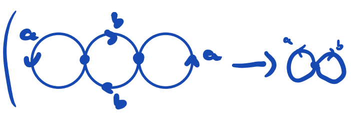
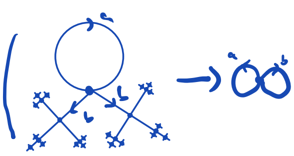
<u>Def. IV.4.1</u> Sei $p: Y \to X$ eine Überlagerung. Eine **Decktransformation** von p ist ein Homöomorphismus $\varphi: Y \xrightarrow{\cong} Y$ mit $p \circ \varphi = p$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Offensichtlich bildet die Menge $\mathcal{D}(p)$ der Decktransformationen eine Gruppe unter Komposition, die **Decktransformationsgruppe** (oder auch Automorphismengruppe von p).

<u>Bspe.</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R} \to S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n) \cong \mathbb{Z}^n$,

$\mathcal{D}($  $) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathcal{D}(S^n \to \mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

$\mathcal{D}($  $) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathcal{D}($  $) \cong \{1\}$

(jeweils noch ohne Beweis...).

Wir haben eine Wirkung $\mathcal{D}(p) \curvearrowright Y$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(p) \times Y &\longrightarrow Y \\ (\varphi, y) &\longmapsto \varphi(y) \end{aligned}$$

Ist Y wegzshgd. und lokal wegzshgd., dann ist diese Wirkung **frei** ($G \curvearrowright X$ frei $:\Leftrightarrow$ für jedes $x \in X$ und jedes $g \in G \setminus \{1\}$ gilt $gx \neq x$):
Falls es $y \in Y$ gibt mit $\varphi(y) = y$, gilt $\varphi = \mathrm{id}_Y$ laut Eindeutigkeitsaussage des Hochhebungskriteriums:

$$\begin{tikzcd} & (Y, y) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y) \arrow[r, "p"] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & (X, p(y)) \end{tikzcd}$$

Für jedes $x_0 \in X$ erhalten wir durch Einschränkung $\mathcal{D}(p) \curvearrowright Y_{x_0} := p^{-1}(x_0)$. Seien $y_0, y_1 \in Y_{x_0}$. Nach Eindeutigkeitssatz

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & (Y, y_1) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

gibt es genau dann $\varphi \in \mathcal{D}(p)$ mit $\varphi(y_0) = y_1$, wenn $G(Y, y_0) = G(Y, y_1)$. Sei $\tilde{\gamma}: I \to Y$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ und $\tilde{\gamma}(1) = y_1$. Setze $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ und erhalte

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y, y_0) \arrow[r, "{[\bar{\tilde{\gamma}}](\,)[\tilde{\gamma}]}", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_1(p)"'] & \pi_1(Y, y_1) \arrow[d, "\pi_1(p)"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "{[\gamma]^{-1}(\,)[\gamma]}", "\cong"'] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}.$$

Somit gilt $G(Y, y_1) = [\gamma]^{-1} G(Y, y_0) [\gamma]$, d.h. y_1 liegt in der $\mathcal{D}(p)$-Bahn von y_0 genau dann, wenn $[\gamma]$ im Normalisator von $G(Y, y_0)$ liegt.

Def. IV.4.2 Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann ist

$$N_H := N_H^G := \{ g \in G : g^{-1} H g = H \}$$

der Normalisator von H in G.

Def. IV.4.3 Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt normal oder Normalteiler, falls $N_H^G = G$ (Notation: $H \trianglelefteq G$).

Bspe. · $\{1\}, G \trianglelefteq G$. · $H \trianglelefteq N_H^G \leq G$ (N_H^G ist maximal mit dieser Eigenschaft)

· Ist G abelsch, so ist jedes $H \leq G$ normal.

· Für jeden Körper K gilt $SL_n(K) \trianglelefteq GL_n(K)$.

· Die Untergruppe $\{id, (1,2)\} \leq S_3$ ist nicht normal.

· $\{id, (1,2,3), (1,3,2)\} \trianglelefteq S_3$.

Lemma IV.4.4. Für einen Hom. $\varphi: G \to H$ gilt $\ker\varphi \trianglelefteq G$.

Bew. Sei $g_0 \in \ker\varphi$ und $g \in G$. Dann gilt $\varphi(g^{-1}g_0g) = \varphi(g)^{-1} \cdot 1 \cdot \varphi(g) = 1$, d.h. $g^{-1}g_0g \in \ker\varphi$. $\square$

Notiz. $\mathrm{Bild}(\varphi) \leq H$ ist i.A. nur eine Untergruppe.

Für $H \leq G$ bezeichne $G/H = \{gH : g \in G\}$ die Menge der Linksnebenklassen von H. Es ist $[G:H] := |G/H|$ der Index von H in G. Falls $H \trianglelefteq G$, gilt $gH = Hg$, also

$$(g_1H)(g_2H) = g_1(Hg_2)H = g_1(g_2H)H = g_1g_2H,$$

d.h. die Multiplikation in G induziert eine wohldefinierte Gruppenstruktur auf G/H und die Gruppe G/H heißt Faktorgruppe oder Quotientengruppe von G nach H.

Satz IV.4.5 (Homomorphiesatz) Sei $\varphi: G \to H$ ein Hom. Dann ist $\overline{\varphi}: G/\ker\varphi \to \mathrm{im}\,\varphi$, $g(\ker\varphi) \longmapsto \varphi(g)$ ein wohldefinierter Isomorphismus.

Bew. Wohldefiniert: Für $g_1 \in \ker\varphi$ gilt $\varphi(gg_1) = \varphi(g)\varphi(g_1) = \varphi(g)$.
Homomorphismus: klar, weil φ ein Hom. ist. Injektiv:
$\overline{\varphi}(g\ker\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi(g) = 1 \Leftrightarrow g \in \ker\varphi \Leftrightarrow g\ker\varphi = \ker\varphi$. $\square$

Satz IV.4.6 Sei $p: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine wegzshgde und lokal wegzshgde Überlagerung und $G := G(Y, y_0)$. Zu $[\gamma] \in N_G^{\pi_1(X,x_0)}$ sei $\varphi_{[\gamma]} \in \mathcal{D}(p)$ die eindeutige Decktrafo mit $\varphi_{[\gamma]}(y_0) = \tilde{\gamma}(1)$. Dann definiert

$$N_G \to \mathcal{D}(p), \quad [\gamma] \mapsto \varphi_{[\gamma]}$$

einen Homomorphismus und dieser induziert einen Iso.

$$N_G/G \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}(p).$$

Bew. Es gilt $\varphi_{[\alpha]}(\varphi_{[\beta]}(y_0)) = (\varphi_{[\alpha]} \circ \tilde{\beta}^{y_0})(1) \overset{\text{Eind.}}{\underset{\text{Wegeh.}}{=}}$

$= \tilde{\beta}^{\varphi_{[\alpha]}(y_0)}(1) = \tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}^{y_0}(1)}(1) = \varphi_{[\alpha][\beta]}(y_0)$.

Mit der Eindeutigkeitsaussage des Hochhebungssatz. folgt $\varphi_{[\alpha][\beta]} = \varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}$. Der Homomorphismus ist surjektiv, denn für $\varphi \in \mathcal{D}(p)$ sei $\tilde{\gamma}: I \to Y$, $\tilde{\gamma}(0) = y_0$, $\tilde{\gamma}(1) = \varphi(y_0)$ und $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$, dann gilt $[\gamma] \in N_G$ und $\varphi = \varphi_{[\gamma]}$. Außerdem gilt $\varphi_{[\gamma]} = id_Y \Leftrightarrow \tilde{\gamma}^{y_0}(1) = y_0 \Leftrightarrow [\gamma] \in G$, d.h. G ist der Kern des Homomorphismus'. $\square$

Satz IV.4.7 Für eine wegzshgde und lokal wegzshgde Überlagerung $p: Y \to X$ sind äquivalent:

(i) Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{D}(p) \curvearrowright Y_x$ transitiv

(d.h. für je zwei Punkte $y_1, y_2 \in Y_x$ gibt es $\varphi \in \mathcal{D}(p)$ mit $\varphi(y_1) = y_2$ oder äquivalent: die Fasern Y_x sind die Bahnen von $\mathcal{D}(p) \curvearrowright Y$.)

(ii) Für jedes $y \in Y$ gilt $G(Y,y) \trianglelefteq \pi_1(X, p(y))$.

<u>Bew.</u> Wie bereits gesehen gibt es $\varphi \in \mathcal{D}(p)$ mit $\varphi(y_0) = y_1$ genau dann wenn für $\tilde{\gamma}: I \to Y$, $\tilde{\gamma}(0) = y_0$, $\tilde{\gamma}(1) = y_1$ gilt $[p \circ \tilde{\gamma}] \in N^{\pi_1(X,x_0)}_{G(Y,y_0)}$. $\square$

<u>Def. IV.4.8</u> Eine solche Überlagerung heißt regulär oder normal oder galoissch.

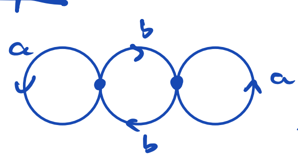
<u>Korollar IV.4.9</u> Für eine reguläre Überlagerung $p: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ gilt

(i) $\mathcal{D}(p) \cong \pi_1(X,x_0) / G(Y,y_0)$.

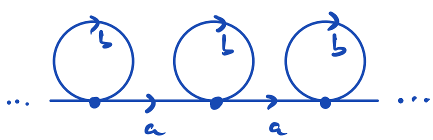
(ii) $|Y_{x_0}| = [\pi_1(X,x_0) : G(Y,y_0)]$

(iii) $Y / \mathcal{D}(p) \cong X$. $\square$

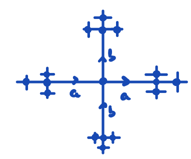
<u>Bspe.</u>



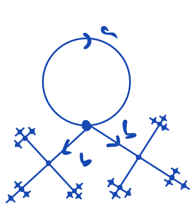
regulär, $\mathcal{D}(p) \cong \mathbb{Z}/2$



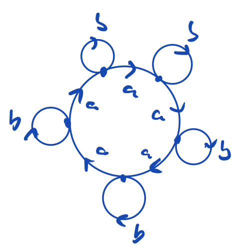
regulär, $\mathcal{D}(p) \cong \mathbb{Z}$



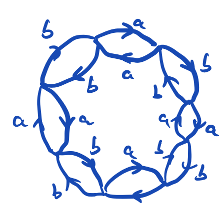
regulär, $\mathcal{D}(p) \cong F_2$ (s. Kap. V)



nicht regulär, $\mathcal{D}(p) = \{1\}$



regulär, $\mathcal{D}(p) \cong \mathbb{Z}/5$



regulär, $\mathcal{D}(p) \cong D_4 \cong \langle r, s \mid r^4, s^2, (rs)^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}/2$ (s. V.5)

Satz IV.4.10 Es gilt $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Bew. Für die Überlagerung $p: (\mathbb{R}, 0) \to (S^1, 1)$, $t \longmapsto \exp(2\pi i t)$ gilt $G(\mathbb{R}, 0) = \{1\} \trianglelefteq \pi_1(S^1, 1)$, also $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathcal{D}(p)$. Es ist aber

$$T: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{D}(p)$$
$$n \longmapsto (x \longmapsto x + n)$$

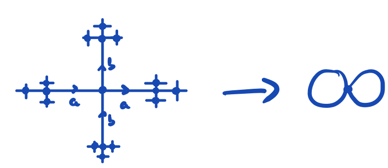
ein Isomorphismus, denn T ist

- ein Homomorphismus: klar.
- injektiv: Aus $x = x + n$ folgt $n = 0$.
- surjektiv: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(p)$, also $p \circ \varphi = p$, d.h.

$\exp(2\pi i \varphi(x)) = \exp(2\pi i x)$ und daher $x - \varphi(x) = n_x \in \mathbb{Z}$. Aber $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto n_x = x - \varphi(x)$ ist stetig, also konstant. Daher gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(x) = x + n$, also $T(n) = \varphi$. $\square$

Jetzt ist also bewiesen, dass $S^n \not\cong \mathbb{T}^n$ für $n \neq 1$.

Def. IV.4.11 Eine wegzshgde und lokal wegzshgde Überlagerung $p: Y \to X$ heißt *universell*, wenn Y einfach zusammenhängend ist.

