ℓ^2-Invarianten

Holger Kammeyer (holger.kammeyer@uni-bonn.de)

Inhalte:

I Einführung

II Hilbert-Moduln und von Neumann-Dimension
1. Hilbert-Räume
2. Operatoren und Operatoralgebren
3. Spur und Dimension

III ℓ^2-Bettizahlen von Zellkomplexen
1. G-CW-Komplexe
2. Die ℓ^2-Vervollständigung des zellulären Kettenkomplexes
3. ℓ^2-Bettizahlen und wie man sie berechnet
4. Atiyahs Frage und Kaplanskys Vermutung

IV ℓ^2-Bettizahlen von Gruppen
1. Klassifizierende Räume für Familien
2. ℓ^2-Bettizahlen von Gruppen
3. Gruppentheoretische Anwendungen

V Taylors Approximationssatz

1. Funktionalkalküle
2. Der Approximationssatz
3. Der Beweis

Lizenz: CC BY-SA 3.0 DE
https://creativecommons.org/licences/by-sa/3.0/de/

I Einführung

Sei X ein zshgder Zellkomplex.

$\rightsquigarrow$ reguläre Überlagerungen $\{\bar{X}_N\}_{N \trianglelefteq G}$, $G := \pi_1(X, x_0)$

$\rightsquigarrow$ $G/N \curvearrowright \bar{X}_N$ durch Decktrafos, einfach transitiv auf den Fasern von $p: \bar{X}_N \to X$, insbesondere $G \curvearrowright \tilde{X}$ (univ. Überlagerung)

$\longrightarrow$ Suchen G-äquivariante Versionen der bisherigen Begriffsbildung (Homologie, Betti-Zahlen, ...)

Betrachte:

$$\begin{array}{ccc} & \exists! \nearrow & (\tilde{X}, y_0) \\ & & \downarrow p \\ (D^n, 0) & \xrightarrow{\varphi^n} & (X, x_0) \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Für jede n-Zelle in X gibt es „G-viele" n-Zellen in $\tilde{X}$. Daher $C_*^{cell}(\bar{X}; \mathbb{C}) := H_n(\tilde{X}^n, \tilde{X}^{n-1}; \mathbb{C}) =$

$$\ldots \to (\mathbb{C}G)^{k_{n+1}} \to (\mathbb{C}G)^{k_n} \to (\mathbb{C}G)^{k_{n-1}} \to \ldots$$

mit $k_n = |I_n| =$ Anz. der n-Zellen in X.

Weil $\tilde{X}^n = p^{-1}(X^n)$ und $\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{g} & \tilde{X} \\ & \searrow^{p} \quad \swarrow_{p} & \\ & X & \end{array}$, gilt

$p(g \cdot \tilde{X}^n) = p(\tilde{X}^n) = X^n$, d.h. $g \cdot \tilde{X}^n \subseteq \tilde{X}^n$.

Für $g \in G$ erhalten wir daher

$$g \cdot : (\tilde{X}^n, \tilde{X}^{n-1}) \xrightarrow{\cong} (\tilde{X}^n, \tilde{X}^{n-1}),$$

durch Funktorialität also $G \curvearrowright C_*^{cell}(\tilde{X}; \mathbb{C})$, d.h. $C_*^{cell}(\tilde{X}; \mathbb{C})$ ist ein Kettenkomplex freier $\mathbb{C}G$-Moduln, denn $d_n^{cell} \circ (g\cdot) = (g\cdot) \circ d_n^{cell}$ (laut Natürlichkeit)