Bspe.
- $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$
- $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$
- $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \Sigma_g$
- $\mathbb{R}^2 \longrightarrow K$ (Kleinsche Flasche)
- $\mathbb{R} \times I \longrightarrow M$ (Möbiusband)
- $S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$
- 

Sprechweise. Wir sagen ein top. Raum X sei gut zusammenhängend, wenn er wegzshgd., lokal wegzshgd. und semilokal einfach zshgd. ist.

Korollar IV.4.12 Sei X gut zshgd., $x_0 \in X$. Dann gibt es bis auf punktierten Iso. genau eine universelle Überlagerung $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$.

Warum universell?
Seien $(Y_1, y_1) \xrightarrow{p_1} (X, x_0)$ und $(Y_2, y_2) \xrightarrow{p_2} (X, x_0)$ wegzshgde Überlagerungen eines gut zshgden Raumes (X, x_0). Angenommen $G(Y_1, y_1) \leq G(Y_2, y_2)$.

$$\begin{tikzcd} & (Y_2, y_2) \arrow[d, "p_2"] \\ (Y_1, y_1) \arrow[r, "p_1"] \arrow[ur, dashed, "\exists! f"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Prop IV.4.13 Die Abb. $f : (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$ ist eine Überlagerung und diese ist genau dann regulär, wenn $G(Y_1, y_1) \trianglelefteq G(Y_2, y_2)$.
Bew. Weil $\pi_1(Y_2, y_2) \cong G(Y_2, y_2)$, ist der zweite Teil der Aussage bereits bewiesen.
Zu $\pi_1(p_2)^{-1}(G(Y_1, y_1)) \leq \pi_1(Y_2, y_2)$ gehört eine Überlagerung $p_3 : (Y_3, y_3) \to (Y_2, y_2)$

$$\begin{tikzcd} (Y_3, y_3) \arrow[r, "p_3"] \arrow[d, dashed, shift right, "h"'] & (Y_2, y_2) \arrow[d, "p_2"] \\ (Y_1, y_1) \arrow[r, "p_1"] \arrow[u, dashed, shift right, "g"'] \arrow[ur, dashed, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Sei g die Hochhebung von f entlang p_3 und h die Hochhebung von $p_2 \circ p_3$ entlang p_1. Dann gilt
$p_3 \circ g \circ h = f \circ h = p_3$ und
$p_1 \circ h \circ g = p_2 \circ p_3 \circ g = p_2 \circ f = p_1$.
Also ist $g \circ h$ eine Hochhebung von p_3 entlang p_3
und $h \circ g$ " " " p_1 " p_1.
Aus der Eindeutigkeit der Hochhebung folgt $g \circ h = id$ und $h \circ g = id$. Demnach identifiziert der Homöomorphismus h die Abb. f mit p_3, d.h. f ist eine Überlagerung. $\square$

Gilt also $G(Y_1, y_1) \leqslant G(Y_2, y_2)$, gibt es ein kommutatives Dreieck von Überlagerungen

$$\begin{tikzcd}
(Y_1, y_1) \arrow[rd, "p_3"] \arrow[dd, "p_1"'] & \\
& (Y_2, y_2) \arrow[ld, "p_2"] \\
(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Für den Spezialfall $G(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$ ergibt sich:

<u>Satz IV.4.14</u> (Universelle Überlagerung). Sei (X, x_0) gut zshgd. Dann überlagert $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ regulär in eindeutiger Weise jede andere wegzshgde Überlagerung (Y, y_0) und

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rd] \arrow[dd] & \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & (Y, y_0) \arrow[ld] \\
(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

. $\square$

Insbesondere erhält man jede wegzshgde Überlagerung (Y, y_0) als $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)/G(Y, y_0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)/\pi_1(X, x_0)$ mit $G(Y, y_0) \leq \pi_1(X, x_0) \equiv \mathcal{D}\big((\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)\big)$.

<u>Fazit.</u>

Für einen gut zshgden Raum (X, x_0) besteht eine Galoiskorrespondenz zwischen dem gerichteten System der Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ und dem gerichteten System der punktierten wegzshgden Überlagerungen von X, die den Index in die Blätterzahl und genau die Normalteiler in normale Überlagerungen überführt. Der ganzen Untergruppe $\pi_1(X, x_0)$ entspricht die triviale, der trivialen Untergruppe entspricht die universelle Überlagerung.

<u>Bsp.</u> $\pi_1(X, x_0) \cong S_3$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \{id\} \arrow[dll, "\trianglelefteq\ 2"'] \arrow[dl, "\trianglelefteq\ 2"'] \arrow[d, "\trianglelefteq\ 2"] \arrow[dr, "\trianglelefteq\ 3"] \arrow[dd, bend right=60, "\trianglelefteq\ 6"'] & \\
\{id, (1,2)\} \arrow[drr, "\leq\ 3"'] & \{id, (2,3)\} \arrow[dr, "\leq\ 3"] & \{id, (3,1)\} \arrow[d, "\leq\ 3"] & \{id, (1,2,3), (1,3,2)\} \arrow[dl, "\trianglelefteq\ 2"] \\
 & & S_3 &
\end{tikzcd}
$$

Index

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[dll, "\text{reg. } 2"'] \arrow[dl, "\text{reg. } 2"'] \arrow[d, "\text{reg. } 2"] \arrow[dr, "3 \text{ reg.}"] \arrow[dd, bend right=60, "\text{reg. } 6"'] & \\
(X_{\langle(1,2)\rangle}, x_1) \arrow[drr, "\text{nicht reg. } 3"'] & (X_{\langle(2,3)\rangle}, x_2) \arrow[dr, "\text{nicht reg. } 3"] & (X_{\langle(3,1)\rangle}, x_3) \arrow[d, "\text{nicht reg. } 3"] & (X_{\langle(1,2,3)\rangle}, x_4) \arrow[dl, "\text{reg. } 2"] \\
 & & (X, x_0) &
\end{tikzcd}
$$

Blätterzahl

Weil $S^n \xrightarrow{p} \mathbb{RP}^n$ für $n \geq 2$ zweiblättrig universell ist, folgt zudem $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \cong \mathcal{D}(p) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

<u>Lemma IV.4.15</u> Es gilt $(\mathbb{RP}^3, x_0) \cong (SO(3), id)$.

<u>**Bew.**</u> Sei $\varphi: D^3 \longrightarrow SO(3)$ die Abb., die $v \in D^3$ auf die Drehung mit Achse $\mathbb{R}v$ und Winkel $|v| \cdot \pi$ abbildet (Rechte-Hand-Regel). Diese ist surjektiv und induziert wegen $\varphi(v) = \varphi(-v)$ für $v \in S^2$ eine stetige Bijektion $\overline{\varphi}: \mathbb{RP}^3 \longrightarrow SO(3)$. Weil $\mathbb{RP}^3$ kompakt und $SO(3)$ Hausdorffsch ist, ist $\overline{\varphi}$ ein Homöomorphismus. $\square$

Es folgt somit $\pi_1(SO(3), id) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, was sich durch den Gürteltrick illustrieren lässt.

V Einführung in die Kategorientheorie

V.1 Kategorien

Viele mathematische Konzepte, z. B. Produkte „$X \times Y$", werden formal völlig gleich eingeführt, egal ob es sich um Gruppen, Vektorräume, top. Räume, etc. handelt.

$\rightsquigarrow$ Finde abstrakte Def., die diese Spezialfälle liefert.

$\rightsquigarrow$ Zur Definition von „$X \times Y$" muss aber vorgegeben sein, dass X und Y zwei „Instanzen" (Objekte) desselben „Typs" (Kategorie) sind.

Def V.1.1 Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und einer Klasse von Morphismen (oder Pfeilen) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Wir schreiben $(f: X \to Y) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ und nennen X Quelle und Y Ziel des Pfeils f. Es gelte:

(i) Zu $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ gibt es einen ausgewählten Pfeil $g \circ f: X \to Z$, die Verknüpfung von f mit g, und wir haben $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

(ii) Zu $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt es $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$, die Identität auf X, sodass $f \circ \mathrm{id}_X = f$ für alle $f: X \to Y$ und $\mathrm{id}_X \circ g = g$ für alle $g: Y \to X$.

Notizen. • „Klasse" statt Menge wegen logischer Schwierigkeiten („Menge der Mengen" !?)

- Zu $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ eindeutig. Bew.: $\mathrm{id}_X' = \mathrm{id}_X \circ \mathrm{id}_X' = \mathrm{id}_X$.
- Pfeile der Form $f: X \to X$ heißen Endomorphismen.
- Ein Pfeil $f: X \to Y$ heißt Isomorphismus, falls es ein Inverses $g: Y \to X$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
- Hat f ein Inverses, ist dieses eindeutig. Bew.: $g' = g' \circ \mathrm{id}_Y = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g$.
- Ist f Endomorphismus und Isomorphismus, heißt f Automorphismus.

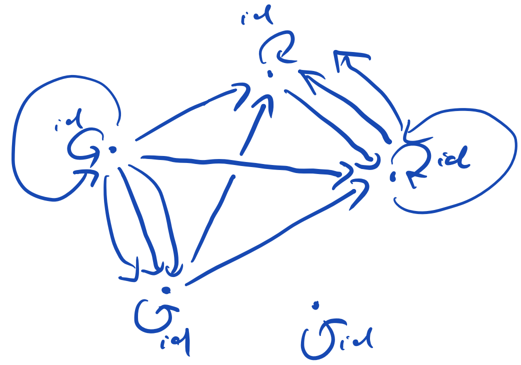
Bspe.

Kategorie	Objekte	Morphismen	Isomorphismen
Set	Mengen	Abbildungen	Bijektionen
R-mod	R-Moduln	R-lineare Abb.	R-Iso.
K-Vect	K-Vektorräume	K-lineare Abb.	K-Iso.
Group	Gruppen	Gruppenhomom.	Gruppeniso.
Ab	Abelsche Gr.	"	"
Top	Top. Räume	Stetige Abb.	Homöomorph.
Top.	Punkt. top. R	Basispunkterhaltende stetige Abb.	B.pkt. erhalt. Homöom.
HoTop	Top. Räume	Homotopieklassen stetiger Abb.	Homotopieklassen von Homotopieäquiv.
HoTop.	Punkt. top. R.	Punkt. Hom.top.Kl. basispkterh. stet. Abb.	Punkt. Hom. top. Kl. basispkt.erh. Hom.äquiv.
Top$^{(2)}$	Paare (X, A) top. R.e, sd. $A \subseteq X$	Stetige Abb., die Unterr. in Unterr. abbild.	Homöo.n, die sich zu Homöo.n einschränken

Eine Kategorie ist also ein gerichteter Graph mit Schleifen und Mehrfach-kanten

+ assoz. Verknüpfung

+ Identitäten



<u>Def. V.1.2</u> Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann ist die duale Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ gegeben durch $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ mit Komposition $f \circ g$ in $\mathcal{C}^{op}$ gegeben durch $g \circ f$ in $\mathcal{C}$.

V.2 Funktoren

<u>Def. V.2.1</u> Ein (kovarianter) Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ von einer Kat. $\mathcal{C}$ zu einer Kat. $\mathcal{D}$ ordnet jedem $X \in Ob(\mathcal{C})$ ein Objekt $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$ und jedem $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ein $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ zu, sodass

(i) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$,

(ii) $F(id_X) = id_{F(X)}$.

Ein kontravarianter Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein kovarianter Funktor von $\mathcal{C}^{op}$ nach $\mathcal{D}$, d.h. für $f : X \to Y$ gilt $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$ und $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Bspe.

(i) Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es einen Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

(ii) Vergissfunktoren $\underline{K\text{-Vect}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$, $\underline{\mathrm{Ab}} \to \underline{\mathrm{Group}}$, ...

(iii) Die Fundamentalgruppe definiert $\pi_1 : \underline{\mathrm{Top}_\bullet} \to \underline{\mathrm{Group}}$.
Für $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ erhalten wir $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

(iv) Wir haben Funktoren $\underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{HoTop}}$ und $\underline{\mathrm{Top}_\bullet} \to \underline{\mathrm{HoTop}_\bullet}$, die f in $[f]$ überführen.