→ Idee: Definiere die n-te äquivariante Bettizahl als

$$b_n^G(\tilde{X}) = \dim_{\mathbb{C}G} H_n(\tilde{X}; \mathbb{C}),$$

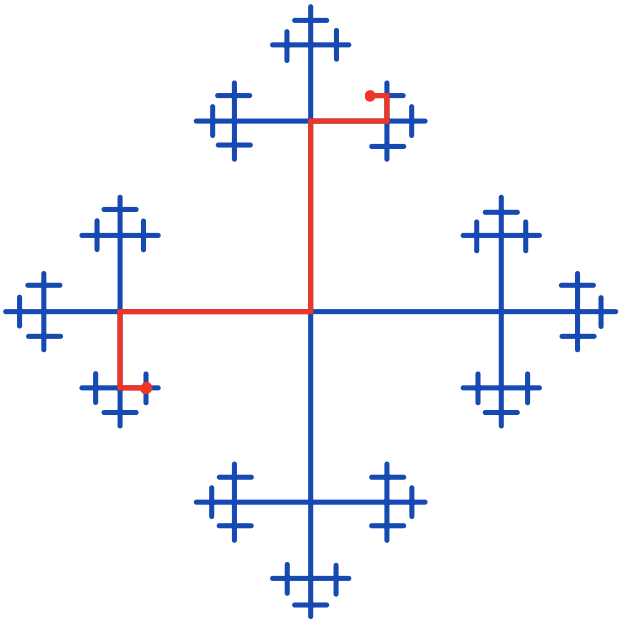
wobei „$\dim_{\mathbb{C}G}$" für Subquotienten von $(\mathbb{C}G)^k$ erklärt sei und folgende zwei Minimalanforderungen erfülle: 1.) $\dim_{\mathbb{C}G} V \geq 0$ und $\dim_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G) = 1$,

2.) Für $0 \to U \to V \to W \to 0$ sei $\dim_{\mathbb{C}G} V = \dim_{\mathbb{C}G} U + \dim_{\mathbb{C}G} W$.

Bsp. $X = S^1 \vee S^1 =$, $G = F_2$, $C_*^{cell}(\tilde{X}; \mathbb{C}) =$

$$0 \to (\mathbb{C}F_2)^2 \xrightarrow{d_1} \mathbb{C}F_2 \to 0$$

$\tilde{X} =$



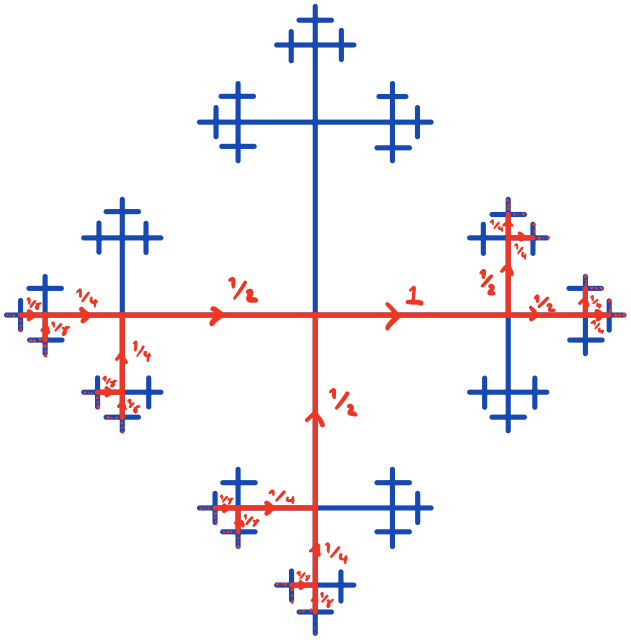
Weil $\tilde{X}$ ein Baum ist, hat jede 1-Kette in $\tilde{X}$ lose Enden, d.h. d_1 ist injektiv! Insbesondere

$$1 \longrightarrow (\mathbb{C}F_2)^2 \xrightarrow{d_1} \mathbb{C}F_2 \longrightarrow \operatorname{coker} d_1 \longrightarrow 1,$$

laut 1.) + 2.) also

$$1 = \dim_{\mathbb{C}F_2} \mathbb{C}F_2 = \underbrace{\dim_{\mathbb{C}F_2} (\mathbb{C}F_2)^2}_{=2} + \underbrace{\dim_{\mathbb{C}F_2} \operatorname{coker} d_1}_{\geq 0},$$

Widerspruch ($\mathbb{C}F_2$ ist nicht noethersch!) Aber.