(v) Schon gesehen: der Funktor π_1 faktorisiert über $\underline{\mathrm{HoTop}_\bullet}$:

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{HoTop}_\bullet} \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ \underline{\mathrm{Top}_\bullet} \arrow[ur] \arrow[rr, "\pi_1"] & & \underline{\mathrm{Group}} \end{tikzcd} .$$

(Hierbei genutzt: Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ kann man zu $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ komponieren.)

(vi) Abelisierung ist ein Funktor $(\cdot)_{ab} : \underline{\mathrm{Group}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$, der aus G die abelsche Gruppe $G/[G,G]$ macht, wobei $[G,G] \leq G$ von allen Kommutatoren $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ erzeugt wird. Offensichtlich gilt $[G,G] \trianglelefteq G$ und $f([G,G]) \subseteq [H,H]$ für $f : G \to H$, also erhalten wir $f_{ab} : G_{ab} \to H_{ab}$.

(vii) Der freie Vektorraum ist ein Funktor $F : \underline{\mathrm{Set}} \to \underline{K\text{-Vect}}$ und ordnet einer Menge X den Vektorraum der formalen K-Linearkombinationen $F(X) = \{ \sum_{x \in X} \lambda_x x : \lambda_x \in K, \lambda_x = 0$

für fast alle $x \in X\}$ zu. Demnach ist $X \subseteq F(X)$ eine Basis und $f: X \to Y$ induziert $F(f): F(X) \to F(Y)$ durch eindeutige K-lineare Fortsetzung.

(viii) Dualisieren ist ein kontravarianter Funktor $D: \underline{K\text{-Vect}} \to \underline{K\text{-Vect}}$ mit $D(V) = V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ und für $f: V \to W$ haben wir $D(f): W^* \to V^*,\ \delta \mapsto \delta \circ f$

(ix) Fixiere einen K-Vektorraum W. Dann ist $(\cdot) \otimes_K W: \underline{K\text{-Vect}} \to \underline{K\text{-Vect}}$ ein kovarianter Funktor. Für $f: V \to U$ erhalten wir $f \otimes \mathrm{id}_W: V \otimes_K W \to U \otimes_K W$ mit $f \otimes \mathrm{id}_W(v \otimes w) = f(v) \otimes w$ für elementare Tensoren $v \otimes w \in V \otimes_K W$.

Konstruktion: $V \otimes_K W = F(V \times W) \Big/ \left\langle \begin{matrix} (\lambda u + \mu v, w) - \lambda(u,w) - \mu(v,w), \\ (v, \lambda u + \mu w) - \lambda(v,u) - \mu(v,w) \end{matrix} \right\rangle$

<u>Slogan</u>: Eine funktorielle Konstruktion muss unabhängig von Wahlen sein.

<u>V.3 Natürliche Transformationen</u>

Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Wahl einer Basis $B \subset V$ liefert die duale Basis $B^* \subset V^*$ definiert durch $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ und $b_i \mapsto b_i^*$ definiert einen Iso. $V \xrightarrow{\cong} V^*$. Einen Iso. $V \xrightarrow{\cong} V^{**}$

gibt es „natürlich" und ohne jede Wahl:
$ev_V : v \mapsto (V^* \to K,\ \delta \mapsto \delta(v))$. Vorteil: Für jede K-lineare Abb. $f: V \to W$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "ev_V"'] & W \arrow[d, "ev_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd},$$

denn für $\delta \in W^{**}$ und $v \in V$ gilt $ev_W(f(v))(\delta) = \delta(f(v)) =$
$= ev_V(v)(f^*(\delta)) = f^{**}(ev_V(v))(\delta)$, d.h. $ev_W \circ f = f^{**} \circ ev_V$.

<u>Def V.3.1</u> Seien $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine natürliche Transformation $\eta: F \to G$ ordnet jedem $A \in Ob(\mathcal{C})$ derart einen Morphismus $\eta_A \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$ zu, dass für jeden Pfeil $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{D}$ kommutiert.

Wir nennen η_A die Komponente von η bei A.
<u>Bspe.</u> (i) Gerade gesehen: $\eta = ev: Id_{\underline{K\text{-Vect}}} \to DD = (\ )^{**}$
(ii) Eine Gruppe G definiert eine Kategorie $\underline{G}$ mit genau einem Objekt „•" und $Hom_{\underline{G}}(\bullet, \bullet) = G$ mit der Gruppenmultiplikation als Verknüpfung und $id_\bullet = 1 \in G$.

Eine G-Wirkung $G \curvearrowright X$ ist nun dasselbe wie ein Funktor $\mathcal{F}: \underline{G} \to \underline{\text{Set}}$. Die Menge ist $X := \mathcal{F}(\bullet)$ mit Wirkung $g \cdot x := \mathcal{F}(g)(x)$. z.z.:

1) $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$ 2.) $1 \cdot x = x$.

1) $g \cdot (h \cdot x) = g \cdot (\mathcal{F}(h)(x)) = \mathcal{F}(g)(\mathcal{F}(h)(x)) =$
$= \mathcal{F}(gh)(x) = (g \cdot h) \cdot x$

2.) $1 \cdot x = \mathcal{F}(1)(x) = \mathcal{F}(id_\bullet)(x) = id_{\mathcal{F}(\bullet)}(x) = id_X(x) = x$.

Für $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \underline{G} \to \underline{\text{Set}}$ ist eine nat. Trafo. $\eta: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ eine äquivariante Abbildung, denn für $x \in X$ bedeutet $(\eta_\bullet \circ \mathcal{F}(g))(x) = (\mathcal{G}(g) \circ \eta_\bullet)(x)$ gerade $\eta_\bullet(g \cdot x) = g \cdot \eta_\bullet(x)$.

__Def V.3.2__ Ein natürlicher Isomorphismus $\eta: \mathcal{F} \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}$ ist eine nat. Trafo., deren Komponenten Iso.en sind.

__Fangfrage:__ Ist $ev: Id_{\underline{K\text{-Vect}}} \to (\cdot)^{**}$ ein nat. Iso.? Nein, denn $V^{**} \ncong V$, falls V unendlich-dim.
Aber ev ist ein nat. Iso., wenn man Id und $(\cdot)^{**}$ auf $\underline{\text{fin-dim-K-Vect}}$ betrachtet.

__Def V.3.3__ Eine Äquivalenz von Kategorien besteht aus Funktoren $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\mathcal{G}: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, sodass $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ natürlich isomorph zu $Id_\mathcal{C}$ und $Id_\mathcal{D}$ sind.

Bsp. • $\mathrm{Cov}_{(X,x_0)} \to \mathrm{Sub}_{\pi_1(X,x_0)}$ (s. Hausaufgabe)

• Sei L/K eine Galoiserweiterung. Zw. Körper$_{L/K} \to \mathrm{Sub}_{\mathrm{Gal}(L/K)}$
$Z \mapsto \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) : \sigma|_Z = \mathrm{id}_Z\}$,
$\mathrm{Sub}_{\mathrm{Gal}(L/K)} \to$ Zw. Körper$_{L/K}$, $H \mapsto L^H$.

V.4 Adjunktion

Für einen Vergissfunktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ stellt sich die Frage nach der allgemeinsten und effizientesten Konstruktion in umgekehrter Richtung.

Bsp. • $\underline{K\text{-Vect}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ $\rightsquigarrow$ Freier Vektorraum (Bsp. (vii))
• $\underline{\mathrm{Ab}} \to \underline{\mathrm{Group}}$ $\rightsquigarrow$ Abelisierung (Bsp. (vi))

Diese Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sind „linksadjungiert" zu $\mathcal{G}$.

Def. V.4.1 Seien $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann heißt $\mathcal{F}$ linksadjungiert zu $\mathcal{G}$ (und $\mathcal{F}$ heißt rechtsadjungiert zu $\mathcal{F}$), falls es zu jedem $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ eine in A und B natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathcal{G}(B)), \quad f \mapsto \tilde{f}$$

gibt.

„Natürlich in A": Für festes $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ sind
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\cdot), B)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \mathcal{G}(B)) : \mathcal{C}^{op} \to \underline{\mathrm{Set}}$
natürlich isomorph. Hier (und anderswo) nehmen

wir an, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ seien lokal klein, d.h. $\mathrm{Hom}(X,Y)$ ist tatsächlich stets eine Menge. Es gilt also für $f: A' \to A$ in $\mathcal{C}$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B)$, dass

$$\overline{\varphi} \circ f = \overline{\varphi \circ F(f)}$$

„Natürlich in B" bedeutet: Für festes $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $g: B \to B'$ in $\mathcal{D}$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B)$ gilt

$$G(g) \circ \overline{\varphi} = \overline{g \circ \varphi}.$$

„Adjunktion" wegen formaler Ähnlichkeit zu Hilbertraumoperatoren: $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle$.

<u>Bsp.</u> • Freier Vektorraum $F: \underline{\mathrm{Set}} \to \underline{K\text{-Vect}}$ ist linksadjungiert zum Vergissfunktor $G: \underline{K\text{-Vect}} \to \underline{\mathrm{Set}}$:

$$\mathrm{Hom}_{\underline{K\text{-Vect}}}(F(X), V) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Set}}}(X, G(V)), \quad \varphi \mapsto \varphi|_X.$$

Bijektion wegen eindeutiger K-linearer Fortsetzung. Natürlichkeit ergibt sich aus den obigen Formeln.

• Linksadjungiert zum Vergissfunktor $G: \underline{\mathrm{Group}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ ist der Funktor „Freie Gruppe" $F: \underline{\mathrm{Set}} \to \underline{\mathrm{Group}}$: Für eine Menge S bestehe $F(S)$ aus allen ‚Wörtern', z.B. $a^3 b^{-2} a a b^{-5} b^5 c$, aus dem Alphabet S mit den offensichtlichen

Identifizierungen, z. B. $aa^{-1}b = b$, $c^2c^{-3} = c^{-1}$, ...
Komposition durch Konkatenation. Einselement ist das leere Wort „1" oder „e". Zu einer Abb.
$f: S_1 \to S_2$ gibt es eine eindeutige Fortsetzung
$\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(S_1) \to \mathcal{F}(S_2)$,

$$\mathcal{F}(f)(abc^{-3}b) = f(a)f(b)f(c)^{-3}f(b).$$

Die Funktoreigenschaften sind klar, die natürliche Bijektion der Hom-Mengen ergibt sich genauso.

Für jede Gruppe H erhalten wir einen Gruppenhom.

$$\varepsilon_H: \mathcal{F}(\mathcal{G}(H)) \to H,$$

der sich auf dem Alphabet H zu id_H einschränkt.
Dies definiert eine nat. Trafo. $\varepsilon: \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \to \mathrm{Id}_{\underline{\mathrm{Group}}}$
(die „Koeins" der Adjunktion). Wir erhalten einen Iso.

$$\overline{\varepsilon_H}: \mathcal{F}(\mathcal{G}(H))/\ker \varepsilon_H \xrightarrow{\cong} H,$$

d.h. jede Gruppe ist Quotient einer freien Gruppe!

<u>Def. V.4.2</u> Sei S eine Menge und $R \subseteq \mathcal{F}(S)$. Dann heißt das Paar (S, R) Präsentation der Gruppe G, falls

$$G \cong \mathcal{F}(S)/\langle\langle R \rangle\rangle,$$

wobei $\langle\langle R \rangle\rangle$ den kleinsten Normalteiler von $\mathcal{F}(S)$ bezeichnet, der R enthält. Notation: $G = \langle S \mid R \rangle$.

Vermöge $\overline{\varepsilon_H}$ hat jede Gruppe H eine Präsentation.
Man sucht aber effiziente Präsentationen, z. B.

$$\mathbb{Z}^2 \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle .$$

<u>Bew.</u>: Laut Adjunktion setzt sich $a \mapsto (1,0)$, $b \mapsto (0,1)$ zu einem surj. Hom. $p: F(\{a,b\}) \to \mathbb{Z}^2$ fort und $\langle\langle \{aba^{-1}b^{-1}\} \rangle\rangle \leq \ker p$. Wir erhalten somit $\bar{p}: F(\{a,b\}) / \langle\langle \{aba^{-1}b^{-1}\}\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}^2$.
Z.z.: $\bar{p}$ ist inj. Sei also $x = [a]^{n_1}[b]^{m_1} \cdots [a]^{n_k}[b]^{m_k} \in \ker \bar{p}$.
Dann ergibt $\bar{p}(x) = 0$, dass $\begin{pmatrix} n_1 + \dots + n_k \\ m_1 + \dots + m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also
$x = [a]^{n_1 + \dots + n_k} [b]^{m_1 + \dots + m_k} = 1$. $\square$

<u>V.5 Limes und Kolimes</u>

Erinnerung: Suchen kategorielle Def. des Produkts „$X \times Y$".
Beobachtung: Haben Projektionen

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "pr_X"'] \arrow[dr, "pr_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

<u>Def V.5.1</u> Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Ein Produkt von X und Y ist ein Objekt $P \in Ob(\mathcal{C})$ mit Pfeilen $pr_X: P \to X$ und $pr_Y: P \to Y$, die die universelle Eigenschaft

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[ddl, bend right, "f_X"'] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\ & P \arrow[dl, "pr_X"'] \arrow[dr, "pr_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

erfüllen.