Also sei $\ell^2 G = \left\{ \sum_{g \in G} c_g g : c_g \in \mathbb{C}, \ \sum |c_g|^2 < \infty \right\}$

und setze $C_*^{(2)}(\tilde{X}) := \ell^2 G \otimes_{\mathbb{C}G} C_*^{cell}(\tilde{X}; \mathbb{C})$,

dann folgt $\ker d_1^{(2)} \neq 0$ wie gewünscht.

(Es gilt für die eingezeichnete 1-Kette

$$\sum_{g\in G} |c_g|^2 = 1 + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = 1 + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 3 < \infty.)$$

Wir setzen $H_n^{(2)}(\tilde{X}) := \dfrac{\ker d_n^{(2)}}{\operatorname{im} d_{n+1}^{(2)}} \cong \left(\operatorname{im} d_{n+1}^{(2)}\right)^{\perp} \subseteq (l^2G)^{s_n}$

(orth. Komplement in $\ker d_n^{(2)}$.) Nach Konstr. ist $H_n^{(2)}(\tilde{X})$ also ein Hilbert G-Modul (= abg. G-inv. Unterraum von $(l^2G)^s$).

Für Hilbert G-Moduln gibt es $\dim_{R(G)}$ mit 1.) + 2.)!

$\longrightarrow$ Def $b_n^{(2)}(\tilde{X}) := \dim_{R(G)} H_n^{(2)}(\tilde{X}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

„n-te l^2-Bettizahl".

Anwendungen:

Vermutung (Kaplansky) Sei G torsionsfrei und R ein Integritätsbereich. Dann ist RG nullteilerfrei.

($a\cdot b = 0 \Rightarrow a=0$ oder $b=0$.)

Satz Sei G torsionsfrei. Ist $b_n^{(2)}(\tilde{X}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für jede reguläre Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{\Gamma} X$ mit einem zshgdn. komp. Zellkomplex X und $\operatorname{Deck}(p) \leq G$, dann gilt die Kaplansky-Vermutung für G und $R=\mathbb{Q}$.

(„Atiyah-Vermutung $\Rightarrow$ Kaplansky Nullteilervers.")

Bemerkung Die Kaplansky-Nullteilervermutung folgt auch aus der Kaplansky-Einheitenvermutung:

Ist $a \in (RG)^*$, gilt $a = r\cdot g$ mit $r \in R^*$.

Beweis: Die Nullteilervermutung ist äquivalent zu $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ (nicht ganz leicht). Sei nun $a \in RG$ mit $a^2 = 0$. Dann folgt $(1+a)\cdot(1-a) = 1 - a^2 = 1$, also $1 + a = r \cdot g$ für ein $r \in R^*$ und ein $g \in G$. Somit $0 = a^2 = (r \cdot g - 1)^2 = r^2 \cdot g^2 - 2 \cdot r \cdot g + 1$. Ist $g \neq 1$, so auch $g^2 \neq 1$ (G torsionsfrei), Widerspruch zur lin. Unabh.. Es folgt $g = 1$ und damit $r = 1$, weil $0 = (r-1)^2 \in R$ (Int.ber.), also $a = 0$. □

ABER: [Gardam, 2021]: Einheitenvermutung falsch! (Gegenbsp. für $R = \mathbb{Z}/2$ und G virtuell abelsch.)

Ein top. Raum X heißt asphärisch, falls $\tilde{X} \simeq \cdot$.

Vermutung (Hopf) Sei M eine geschlossene asphärische $2n$-dim. Mannigfaltigkeit. Dann ist $(-1)^n \chi(M) \geq 0$.

Vermutung (Singer) Ist M eine geschlossene asphärische m-dim. Mannigfaltigkeit mit $b_n^{(2)}(M) > 0$, so gilt $m = 2n$.

Satz. Singer $\Rightarrow$ Hopf.

Bew. $(-1)^n \chi(M) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k^{(2)}(\tilde{M}) = (-1)^n (-1)^n b_n^{(2)}(\tilde{M}) \geq 0$. □

Beziehung zwischen $b_n(X)$ und $b_n^{(2)}(\tilde{X})$?

Bsp. $b_n(T^k) = \binom{k}{n}$, aber $b_n^{(2)}(\tilde{T}^k) = 0$

→ keine unmittelbare Abhängigkeit, aber:

- $b_n^{(2)}(\overline{X}) = \frac{b_n(\overline{X})}{d}$, falls $\overline{X} \to X$ reg., d-blättrig, $d < \infty$

→ Idee: Falls „$\overline{X}_i \xrightarrow{i\to\infty} \widetilde{X}$" für eine Folge d_i-blättr. regulärer Überlagerungen $\cdots \to \overline{X}_i \to \overline{X}_{i-1} \to \cdots \to X$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{b_n(\overline{X}_i)}{d_i} = b_n^{(2)}(\widetilde{X}) \quad ?$$

Genauer $\overline{X}_i \xrightarrow{i\to\infty} \widetilde{X} \iff \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \{1\}$

für die char. Untergr.n $G_i := \operatorname{im}(\pi_1 \overline{X}_i \to \pi_1 X) \leq \pi_1 X$.

<u>Satz (Lück, 1994)</u> Sei $G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \cdots$ mit $G_i \trianglelefteq G$, $[G : G_i] < \infty$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \{1\}$ und sei $\overline{X}_i \to X$ die reguläre Überlagerung zu G_i. Dann gilt für alle $n \geq 0$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{b_n(\overline{X}_i)}{[G : G_i]} = b_n^{(2)}(\widetilde{X}).$$

→ Also detektiert $b_n^{(2)}(\widetilde{X})$ freies Homologiewachstum für Überlagerungstürme von X.

<u>Bem.</u> Die l^2-Torsion „$\rho^{(2)}(\widetilde{X})$" detektiert (vermutlich!) Torsionswachstum in Homologie.

II Hilbert-Moduln und von Neumann-Dimension

II.1 Hilbert-Räume

Def. II.1.1 Ein **Prähilbertraum** ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit einer Abb. $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, sd.

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ mit Gleichheit g.d.w. $x = 0$,

(ii) $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,

(iii) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$ $(x, y \in V, \alpha \in \mathbb{C})$

(iv) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.

Bem. $\langle \alpha x, y \rangle = \overline{\langle y, \alpha x \rangle} = \overline{\alpha} \, \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.

Bspe.
- $\mathbb{C}^n$ mit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} \cdot y_i$,
- $C([a,b]; \mathbb{C})$ mit $\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f}(x) g(x) \, dx$.

Sei nun $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein P.H.R. Für $x, y \in V$ heißt x **orthogonal** zu y, falls $\langle x, y \rangle = 0$ und $\{x_i : i \in I\} \subseteq V$ heißt **orthonormal**, falls $\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Setze $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Lemma II.1.2 Sei $\{x_i\} \subseteq V$ orthonormal, $x \in V$. Dann gilt

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x \rangle|^2 + \Big\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x \rangle x_i \Big\|^2.$$

Bew. $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x \rangle x_i + \Big(x - \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x \rangle x_i \Big)$

ist orthogonal zerlegt. □

Insbesondere $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x\rangle|^2$ „Besselsche Ungleichung".

Korollar I.1.3 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
Für alle $x, y \in V$ gilt $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Bew. Klar, falls $y = 0$. Ansonsten gilt
$\|x\|^2 \geq |\langle \frac{y}{\|y\|}, x\rangle|^2 = \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$ lt. Besselscher Ungl. □

Lemma I.1.4 $(V, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Raum.

Bew. Δ-Ungl.: Für $x, y \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leq \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$ □

Mit $d(x, y) := \|y - x\|$ ist V also ein metr. Raum.

Def. I.1.5 Ein Hilbertraum ist ein vollständiger Prähilbertraum.

Bspe. · $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$
· $\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}e_i, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ ist kein Hilbertraum, weil die Cauchyfolge $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{i^2}\right)_n$ nicht konvergiert.

Vervollständigung: $l^2 = \left\{(a_n) : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\right\}$
mit $\langle (a_n), (b_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} \cdot b_n < \infty$, weil
$|\overline{a_n} \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}$.