D.h. zu $f_X : Q \to X$ und $f_Y : Q \to Y$ gibt es genau einen Pfeil $f : Q \to P$ mit $f_X = pr_X \circ f$ und $f_Y = pr_Y \circ f$.
Notation: $f = f_X \times f_Y$ oder $f = (f_X, f_Y)$.

Produkte müssen nicht existieren, aber wenn, sind sie eindeutig:

$$\begin{tikzcd}
& P' \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddddl, bend right, "pr'_X"'] \arrow[ddddr, bend left, "pr'_Y"] & \\
& P \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[dddl, bend right, "pr_X"'] \arrow[dddr, bend left, "pr_Y"] & \\
& P' \arrow[ddl, "pr'_X"'] \arrow[ddr, "pr'_Y"] & \\
& & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage der univ. Eig. folgt $g \circ f = id_{P'}$.
Genauso $f \circ g = id_P$. („Allgemeiner Unsinn")

<u>Bsp.</u> In <u>Set</u>, <u>Group</u>, <u>K-Vect</u>, <u>R-Mod</u>, <u>Top</u>, <u>HoTop</u> ist das kategorische Produkt das gewohnte Produkt.
<u>Achtung</u>: In <u>Top$^{(2)}$</u> gilt $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, A \times B)$, aber manche Autoren schreiben $(X, A) \times (Y, B)$ für $(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$.
Produkte sind Spezialfälle von Faserprodukten.

<u>Def V.5.2</u> Das Faserprodukt oder Pullback des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "s"] & Z
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$ besteht aus $P \in Ob(\mathcal{C})$ und Pfeilen $p_X : P \to X$ und $p_Y : P \to Y$, sd.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

kommutiert und universell ist, d.h.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] \arrow[drr, bend left, "f_Y"] \arrow[ddr, bend right, "f_X"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ & X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}.$$

Notation:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

„kartesisches Quadrat"

Wie oben sind Faserprodukte eindeutig.

<u>Bsp.</u>: In <u>Set</u> gibt es immer Faserprodukte. Für

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$ ist $P = \{(x,y) \in X \times Y : s(x) = t(y)\}$

und $p_X = pr_X|_P$, $p_Y = pr_Y|_P$. Für $X \xleftarrow{f_X} Q \xrightarrow{f_Y} Y$ ist $f : Q \to P$, $q \mapsto (f_X(q), f_Y(q))$

- In <u>Top</u> wie oben mit Teilraumtop. der Produkttop.

  Hausaufgabe: Ist $p: E \to B$ ein Faserbündel und $f : B' \to B$ stetig, so ist $p' : f^*E \to B'$ in

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

ein Faserbündel ($\rightsquigarrow$ Funktor $f^* : \underline{Cov_B} \to \underline{Cov_{B'}}$)

Suchen weitere Verallgemeinerung von Faserprodukten.

Eine Kategorie heißt **klein**, wenn die Klasse der Objekte und die Klassen der Morphismen jeweils Mengen bilden.

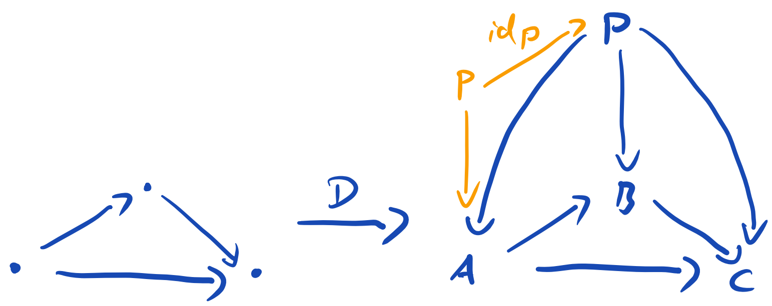
<u>Def V.5.3</u> Ein **Diagramm** in $\mathcal{C}$ ist ein Funktor $D: I \to \mathcal{C}$ aus einer kleinen Kategorie I (der **Indexkategorie**).

<u>Bsp.</u>

- $$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[loop above, "id"] & \bullet \arrow[d] \arrow[loop above, "id"] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[loop below, "id"] & \bullet \arrow[loop right, "id"] \end{tikzcd} \xrightarrow{\quad D \quad} \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

- Sei $P \in Ob(\mathcal{C})$.
$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{1_P^I} \mathcal{C} \\ X &\longmapsto P \\ (f: X \to Y) &\longmapsto id_P. \end{aligned}$$

<u>Def V.5.4</u> Ein **Kegel** auf dem Diagramm $D: I \to \mathcal{C}$ besteht aus einem Objekt $P \in Ob(\mathcal{C})$ und einer nat. Trafo. $\eta: 1_P^I \longrightarrow D$.



Ein Kegel besteht also aus der Kegelspitze P und Pfeilen von der Spitze in jedes Objekt des Diagramms, sodass alle Dreiecke (Kegelwände) kommutieren.

<u>Def. V.5.5</u> Ein Limes auf (oder von) $D: I \to \mathcal{C}$ ist ein universeller Kegel $\eta: 1_P^I \longrightarrow D$: für jeden weiteren Kegel $\eta': 1_{P'}^I \longrightarrow D$ gibt es einen eindeutigen Pfeil $f: P' \longrightarrow P$ mit $\eta_i' = \eta_i \circ f$ für alle $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
D(i) \arrow[rr] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

Limiten sind bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig nach allgemeinem Unsinn. Notation: $P = \lim D = \varprojlim D$

<u>Bsp.</u>
- Das Produkt von $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ ist der Limes des Diagramms $\bullet \quad \bullet \xrightarrow{D} X \quad Y$
- Das Faserprodukt von $X \xrightarrow{s} Z \xleftarrow{t} Y$ ist der Limes von
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \xrightarrow{D} \begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}.$$

Zu kategoriellen Begriffen erhält man duale Begriffe durch „Umkehren aller Pfeile".

Bsp. Ein Kokegel auf $D: I \to \mathcal{C}$ ist eine nat. Trafo. $\eta: D \to 1_P^I$.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
A \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & C \arrow[dl] \\
 & P &
\end{tikzcd}$$

Def. V.5.6 Ein Kolimes von $D: I \to \mathcal{C}$ ist ein universeller Kokegel $\eta: D \to 1_P^I$:

$$\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right] & & D(j) \arrow[dl] \arrow[ddl, bend left] \\
 & P \arrow[d, dashed, "\exists!" left, "f" right] & \\
 & P' &
\end{tikzcd}$$

Wieder ist ein Kolimes bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig. Notation: $P = \operatorname{colim} D = \varinjlim D$.

Bsp. • Der Kolimes von $\bullet \quad \bullet \xrightarrow{D} X \quad Y$ heißt Koprodukt von X und Y. Notation: $X \amalg Y$.

Zu $X \amalg Y$ gehören also Morphismen $X \xrightarrow{i_X} X \amalg Y \xleftarrow{i_Y} Y$ mit universeller Eigenschaft

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "i_X"] \arrow[ddr, bend right, "f_X"'] & & Y \arrow[dl, "i_Y"'] \arrow[ddl, bend left, "f_Y"] \\
 & X \amalg Y \arrow[d, dashed, "\exists!" left, "f" right] & \\
 & Q &
\end{tikzcd}$$

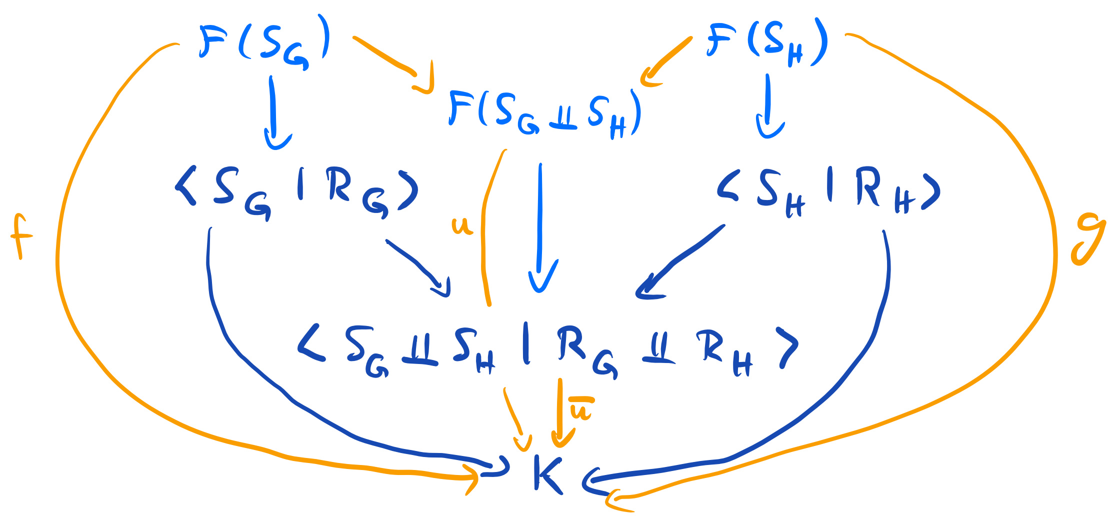
Notation: $f = f_X \amalg f_Y$.

Bsp.
- In **Set** ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung.
- In **Top** und **HoTop** ist das Koprodukt von Räumen X und Y die top. Summe $X \amalg Y = X \sqcup Y$.
- In $\mathbf{Top}_\bullet$ und $\mathbf{HoTop}_\bullet$ ist $(X, x_0) \amalg (Y, y_0)$ die Einpunktvereinigung (engl. wedge sum) $(X \vee Y, \bullet)$.
- In **R-Mod** gilt $M \amalg N = M \oplus N$. Beachte: $M \oplus N \cong M \times N$, aber für unendliches I gilt i. A. $\bigoplus_{i \in I} M_i \neq \prod_{i \in I} M_i$.

Lemma V.5.7 Koprodukte existieren in **Group**. Das Koprodukt von G und H heißt freies Produkt (Notation $G * H$) und für $G = \langle S_G \mid R_G \rangle$ und $H = \langle S_H \mid R_H \rangle$ gilt

$$G * H = \langle S_G \amalg S_H \mid R_G \amalg R_H \rangle .$$

Bew. Nachweis der universellen Eigenschaft:



Die Homomorphismen f und g sind durch ihre Einschränkungen auf S_G und S_H bestimmt ($\underline{\mathrm{Group}} \leftrightarrows \underline{\mathrm{Set}}$ - Adjunktion). Nach univ. Eig. des Koprodukts in $\underline{\mathrm{Set}}$ erhalten wir $S_G \amalg S_H \to K$ und daraus nach $\underline{\mathrm{Group}} \leftrightarrows \underline{\mathrm{Set}}$ - Adjunktion $u : F(S_G \amalg S_H) \to K$. Da f und g über $\langle S_G \mid R_G \rangle$ bzw. $\langle S_H, R_H \rangle$ faktorisieren, erhalten wir $\bar{u} : \langle S_G \amalg S_H \mid R_G \amalg R_H \rangle \to K$ und $\bar{u}$ ist durch $\bar{u}|_{S_G \amalg S_H}$ eindeutig bestimmt, also durch f und g. $\square$

Der Kolimes eines Diagramms

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd} \xrightarrow{D} \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$ heißt **Kofaserprodukt** oder **Pushout**. Es besteht also aus einem $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Pfeilen $X \xrightarrow{i_X} Z \xleftarrow{i_Y} Y$ mit universeller Eigenschaft

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "i_Y"] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\ X \arrow[r, "i_X"] \arrow[drr, bend right, "f_X"'] & Z \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\ & & Q \end{tikzcd}.$$

Notation:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

„**kokartesisches Quadrat**“.

Lemma V.5.8 Pushouts existieren in **Top** und sind gegeben durch

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X \amalg Y/_\sim \end{tikzcd},$$

wobei „$\sim$" die feinste Äquivalenzrel. auf $X \amalg Y$ bezeichnet, für die $s(a) = t(a)$ für alle $a \in A$ gilt.

Bew. Zu zeigen:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\ X \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "f_X"'] & X \amalg Y/_\sim \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\ & & Q \end{tikzcd}.$$

Nach univ. Eig. des Koprodukts gibt es $f_X \amalg f_Y : X \amalg Y \to Q$ und es gilt

$$(f_X \amalg f_Y)(s(a)) = f_X(s(a)) = f_Y(t(a)) = (f_X \amalg f_Y)(t(a)).$$

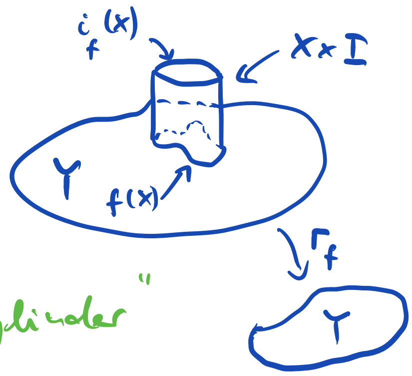
Nach univ. Eig. der Quotiententopologie erhalten wir $\overline{f_X \amalg f_Y} : X \amalg Y/_\sim \to Q$ wie gewünscht.
Ist $g : X \amalg Y/_\sim \to Q$ ein weiterer Pfeil wie oben, faktorisiert er $f_X \amalg f_Y$ über $X \amalg Y/_\sim$, also $g = \overline{f_X \amalg f_Y}$ nach Eind. in der univ. Eig. der Quot.top. $\square$

Ist $s : A \hookrightarrow X$ die Inklusion eines Teilraums, so ist $X \amalg Y/_\sim$ die Anheftung von X an Y entlang t.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\
X \arrow[r] & X \cup_f Y
\end{tikzcd}
.
\qquad \text{Insbes.:} \qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \bullet \arrow[d] \\
X \arrow[r] & X/A
\end{tikzcd}
.
$$

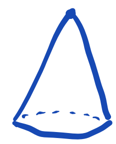
Spezialfälle:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\
X \times I \arrow[r] & M_f
\end{tikzcd}
$$



„Abbildungszylinder"

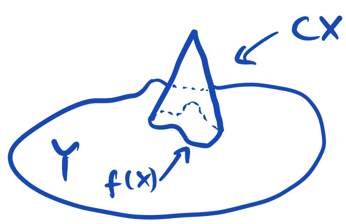
$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \bullet \arrow[d] \\
X \times I \arrow[r] & CX
\end{tikzcd}
$$



„Kegel"

Die Inklusion $i: X \hookrightarrow CX$ der Basis zeigt, dass jeder Raum in einen zusammenziehbaren Raum einbettet. Zudem gilt $f = r_f \circ i_f$, d.h. jede stetige Abb. f ist Komposition einer Inklusion und einer Homotopieäquiv.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\
CX \arrow[r] & C_f
\end{tikzcd}
$$



„Abbildungskegel" („Verbesserung von $Y/\mathrm{im}\, f$")

<u>Prop V.5.9</u> Sei K ein kompakter Raum. Ist

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "g_2"] \\
X \arrow[r, "g_1"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

kokartesisch in <u>Top</u>, so auch

$$
\begin{tikzcd}
A \times K \arrow[r, "f_2 \times id"] \arrow[d, "f_1 \times id"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \times K \arrow[d, "g_2 \times id"] \\
X \times K \arrow[r, "g_1 \times id"] & Z \times K
\end{tikzcd}
.
$$

Bew. Nach dem letzten Lemma ist

$$g_1 \amalg g_2 : X \amalg Y \to Z$$

eine Identifizierung. Nach Blatt 4/5, Aufgabe 2 ist auch

$$g_1 \times \mathrm{id}_K \amalg g_2 \times \mathrm{id}_K : X \times K \amalg Y \times K \to Z \times K$$

eine Identifizierung. Wir erhalten einen induzierten Homöo.

$$X \times K \amalg Y \times K /_{\sim} \xrightarrow{\cong} Z \times K$$

mit $(x, k_1) \sim (y, k_2)$ falls $g_1(x) = g_2(y)$ und $k_1 = k_2$ oder äquivalent, es gibt $a \in A$ mit $f_1(a) = x$, $f_2(a) = y$ und $k_1 = k_2$. Mit dem Lemma ist alles gezeigt. $\square$

__Lemma V.5.10__ Pushouts existieren in __Group__ und sind gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & H \arrow[d] \\
G \arrow[r] & (G * H)/N
\end{tikzcd},$$

wobei $N = \langle\langle s(a)t(a)^{-1} : a \in A \rangle\rangle \trianglelefteq G * H$.

Bew.: Zu zeigen:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & H \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
G \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "f"'] & (G * H)/N \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\
 & & Q
\end{tikzcd}.$$

Nach univ. Eig. des Koprodukts erhalten wir

$$f * g : \; G * H \longrightarrow Q .$$

Weil $f*g(s(a)t(a)^{-1}) = f(s(a))\, g(t(a))^{-1} = 1$, erhalten wir

$$\overline{f*g} : \; G*H/N \longrightarrow Q .$$

Die Eind. folgt wie oben aus der univ. Eig. der Quotientengruppe. $\square$

Für $G = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ und $H = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ gilt also
$G*H/N = \langle S_1 \amalg S_2 \mid R_1 \amalg R_2 \amalg \{ s(a)t(a)^{-1} : a \in A \} \rangle$.

Im Spezialfall, dass s und t Inklusionen von Untergruppen sind, heißt

$$G*H/N =: G *_A H$$

amalgamiertes (freies) Produkt von G und H.

<u>Bsp.</u>: $\mathbb{Z}/6 *_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/4 \cong SL(2;\mathbb{Z})$.

VI Berechnung von Fundamentalgruppen

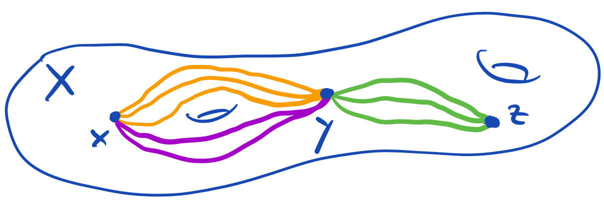
VI.1 Das Fundamentalgruppoid

Def VI.1.1 Ein Gruppoid ist eine kleine Kategorie, in der alle Pfeile Isomorphismen sind.

Def VI.1.2 Sei X ein top. Raum. Das Fundamentalgruppoid von X ist die kleine Kategorie $\Pi(X)$ mit $Ob(\Pi(X)) = X$ und für $x, y \in X$ ist

$$\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x, y) = \{\gamma : I \to X : \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\} /_{\simeq_{\{0,1\}}}$$

mit Konkatenation als Komposition (für $x \xrightarrow{[\gamma_1]} y \xrightarrow{[\gamma_2]} z$ gilt $[\gamma_2] \circ [\gamma_1] = [\gamma_1 \gamma_2]$) und Identitäten $id_x = [c_x]$ für $x \in X$.



Notiz.
- $[\gamma]^{-1} = [\overline{\gamma}]$
- $\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x_0, x_0) = \pi_1(X, x_0)$

Def VI.1.3 Eine Kategorie heißt zusammenhängend, wenn man je zwei Objekte durch Pfeile verbinden kann:

$$A \longleftarrow B \longrightarrow C \longleftarrow D$$

($\mathrm{Hom}(A, D) = \emptyset$ ist erlaubt, für Gruppoide folgt $\mathrm{Hom}(A,D) \neq \emptyset$)

Notiz. $\Pi(X)$ zusammenhängend $\Leftrightarrow$ X wegzusammenhängend.

Lemma VI.1.4 Sei $\mathcal{G}$ ein nichtleeres zshgdes Gruppoid, $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$. Dann ist der Inklusionsfunktor

$$\begin{aligned} I_x : \underline{\mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(x)} = \underline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(x,x)} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \bullet &\longmapsto x \\ g : x \to x &\longmapsto g : x \to x \end{aligned}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Bew. Wähle $f_y : x \to y$ für alle $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ (Auswahlaxiom, $\mathcal{G}$ klein) und sei dabei $f_x = \mathrm{id}_x$. Definiere

$$\begin{aligned} R : \mathcal{G} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(x)} \\ y &\longmapsto \bullet \\ g : y \to z &\longmapsto f_z^{-1} \circ g \circ f_y . \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} y \arrow[rr, bend left, "g"] & & z \\ & x \arrow[ul, "f_y"] \arrow[ur, "f_z"'] & \end{tikzcd}$$

Es gilt $R \circ I_x = \mathrm{Id}_{\underline{\mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(x)}}$. Zudem ist $f : I_x \circ R \to \mathrm{Id}_{\mathcal{G}}$ ein nat. Iso., denn für $g : y \to z$ haben wir

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f_y"] \arrow[d, "f_y"', "\cong"] & y \arrow[r, "g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & z \arrow[r, "f_z^{-1}"] & x \arrow[d, "f_z", "\cong"'] \\ y \arrow[rrr, "g"] & & & z \end{tikzcd}$$

. $\square$

Kor. VI.1.5 Sei X ein (nichtleerer) wegzshgder top. Raum. Dann ist der Inklusionsfunktor $\underline{\pi_1(X, x_0)} \longrightarrow \Pi(X)$ eine Äquiv. von Kategorien. $\square$

VI.2 Der Satz von Seifert-van Kampen

Sei **Groupoid** die Kategorie der Gruppoide mit Funktoren als Morphismen. Wir haben Funktoren

$$\underline{(\ )} : \underline{\mathrm{Group}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Groupoid}},$$
$$\Pi : \underline{\mathrm{Top}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Groupoid}}$$

Satz VI.21 (Seifert-van Kampen-Brown) Sei X ein top. Raum und $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von X, sodass $U \cap V \in \mathcal{O}$ für alle $U, V \in \mathcal{O}$. Betrachte $\mathcal{O}$ als kleine Kategorie mit Inklusionen als Morphismen. Dann definiert die Einschränkung von Π auf $\mathcal{O}$ ein Diagramm $\Pi|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \underline{\mathrm{Groupoid}}$ und es gilt $\Pi(X) = \mathrm{colim}\, \Pi|_{\mathcal{O}}$.

Notiz. Mit der Notation „$\mathrm{colim}_{U\in\mathcal{O}} U$" für „$\mathrm{colim}(\mathcal{O} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Top}})$" und „$\mathrm{colim}_{U\in\mathcal{O}} \Pi(U)$" für „$\mathrm{colim}\, \Pi|_{\mathcal{O}}$" besagt der Satz

$$\Pi(\mathrm{colim}_{U\in\mathcal{O}} U) = \mathrm{colim}_{U\in\mathcal{O}} \Pi(U),$$

also eine „Kostetigkeitseigenschaft" des Funktors Π.