· Vervollständigung von $C[a,b]$:

Setze $\mathcal{L}^2[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} : \int_a^b |f(x)|^2 d\lambda \right\}$ (λ: Lebesguemaß) und $\langle f, g \rangle = \int_a^b \bar{f} g \, d\lambda$.

Dann ist $L^2[a,b] := \mathcal{L}^2[a,b] / \{ f \in \mathcal{L}^2[a,b] : \|f\| = 0 \}$

mit induziertem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Hilbertraum.

Konstruktionen:

1.) Ist H ein Hilbertraum, so auch jeder abg. Unterraum $K \subseteq H$ durch Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.) Ist $K \subseteq H$ abg. Unterraum, so ist H/K ein Hilbertraum durch $K^\perp \xrightarrow{\cong} H/K$ (HA!) mit dem orth. Komplement $K^\perp = \{ x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ für alle } y \in K \}$.

3.) $\{H_i\}_{i=1}^\infty \rightsquigarrow \bigoplus_{i=1}^\infty H_i := \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty : x_i \in H_i, \sum_{i=1}^\infty \|x_i\|_{H_i}^2 < \infty \right\}$

4.) $H_1, H_2 \rightsquigarrow$ Für $x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \in H_1 \otimes_{\mathbb{C}} H_2$ setze $\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle := \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdot \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}$

$\rightsquigarrow$ Fortsetzen und Vervollständigen ergibt $H_1 \otimes H_2$.

Z. B. $L^2(X_1, \mu_1) \otimes L^2(X_2, \mu_2) \cong L^2(X_1 \times X_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ für Maßräume mit abzählbar erzeugten σ-Algebren.

Def I.16 Sei H ein Hilbertraum. Eine Orthonormalbasis (O.N.B.) ist eine maximale orthonormale Teilmenge von H. (Existenz nach Lemma von Zorn).

Satz I.1.7 Sei H ein Hilbertraum mit O.N.B. $\{x_i\}_{i\in I}$ und $x \in H$. Dann gilt

$$x = \sum_{i\in I} \langle x_i, x\rangle x_i \quad \text{und} \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x_i, x\rangle|^2$$

(wegen der Besselschen Ungleichung gibt es für $\delta > 0$ nur endl. viele x_i mit $\langle x_i, x\rangle > \delta$, also gibt es nur abzählbar viele $i \in I$ mit $\langle x_i, x\rangle \neq 0$.)

Bew. Sei $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$ eine Aufzählung der Basisvektoren mit $\langle x_i, x\rangle \neq 0$ und setze $y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x_{i_k}, x\rangle x_{i_k}$. Für $n > m$ gilt

$$\|y_n - y_m\|^2 = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} \langle x_{i_k}, x\rangle x_{i_k} \Big\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\langle x_{i_k}, x\rangle|^2,$$

also ist y_n eine Cauchyfolge, denn $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x_{i_k}, x\rangle|^2 < \infty$ (Partialsummen monoton, beschränkt durch Besselsche Ungl.).

Sei $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Weil $\langle x_{i_j}, x - y\rangle =$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle x_{i_j}, x - \sum_{k=1}^{n} \langle x_{i_k}, x\rangle x_{i_k}\rangle = \langle x_{i_j}, x\rangle - \langle x_{i_j}, x\rangle = 0$$

und $\langle x_i, x - y\rangle = 0$ für $i \in I$, $i \neq i_j$ für alle j, folgt $x - y = 0$ aus der Maximalität von $\{x_i\}_{i\in I}$. Schließlich folgt aus Lemma II.1.2

$$0 = \lim_{n\to\infty} \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x_{i_k}, x\rangle x \Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x_{i_k}, x\rangle|^2 \qquad \square$$

Fortan betrachten wir nur noch **separable** Hilberträume, d.h. I kann abzählbar gewählt werden.