Bew. (des Satzes) Offensichtlich definieren die Inklusionen $\Pi(U) \to \Pi(X)$ einen Kokegel $\iota : \Pi|_{\mathcal{O}} \to 1^{\mathcal{O}}_{\Pi(X)}$. z.z.: für jeden weiteren Kokegel $\eta : \Pi|_{\mathcal{O}} \to 1^{\mathcal{O}}_{\mathcal{G}}$ gibt es einen eindeutigen Funktor $F : \Pi(X) \to \mathcal{G}$, sodass $\eta_U = F \circ \iota_U$ für alle $U \in \mathcal{O}$.

$$\begin{tikzcd} \Pi(U) \arrow[r, "\iota_U"] \arrow[dr, "\eta_U"'] & \Pi(X) \arrow[d, "F"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Für $x \in X$ wähle $U \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$ und setze $F(x) = \eta_U(x)$.
Wohldefiniert: für $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V$ gilt $U \cap V \in \mathcal{O}$ und

$$\begin{tikzcd} \pi(U) \arrow[dr, "\eta_U"'] & \pi(U\cap V) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{U\cap V}"] & \pi(V) \arrow[dl, "\eta_V"] \\ & \mathcal{G} & \end{tikzcd},$$

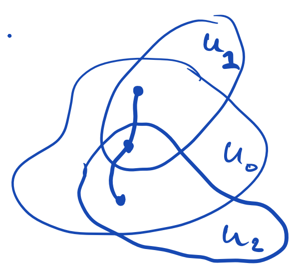
also $\eta_V(x) = \eta_{U\cap V}(x) = \eta_U(x)$. Sei nun $[\gamma] \in \mathrm{Hom}_{\pi(X)}(x,y)$.
Um $F([\gamma]) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(F(x), F(y))$ zu definieren, wähle ein Lebesgue-δ für die offene Überdeckung $\{\gamma^{-1}(U)\}_{U\in\mathcal{O}}$ des Kompaktums I. Wir zerteilen I in n Intervalle der Länge $< \delta$ und finden so eine Konkatenation

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$$

mit $\mathrm{Bild}(\gamma_i) \subseteq U_i$ für ein $U_i \in \mathcal{O}$. Wir setzen

$$F([\gamma]) = \eta_{U_n}([\gamma_n]) \circ \cdots \circ \eta_{U_1}([\gamma_1]).$$

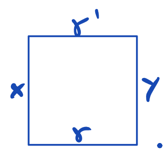
z.z.: $F([\gamma])$ ist unabhängig von
(i) der Unterteilung $\gamma = \gamma_1\cdots\gamma_n$ und der Wahl von $U_1, \dots, U_n$,
(ii) der Wahl des Vertreters γ von $[\gamma]$.



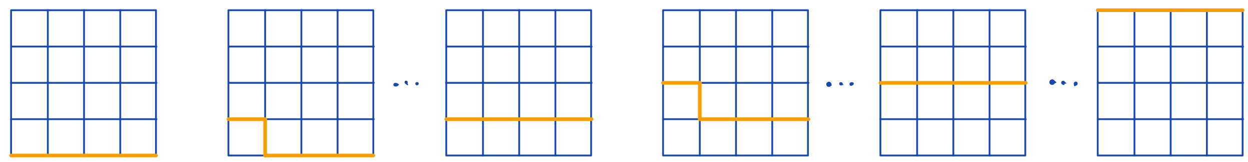
Zu (i). Wir zeigen $F([\gamma])$ bleibt gleich nach Verfeinerung der Unterteilung und Änderung der U_i. Sei dazu $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ mit $\mathrm{Bild}(\gamma) \subseteq U_0$ und $\mathrm{Bild}(\gamma_i) \subseteq U_i$, $i = 1, 2$. Dann gilt

$$\eta_{U_2}([\gamma_2]) \circ \eta_{U_1}([\gamma_1]) = \eta_{U_2\cap U_0}([\gamma_2]) \circ \eta_{U_1\cap U_0}([\gamma_1]) =$$
$$= \eta_{U_0}([\gamma_2]) \circ \eta_{U_0}([\gamma_1]) = \eta_{U_0}([\gamma_2]\circ[\gamma_1]) = \eta_{U_0}([\gamma_1\gamma_2])$$
$$= \eta_{U_0}([\gamma]).$$

__Zu (ii).__ Betrachte $\gamma \simeq^{H}_{\{0,1\}} \gamma'$ mit $H: I\times I \to X$:



Wähle ein Lebesgue-δ für $\{H^{-1}(U)\}_{U\in\mathcal{O}}$ und unterteile $I\times I$ in Quadrate mit Diameter $<\delta$. Erhalten Folge relativ homotoper Pfade:



Zwei aufeinander folgende Pfade haben die Form $\gamma_A\gamma_1\gamma_E$ und $\gamma_A\gamma_2\gamma_E$ mit $\gamma_1 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_2$ in einer Menge $U\in\mathcal{O}$. Es folgt

$$F([\gamma_A\gamma_1\gamma_E]) = \dots\circ \eta_U([\gamma_1])\circ\dots = \dots\circ \eta_U([\gamma_2])\circ\dots =$$
$$= F([\gamma_A\gamma_2\gamma_E]).$$

Nach Konstruktion faktorisiert F den Kokegel η über ι und ist eindeutig durch η bestimmt. $\square$

__Satz VI.22__ (Seifert-van Kampen-Gruppenversion) Sei X ein nichtleerer top. Raum, $x_0\in X$, und $\mathcal{O}$ eine Überdeckung durch offene wegzshgde Mengen, sd. $x_0\in U$ für alle $U\in\mathcal{O}$ und $U\cap V\in\mathcal{O}$ für alle $U,V\in\mathcal{O}$. Betrachte $\mathcal{O}$ als kleine Kategorie mit punktierten Inklusionen als Morphismen. Dann definiert die Einschränkung von π_1 auf $\mathcal{O}$ ein Diagramm $\pi_1|_{\mathcal{O}}: \mathcal{O}\to \underline{\text{Group}}$ und es gilt $\pi_1(X,x_0) = \operatorname{colim} \pi_1|_{\mathcal{O}}$.

Alternativ: $\pi_1(\operatorname{colim}_{(U,x_0)\in\mathcal{O}} (U,x_0)) \cong \operatorname{colim}_{(U,x_0)\in\mathcal{O}} \pi_1(U,x_0)$.

Bew. Die Inklusionen definieren den Kokegel $i: \underline{\pi_1}|_{\mathcal{O}} \to 1^{\mathcal{O}}_{\pi_1(X,x_0)}$

z.z.: i ist universell. Offensichtlich ist X wegzshgd, also ist $I: \underline{\pi_1(X,x_0)} \to \Pi(X)$ eine Äquivalenz von Kategorien.

Wir beweisen nur den Fall $|\mathcal{O}| < \infty$. Dann wählen wir für jedes $y \in X$ einen Pfad $\gamma_y : x_0 \to y$ innerhalb von $(\bigcap_{U \ni y} U) \in \mathcal{O}$ und $\gamma_{x_0} = c_{x_0}$. Wir erhalten das Inverse von I als

$$R([\gamma: y \to z]) = [x_0 \xrightarrow{\gamma_y} y \xrightarrow{\gamma} z \xrightarrow{\gamma_z^{-1}} x_0]$$

und genauso $R_U : \Pi(U) \to \underline{\pi_1(U,x_0)}$ für alle $U \in \mathcal{O}$, s.d.

$$\begin{tikzcd}
\Pi(U) \arrow[r, "R_U"] \arrow[d] & \underline{\pi_1(U,x_0)} \arrow[d] \\
\Pi(V) \arrow[r, "R_V"] & \underline{\pi_1(V,x_0)}
\end{tikzcd}$$

für $U \subseteq V$ kommutiert, d.h. $R : \Pi|_{\mathcal{O}} \to \underline{\pi_1}|_{\mathcal{O}}$ ist nat. Trafo.

Sei nun $\eta : \underline{\pi_1}|_{\mathcal{O}} \to 1^{\mathcal{O}}_G$ ein beliebiger Kokegel. Dieser induziert die Kokegel

$$\eta : \underline{\pi_1}|_{\mathcal{O}} \to 1^{\mathcal{O}}_{\underline{G}}, \qquad \eta \circ R : \Pi|_{\mathcal{O}} \to 1^{\mathcal{O}}_{\underline{G}}.$$

Nach der Gruppoidversion des Satzes erhalten wir einen eindeutigen Funktor $F : \Pi(X) \to \underline{G}$ mit

$$\eta_U \circ R_U = F \circ i_U : \quad \begin{tikzcd}
\Pi(U) \arrow[r, "R_U"] \arrow[d, "i_U"] & \underline{\pi_1(U,x_0)} \arrow[r, "\eta_U"] & \underline{G} \\
\Pi(X) \arrow[urr, "F"] & &
\end{tikzcd}$$

Wir ergänzen das Diagramm zu

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U,x_0) \arrow[r, "I_U"] \arrow[d, "i_U"] & \pi(U) \arrow[r, "R_U"] \arrow[d, "\iota_U"] & \pi_1(U,x_0) \arrow[r, "\eta_U"] & G \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "I"] & \pi(X) \arrow[urr, "F"] & &
\end{tikzcd}$$

Sei nun $f\colon \pi_1(X,x_0) \to G$ der Gruppenhom. mit $f = F\circ I$. Weil $R_U \circ I_U = \mathrm{id}_{\pi_1(U,x_0)}$, gilt $\eta_U = f\circ i_U$ für alle $U\in \mathcal{O}$ wie gewünscht. Eindeutigkeit: Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi(U) \arrow[r, "R_U"] \arrow[d, "\iota_U"] & \pi_1(U,x_0) \arrow[r, "\eta_U"] \arrow[d, "i_U"'] & G \\
\pi(X) \arrow[r, "R"] & \pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

erhalten wir $g\circ R = F$, weil $g\circ R$ den Kokegel $\eta\circ R$ über ι faktorisiert und diese Faktorisierung eindeutig durch F gegeben ist. Vorschalten von I liefert $g = F\circ I = f$, also $g = f$. $\square$

VI.3 Beispielberechnungen von Fundamentalgruppen

Wir betrachten den einfachsten (nichttrivialen) Fall des Satzes: $\mathcal{O} = \{U_1, U_2, U_1\cap U_2\}$, $x_0 \in U_1\cap U_2$. Dann folgt

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1\cap U_2, x_0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d] \\
\pi_1(U_2, x_0) \arrow[r] & \pi_1(X, x_0).
\end{tikzcd}$$

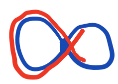
Bsp. · Sei $X = S^n$ mit $n \geq 2$. Wähle $x_0 = (1,0,\dots,0)$, $U_1 = S^n \setminus \{(0,\dots,0,-1)\}$, $U_2 = S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$.

Dann gilt

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \{1\} \arrow[d] \\ \{1\} \arrow[r] & \pi_1(S^n, x_0), \end{tikzcd}$$

d.h. $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$ (als Quotient von $\{1\} * \{1\} = \{1\}$).

Beachte: für $n = 1$ ist $U_1 \cap U_2$ unzshgd!

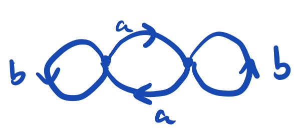
· $X = S^1 \vee S^1$ $\quad U_1 =$  $\quad U_2 =$ ,

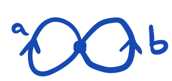
$U_1 \cap U_2 = X \simeq \bullet$

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\ \mathbb{Z} \arrow[r] & \pi_1(S^1 \vee S^1, \bullet), \end{tikzcd}$$

also $\pi_1(S^1 \vee S^1, \bullet) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2$.

Induktion: $\pi_1(\bigvee_{i=1}^{n} S^1, \bullet) \cong F_n$.

Beachte: 

$\longrightarrow$ 

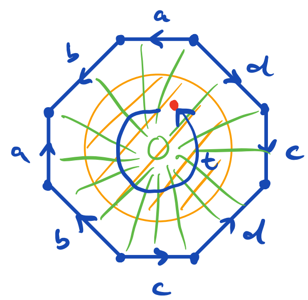
ist zweiblättrige Überlagerung. Somit

$$\begin{array}{ccc} \langle b, a^2, aba^{-1} \rangle & \leq & F(\{a,b\}) \\ \cong & & \cong \\ F_3 & \leq & F_2 \end{array}$$

und $[F_2 : F_3] = 2$.

Allgemeiner: Sei $[F_n : H] = e$. Dann ist die Überlagerung X_H von $X = \bigvee_{i=1}^{n} S^1$ ein Graph mit e Ecken und $e\cdot n$ Kanten. Kollabieren eines „Spannbaums" zeigt $H \cong F_m$ mit $m = e\cdot n - (e-1) = e(n-1)+1$ (Nielsen-Schreier-Formel).