Eine $\mathbb{C}$-lin. Abb. $A: H_1 \to H_2$ von Hilbarträumen heißt auch Operator. Notiz: Ist A stetig, so gibt es $\delta > 0$, sd. $\|Ax\| < 1$ für $\|x\| < \delta$. Setze $C := \frac{2}{\delta}$, dann gilt $\|Ay\| = \|A \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{y}{\|y\|}\| \cdot \frac{2}{\delta}\|y\| \leq C\|y\|$, d.h. „$A$ stetig $\Leftrightarrow$ A beschränkt".

- Beschränkte Op.en sind die Morphismen in Hil.
- A heißt Isometrie, falls $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ und unitär, falls A zusätzlich surjektiv ist.
- Gibt es einen unitären Operator $U: H_1 \to H_2$, so heißen H_1 und H_2 isomorph.

Satz I.18 Ein separabler Hilbertraum H ist isomorph zu $\mathbb{C}^n$ oder l^2.

Bew. Wähle O.N.B. $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von H. Dann erhält

$$H \longrightarrow l^2$$
$$x \longmapsto (\langle x_1, x\rangle, \langle x_2, x\rangle, \ldots)$$

die Norm lt. Satz I.17, ist also isometrisch nach Polarisierung (HA!) und ist surj., weil für $(a_i) \in l^2$ die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ wie gesehen konvergiert. □

Bsp. $L^2[-\pi, \pi] \cong l^2\mathbb{Z}$ „Fourier-Transformation"

$\left\{ f_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ ist eine O.N.B.! In der Tat:

$$\langle f_n, f_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}.$$

Maximalität ist schwer.

Für $f \in L^2[-\pi, \pi]$ heißt die Zerlegung

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

die Fourierentwicklung von f mit den Fourier-Koeffizienten $c_n = \langle f_n, f \rangle$. Aus Satz I.1.7 erhalten wir die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

II.2 Operatoren und Operatoralgebren

Setze $B(H, K) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Hil}}}(H, K)$.

Satz II.2.1 Ist $T \in B(H, K)$ bijektiv, so ist T invertierbar.

Äquivalent $\left(\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{T} & K \\ \downarrow & \nearrow_{\exists T^{-1}} & \\ H/\ker T & & \end{array} \right)$:

Satz II.2.2 Ist $T \in B(H, K)$ surjektiv, so ist T offen.

Für $T \in B(H, K)$ heißt $\|T\| = \sup_{\|x\|_H = 1} \|Tx\|_K$ die Operatornorm $\rightsquigarrow$ Normtopologie auf $B(H, K)$ (vollständig, d.h. $B(H, K)$ ist ein Banachraum.)

Setze $B(H) := B(H, H)$, $U(H) = \{u \in B(H) \text{ unitär}\}$, $H^* := B(H, \mathbb{C})$

Die Normtopologie auf $B(H)$ ist für viele Zwecke zu fein, daher:

Def. II.2.3 Die starke Topologie auf $B(H)$ ist die Initialtopologie der Auswertungsabbildungen $\{ E_x : B(H) \to H,\ T \mapsto Tx \mid x \in H \}$.

Def. II.2.4 Die schwache Topologie auf $B(H)$ ist die Initialtopologie der „Matrixkoeffizienten" $\{ E_{x,y} : B(H) \to \mathbb{C},\ T \mapsto \langle x, Ty \rangle \mid x, y \in H \}$.

Ist H ∞-dim., sind diese Topologien nicht erstabzählbar $\rightsquigarrow$ Brauchen Netze!

Ein Netz in einem top. Raum X ist eine Abb. $I \to X,\ i \mapsto x_i$ mit einem gerichteten System $(I, \leq)$ und $\lim_{i \in I} x_i = x \ :\Leftrightarrow$ $\forall$ Umg. U von x gibt es $i \in I$, sd. $x_j \in U$ für $j \geq i$.

$\rightsquigarrow$ Allgemeine Charakterisierung von „abg." u. „stetig".

Lemma II.2.5 (Riesz Lemma) Zu $T \in H^*$ gibt es genau ein $y_T \in H$ mit $T(x) = \langle y_T, x \rangle$. Es gilt $\|T\| = \|y_T\|_H$.