- $X = \Sigma_g$



$U_1 \simeq \bigvee_{i=1}^{2g} S^1$

$U_2 \simeq \cdot$

x_0, $U_1 \cap U_2 \simeq S^1$

$$\begin{array}{ccc} \langle t \rangle & \xrightarrow{t \mapsto \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}} & \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \rangle \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \{1\} & \longrightarrow & \pi_1(\Sigma_g, \cdot) \end{array}$$

Es folgt

$$\pi_1(\Sigma_g, \cdot) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle$$

für die Flächengruppe vom Geschlecht g. Genauso:

$$\pi_1(N_g, \cdot) = \langle a_1, \dots, a_g \mid a_1^2 \cdots a_g^2 \rangle.$$

Beachte: $\pi_1(\Sigma_g, \cdot)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}$,

$$\pi_1(N_g, \cdot)_{ab} \cong \mathbb{Z}^g / \langle k\cdot(2,\dots,2)^T : k \in \mathbb{Z} \rangle \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

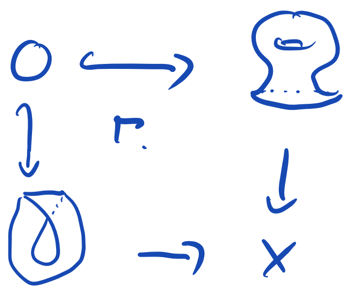
Diese abelschen Gruppen sind paarweise nicht isomorph.

$\leadsto$ Beweis des Klassifikationssatzes für Flächen vollständig (s. Kap. II). $\square$

$\leadsto$ Homöomorphieklassifizierung stimmt mit Homotopieklassifizierung überein. $\square$

$\leadsto$ Beachte: Es gibt kompakte zshgde 3-Mfktn M und N mit $M \simeq N$, aber $M \not\cong N$ ($\to$ Linsenräume).

- Sei X der Raum, der durch Ankleben eines Möbiusbandes an einen Torus mit herausgenommener offener Kreisscheibe entsteht



$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & T^2 \setminus D^2 \arrow[d] \\ M \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Seien U_1 und U_2 die um einen "Kragen" aufgedickten Umgebungen von M und $T^2 \setminus D^2$ in X. Dann ergibt sich

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_1 \cap U_2, \cdot) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \pi_1(U_1, \cdot) \arrow[d] \\ \pi_1(U_2, \cdot) \arrow[r] & \pi_1(X, \cdot) \end{tikzcd}$$

zu

$$\begin{tikzcd} \langle t \rangle \arrow[r, "t \mapsto aba^{-1}b^{-1}"] \arrow[d, "t \mapsto s^2"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \langle a, b \rangle \arrow[d] \\ \langle s \rangle \arrow[r] & \langle a, b, s \mid aba^{-1}b^{-1}s^{-2} \rangle \end{tikzcd}$$

Weil $\pi_1(X, \cdot)_{ab} \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, folgt $X \cong N_3$.

VI.4 Kofaserungen

Def VI.4.1 Eine stetige Abb. $i: A \to X$ hat die Homotopie-erweiterungseigenschaft (HEE) für einen Raum Y, falls

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i \times id_I"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\ X \arrow[r, "i_0^X"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "\exists H'"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

In Worten: Für jede Homotopie $H: A \times I \to Y$ und jede Anfangsbedingung $f: X \to Y$ mit $f(i(a)) = H(a,0)$ für alle $a \in A$ gibt es eine Erweiterung $H': X \times I \to Y$, sodass $H'(x,0) = f(x)$ für alle $x \in X$ und $H'(i(a),t) = H(a,t)$ für alle $a \in A$ und $t \in I$.

Wir fordern also nur die Existenz, nicht die Eindeutigkeit von H'.

Def VI.4.2 Eine stetige Abb. $i: A \to X$ heißt Kofaserung, falls sie die HEE für alle Räume Y hat.

Bemerkung.

HEE: $$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, dashed] \\ Y^I \arrow[u, "ev_0"] & A \arrow[l, "H"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Dual: $$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0^Y"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

HHE: Homotopie-hochhebungs-eigenschaft

Eine Abbildung $p: E \to B$ mit HHE für alle Y heißt **Faserung**. Wichtigstes Beispiel: Faserbündel.

Wollen zeigen: Hat $i: A \to X$ die HEE für den eigenen Abbildungszylinder M_i, so ist i eine Kofaserung.
Betrachte

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & A \times I \arrow[d, "\bar{i}"] \arrow[ddr, bend left, "i \times id"] & \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "i_0^X"'] & M_i \arrow[dr, dashed, "s"] & \\
& & X \times I
\end{tikzcd}
$$

Ist i eine Teilrauminklusion, so ist s stetige Bijektion auf das Bild $X \times \{0\} \cup A \times I$.
Ist i sogar die Inklusion eines abgeschlossenen Teilraums, so ist s ein Homöomorphismus auf das Bild, also ebenfalls eine Teilrauminklusion.
Mit Teil (iii) folgender Proposition ist dies auch wahr, wenn i eine Kofaserung ist.

<u>Prop VI.4.3</u> Sei $i: A \to X$ stetig. Dann sind äquivalent:
(i) i ist eine Kofaserung.
(ii) i hat die HEE für M_i.
(iii) Es gibt eine Retraktion $r: X \times I \to M_i$, d.h. $r \circ s = id_{M_i}$.

Bew. (i) $\Rightarrow$ (ii): Trivial. (ii) $\Rightarrow$ (iii): Die HEE für M_i liefert

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i \times id"'] \arrow[ddr, bend left, "\bar{i}"] & \\
X \arrow[r, "i_0^X"] \arrow[drr, bend right, "j"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
 & & M_i
\end{tikzcd}$$

Die definierenden Diagramme von r und s vereinen sich zu

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & A \times I \arrow[d, "\bar{i}"] \arrow[dr, bend left, "i \times id"] \arrow[ddrr, bend left=40, "\bar{i}"] & & \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "i_0^X"'] \arrow[ddrrr, bend right=40, "j"'] & M_i \arrow[dr, dashed, "s"] & & \\
 & & X \times I \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
 & & & M_i
\end{tikzcd}$$

Es folgt $r \circ s = id_{M_i}$ laut Eindeutigkeitsaussage in der univ. Eig. des Pushouts.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei ein Homotopieerweiterungsproblem $H: A \times I \to Y$, $f: X \to Y$, $f \circ i = H \circ i_0^A$ gegeben. Erhalte

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & A \times I \arrow[d, "\bar{i}"'] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & M_i \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

Anschluss an das definierende Diagramm von r gibt

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] & A\times I \arrow[d, "i\times id"'] \arrow[ddr, "\bar{i}"] \arrow[dddrr, bend left, "H"] & & \\
X \arrow[r, "i_0^X"] \arrow[drr, "j"'] \arrow[ddrrr, bend right, "f"'] & X\times I \arrow[dr, dashed, "r"] & & \\
& & M_i \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
& & & Y
\end{tikzcd},$$

also ist $g\circ r$ eine Erweiterung von H mit Anf.bed. f. $\square$

<u>Satz VI.4.4</u> Eine Kofaserung $i: A \to X$ ist eine Teilrauminklusion. Ist X Hausdorffsch, so ist $A \subseteq X$ abgeschlossen.

<u>Bew.</u> Sei $i_1^X : X \longrightarrow X\times I$, $x \longmapsto (x,1)$. Für die Endabbildung $\bar{i}_1 : A \to M_i$ der Homotopie $\bar{i}: A\times I \to M_i$ gilt
$\bar{i}_1(a) = \bar{i}(a,1) = r(i(a),1) = r\circ i_1^X \circ i\,(a)$ für $a\in A$. $(*)$

<u>Beh.</u>: $\bar{i}_1$ ist eine Teilrauminklusion.

<u>Bew.</u> $\bar{i}_1$ ist stetige Bijektion auf das Bild.

z.z.: Ist $B\subseteq A$ abgeschlossen, so auch $\bar{i}_1(B)\subseteq M_i$.

Nach Konstruktion von M_i ist $j \amalg \bar{i} : X \amalg A\times I \to M_i$ eine Identifizierung und $(j\amalg\bar{i})^{-1}(\bar{i}_1(B)) = B\times\{1\}$ ist abg. in $X\amalg A\times I$, also $\bar{i}_1(B)\subseteq M_i$ abg. $\square$

Anwenden von $\left(\bar{i}_1|_{\mathrm{Bild}(\bar{i}_1)}\right)^{-1}$ auf $(*)$ zeigt, dass $(\bar{i}_1|_{\mathrm{Bild}(\bar{i}_1)})^{-1}\circ r\circ i_1^X$ linksinvers zu $i: A\to X$ ist, also ist i ein Homöomorphismus auf das Bild.

Für den zweiten Teil des Satzes zeigt Anwenden von s auf (*), dass die Abbildungen $s \circ r \circ i_1^X$ und i_1^X auf $i(A)$ übereinstimmen. Gilt umgekehrt für $x \in X$, dass $s \circ r \circ i_1^X(x) = i_1^X(x)$, folgt $(x, 1) \in \mathrm{Bild}(s)$. Weil die zweite Koordinate 1 ist, folgt $(x, 1) \in \mathrm{Bild}(s \circ \bar{i}) = \mathrm{Bild}(i \times \mathrm{id})$, also $x \in i(A)$. Somit ist

$$A \xrightarrow{i} X \underset{i_1^X}{\overset{s \circ r \circ i_1^X}{\rightrightarrows}} X \times I$$

ein Differenzkern (engl. Equalizer, vgl. Blatt 13, Aufg. 1) und daher $i(A) \subseteq X$ abgeschlossen, wenn X Hausdorffsch ist (Blatt 3, Aufg. 2). $\square$

Fortan sehen wir also Kofaserungen als Raumpaare (X, A) an und können in der Regel $A \subseteq X$ abg. annehmen.

<u>Satz VI.4.5</u> Sei (X, A) ein Raumpaar. Dann sind äquivalent:

(i) Das Paar (X, A) ist eine abgeschlossene Kofaserung.

(ii) Es gibt eine Retraktion $R : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ und $A \subseteq X$ abg.

(iii) Es gibt eine Abb. $u : X \to I$ und eine Homotopie $H : X \times I \to X$, sd

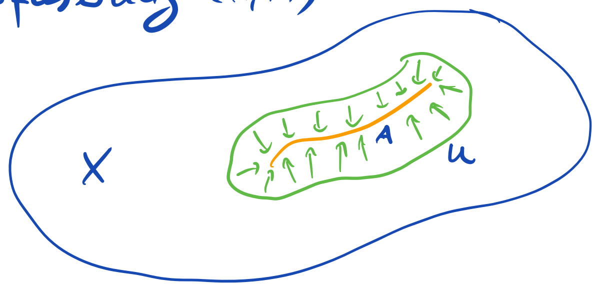
(1) $u^{-1}(0) = A$,

(2) $H(x, 0) = x$ für alle $x \in X$,

(3) $H(a, t) = a$ für alle $a \in A$ und $t \in I$,

(4) $H(x, 1) \in A$ für alle $x \in X$ mit $u(x) < 1$.

Laut (iii) ist also $A = u^{-1}(0)$ starker Deformationsretrakt der offenen Umgebung $U := u^{-1}([0,1))$. Daher nennen wir eine abg. Kofaserung (X,A) auch ein NDR-Paar (englisch neighborhood deformation retract).



<u>Bew.</u> (i) $\Rightarrow$ (ii). HEE:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A \times I \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
X \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X \times I \arrow[dr, dashed, "\exists R"] & \\
& & X \times \{0\} \cup A \times I
\end{tikzcd}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $H : A \times I \to Y$, $f : X \to Y$, $H(a,0) = f(a)$ ein Homotopieerweiterungsproblem. Schon gesehen: $A \subseteq X$ abg. zeigt $s : M_i \xrightarrow{\cong} X \times \{0\} \cup A \times I$, also haben wir das Pushout links. Dann löst $H' = F \circ R$ das HEP.

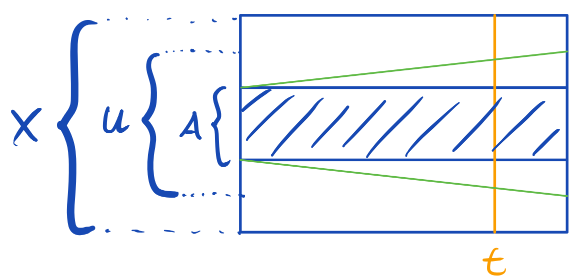
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & A \times I \arrow[d, "i \times id"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
X \arrow[r, "i_0^X"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[dr, dashed, "\exists! F"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Definiere $H : X \times I \to X$ durch $H = pr_X \circ R$.
(2) ✓ (3) ✓. Definiere $u : X \to I$ durch
$u(x) := \max_{t \in I} |t - pr_I(R(x,t))|$. Dann gilt $A \subseteq u^{-1}(0)$.
Ist umgekehrt $u(x) = 0$, gilt $pr_X(R(x,(0,1])) \subseteq A$.
Weil A abg., folgt $pr_X(R(x,0)) \in A$, also $u^{-1}(0) \subseteq A$.

(1) ✓. Sei nun $u(x) < 1$. Dann gilt insbesondere $|1 - pr_I(R(x,1))| < 1$, also $R(x,1) = (a,t)$ für ein $a \in A$ und ein $t \in I$. Damit $H(x,1) = pr_X(R(x,1)) = a \in A$, d.h. (4) ✓. Die Stetigkeit von u folgt elementar.

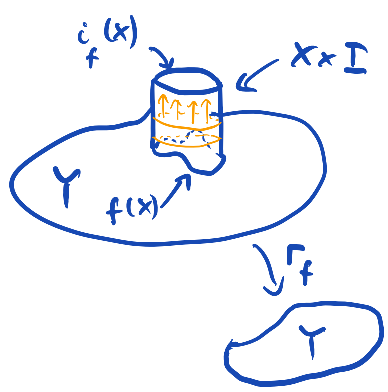
(iii) $\Rightarrow$ (ii). Wir definieren $R : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$,

$$R(x,t) = \begin{cases} \left(H\left(x, \frac{t}{u(x)}\right), 0\right) & \text{für } u(x) > t \\ \left(H(x,1), t - u(x)\right) & \text{für } u(x) \leq t. \end{cases}$$



Die Stetigkeit ist wieder elementar. $\square$

Bsp. Für $f : X \to Y$ ist die Inklusion $i_f : X \to M_f$ eine abg. Kofaserung, d.h. in Top faktorisiert jeder Pfeil als Komposition $f = r_f \circ i_f$ einer Kofaserung und einer Homotopieäquivalenz (dual: einer H.äquiv. und einer Faserung → Modellkategorien)

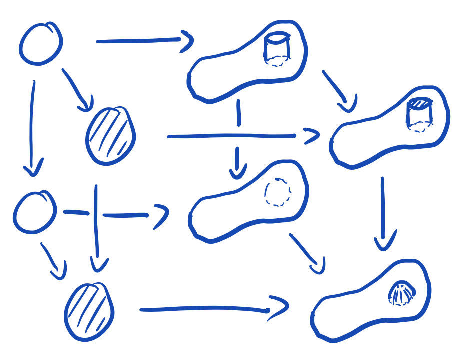


Insbesondere ist für jeden Raum X das Paar (CX, X) ein NDR, denn $X \subseteq CX$ ist die Inklusion $i_f : X \hookrightarrow CX$ für $f : X \to \bullet$. Für $X = S^{n-1}$ folgt, dass (D^n, S^{n-1}) ein NDR-Paar ist.

Satz VI.4.6 Sei $i : A \to X$ eine Kofaserung und $f : A \to Y$ mit Zerlegung
$$\begin{tikzcd} & M_f \arrow[dr, "r_f"] & \\ A \arrow[ur, "i_f"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}.$$
Betrachte die zwei Pushouts
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "\bar{f}"] & Z \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & M_f \arrow[d, "j_f"] \\ X \arrow[r, "\bar{i}_f"] & \bar{Z} \end{tikzcd}.$$

Dann gibt es eine eindeutige Homotopieäquivalenz $c : \bar{Z} \xrightarrow{\simeq} Z$, sd.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i_f"] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "id_A"'] & & M_f \arrow[dr, "j_f"] \arrow[dd, "r_f"] & \\ & X \arrow[rr, "\bar{i}_f"] \arrow[dd, "id_X"] & & \bar{Z} \arrow[dd, dashed, "c"] \\ A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"] & & Y \arrow[dr, "j"] & \\ & X \arrow[rr, "\bar{f}"] & & Z \end{tikzcd}$$



kommutiert.

Bew. Wir erhalten c wie rechts aus dem oberen Pushout. Noch z.z.: c ist eine Homotopieäquivalenz, d.h. finde ein Homotopieinverses d.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_f"] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_A"'] & & M_f \arrow[dr, "j_f"] \arrow[dd, "r_f"] & \\
& X \arrow[rr, "\bar{i}_f"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_X"] & & \bar{Z} \arrow[dd, dashed, "\exists!\, c"] \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"] & & Y \arrow[dr, "j"] & \\
& X \arrow[rr, "\bar{f}"] & & Z
\end{tikzcd}$$

Idee: so wie rechts. Problem: die Abbildungen $\bar{i}_f$ und $j_f \circ j_0$ formen keinen Kokegel auf $X \xleftarrow{i} A \xrightarrow{f} Y$.
Aber: $j_f \circ j_0 \circ f \simeq_{H'} \bar{i}_f \circ i$, wobei
$H' = j_f \circ H \circ (i_f \times \mathrm{id}_I)$ mit $j_0 \circ r_f \simeq_H \mathrm{id}_{M_f}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_f"] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_A"'] & & M_f \arrow[dr, "j_f"] \arrow[dd, "r_f"] & \\
& X \arrow[rr, "\bar{i}_f"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_X"] & & \bar{Z} \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"] & & Y \arrow[dr, "j"] \arrow[uu, bend left, "j_0"] & \\
& X \arrow[rr, "\bar{f}"] & & Z \arrow[uu, dashed, "\exists!\, d"']
\end{tikzcd}$$

Nach der HEE für i setzt sich H'_{1-t} mit Anfangsbedingung $\bar{i}_f$ zu $H'': X \times I \to \bar{Z}$ fort.
Sei $e = H''_1$. Dann gilt $e \circ i = H'(0) = j_f \circ j_0 \circ f$.
Damit induziert der Kokegel aus e und $j_f \circ j_0$ die Abbildung $d: Z \to \bar{Z}$. Nach der Prop. in V.5 finden wir die Homotopien $c \circ d \simeq \mathrm{id}_Z$ und $d \circ c \simeq \mathrm{id}_{\bar{Z}}$ in den Pushout-Diagrammen

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, "f \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "i \times \mathrm{id}"'] & Y \times I \arrow[d, "j \times \mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend left, "j \circ pr_Y"] & \\
X \times I \arrow[r, "\bar{f} \times \mathrm{id}"] \arrow[drr, bend right, "c \circ H''_{1-t}"'] & Z \times I \arrow[dr, dashed] & \\
& & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, "i_f \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "i \times \mathrm{id}"'] & M_f \times I \arrow[d, "j_f \times \mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend left, "j_f \circ H"] & \\
X \times I \arrow[r, "\bar{i}_f \times \mathrm{id}"] \arrow[drr, bend right, "H''_{1-t}"'] & \bar{Z} \times I \arrow[dr, dashed] & \\
& & \bar{Z}
\end{tikzcd}$$

. $\square$

Für zwei Abbildungen $X \xleftarrow{f_2} A \xrightarrow{f_1} Y$ hat das Pushout von $X \xleftarrow{f_2} A \xrightarrow{i_{f_1}} M_{f_1}$ die symmetrische Beschreibung

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, "\bar{f}_2(a,1-t)"] \arrow[d, "\bar{f}_1(a,t)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & M_{f_2} \arrow[d] \\
M_{f_1} \arrow[r] & M_{f_1,f_2}
\end{tikzcd}$$

und M_{f_1,f_2} heißt **doppelter Abbildungszylinder** von f_1 und f_2. Ist

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & Y \arrow[d, "g_1"] \\
X \arrow[r, "g_2"] & Z
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

homotopiekommutativ, d.h. $g_1 \circ f_1 \simeq_H g_2 \circ f_2$, induzieren g_1 und $H(a,t)$ die Abb. $c_1 : M_{f_1} \to Z$, und g_2 und $H(a,1-t)$ die Abb. $c_2 : M_{f_2} \to Z$. Schließlich stiften c_1 und c_2 die **Vergleichsabb.** $c : M_{f_1,f_2} \to Z$. Ist c eine Homotopieäquivalenz, heißt das Quadrat $(*)$ **homotopiekokartesisch** und der Kokegel $X \xrightarrow{g_2} Z \xleftarrow{g_1} Y$ heißt **Homotopie-Pushout**.

<u>Bsp.</u> Laut letztem Satz ist ein kokartesisches Quadrat

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "g_1"] \\
X \arrow[r, "g_2"] & Z
\end{tikzcd}$$

in <u>Top</u> homotopiekokartesisch, wenn f_1 (oder f_2) eine Kofaserung ist, denn c ist die Vergleichsabb. zur konstanten Homotopie $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

VI.5 Fundamentalgruppen von Anheftungen

Satz VI.5.1 (Seifert-van Kampen - Pushoutversion)

Sei
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "g_2"] \\ X \arrow[r, "g_1"] & Z \end{tikzcd}$$
ein Pushout wegzshgder Räume und $a_0 \in A$. Setze $x_0 = f_1(a_0)$, $y_0 = f_2(a_0)$ und $z_0 = g_1(f_1(a_0))$.

Ist f_1 oder f_2 eine Kofaserung, so ist
$$\begin{tikzcd} \pi_1(A, a_0) \arrow[r, "\pi_1(f_2)"] \arrow[d, "\pi_1(f_1)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "\pi_1(g_2)"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\pi_1(g_1)"] & \pi_1(Z, z_0) \end{tikzcd}$$
ein Pushout von Gruppen.

Bew. Setze $\mathring{M}_{f_j} := M_{f_j} \setminus \mathrm{Bild}(i_{f_j})$ für $j = 1, 2$. Dann ist $\mathcal{O} = \{\mathring{M}_{f_1}, \mathring{M}_{f_2}, A \times (0,1)\}$ offene Überdeckung von M_{f_1, f_2}. Alle vertikalen Pfeile in

$$\begin{tikzcd} A \times (0,1) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathring{M}_{f_2} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & \mathring{M}_{f_1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & M_{f_1,f_2} \arrow[dd] \\ A \times I \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "pr_A"'] & & M_{f_2} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & M_{f_1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & M_{f_1,f_2} \arrow[dd] \\ A \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dr] & \\ & X \arrow[rr] & & Z \end{tikzcd}$$

sind Homotopieäquivalenzen. Anwenden von π_1 führt den Beweis auf die Gruppenversion zurück. $\square$

Bsp. •
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \bullet \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X/A \end{tikzcd}$$
Ist i eine Kofaserung, folgt $\pi_1(X/A, A/A) \cong \pi_1(X)/\langle\langle \mathrm{Bild}\, \pi_1(i) \rangle\rangle$.

•
$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "j"] \\ D^n \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$
Satz IV.5.2 (i) $n \geq 3$: $\pi_1(j): \pi_1(Y,\cdot) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Z,\cdot)$,

(ii) $n = 2$: $\pi_1(j): \pi_1(Y,\cdot)/\langle\langle [f] \rangle\rangle \xrightarrow{\cong} \pi_1(Z,\cdot)$.

•
$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \bigvee_{i=1}^{2g} S^1 \arrow[d] \\ D^2 \arrow[r] & \Sigma_g \end{tikzcd}$$
$$\pi_1(\Sigma_g, \cdot) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle$$

Umgekehrt: Sei $G = \langle S \mid R \rangle$ und
$$\begin{tikzcd} \bigvee_{r \in R} S^1 \arrow[r, "\sqcup r"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \bigvee_{s \in S} S^1 \arrow[d] \\ \bigvee_{r \in R} D^2 \arrow[r] & X_G \end{tikzcd}$$
$\pi_1(X_G, \cdot) \cong G$

X_G heißt Präsentationskomplex und ist ein 2-dim. Zellkomplex (engl. CW complex).

IV.6 Wie geht es weiter?

• Homologie: simplizial, singulär, zellulär

$H_k(X) = k\text{-Zykel} / k\text{-Ränder}$

• $H_1(X; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X, \cdot)_{ab}$

• Abbildungsgrad $f: S^d \to S^d \rightsquigarrow H_d(f): H_d(S^d) \to H_d(S^d)$
$$\begin{tikzcd} H_d(S^d) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & H_d(S^d) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot \deg f"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

• Zellkomplexe, Eindeutigkeit gewöhnlicher Homologie