Beweis Für $T = 0$, nehme $y_T = 0$. Für $T \neq 0$ sei $z \in H \setminus \ker T$. Weil T stetig, ist $\ker T$ abg., also (HA1) gibt es genau ein $u \in \ker T$ mit min. Abstand zu z. Setze $w = z - u \in (\ker T)^\perp$ und $y_T := \frac{\overline{Tw}}{\|w\|^2} \cdot w$. Rest: Übung. $\square$

Zu $T \in B(H,K)$ definieren wir den **adjungierten Op.** $T^* \in B(K,H)$ wie folgt: Zu $x \in K$ sei $\ell(T,x) \in H^*$ def. durch $\ell(T,x)(h) = \langle x, Th \rangle_K$. Setze $T^*x = \gamma_{\ell(T,x)}$, somit $\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ nach Konstr. Es gilt

- $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$, $(\ker T^*)^\perp = \overline{\operatorname{im} T}$.
- Ist T invertierbar, so auch T^* und $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
- $U \in B(H,K)$ unitär $\Leftrightarrow$ $U^*U = id_H$, $UU^* = id_K$.
- — " — **Isometrie** $\Leftrightarrow$ — " —.
- — " — **partielle Isom.** $\Leftrightarrow$ $U^*U = P$ **Projektion**
- $P \in B(H)$ **Projektion** $\Leftrightarrow$ $P = P^* = P^2$
- $A \in B(H)$ **positiv** $\Leftrightarrow$ $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ f.a. $x \in H$. ($A \leq B \Leftrightarrow B - A$ pos.)
- $T \in B(H)$ **selbstadj.** $\Leftrightarrow$ $T^* = T$ (HA: T pos. $\Rightarrow T$ s.a.)
- $T \in B(H)$ **normal** $\Leftrightarrow$ $T^*T = TT^*$

$B(H)$ ist eine ***-Algebra** ($T^{**} = T$, $(TS)^* = S^*T^*$).

Die **Kommutante** von $M \subseteq B(H)$ ist $M' = \{T \in B(H) : ST = TS \text{ f.a. } S \in B(H)\}$.

Die **Bikommutante** ist $M'' := (M')'$.

Satz II.2.6 (von Neumann) Sei M eine unitale ($id_H \in M$) *-Unteralg. von $B(H)$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist schwach abg.

(ii) M ist stark abg.

(iii) $M = M''$.

Bew. (i) $\Rightarrow$ (ii): klar. (iii) $\Rightarrow$ (i): Zeigen stärker Kommutanten sind immer schwach abg: Sei $N \subseteq B(H)$, $N' \subsetneq B(H)$, $T_0 \in B(H) \setminus N'$, $S \in N$, $x \in H$ mit $ST_0x - T_0Sx = y \neq 0$. Dann gibt es eine schwach offene Umg. U von T_0 mit $\langle y, (ST - TS)x \rangle \neq 0$ für $T \in U$, d.h. $U \subseteq B(H) \setminus N'$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $M \subseteq M''$ ist tautologisch. $M \supseteq M''$: Sei $T \in M''$. Z.z.: Für jede Umgebung $U \subseteq B(H)$ von T ist $U \cap M \neq \emptyset$. Umgebungssubbasis von T:

$$E_x^{-1}(B_\varepsilon(Tx)) = \{ S \in B(H) : \|Sx - Tx\| < \varepsilon \} \text{ mit } x \in H,\ \varepsilon > 0,$$

daher ist

$$U(T; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) = \{ S \in B(H) : \|(S-T)x_i\| < \varepsilon \text{ f.a. } i \}$$

eine starke Umg.basis von T. Suchen also $S \in M$ in dieser Umgebung. Setze $x = (x_1, \dots, x_n) \in H^n$. Durch $M \curvearrowright H^n$ diagonal erhalten wir $M \subseteq B(H^n) = \mathrm{Mat}(n,n; B(H))$ als konstante Diagonalmatrizen. Bzgl. dieser Einbettung gilt $M' = \mathrm{Mat}(n,n; M')$ und M'' besteht aus Sonst. Diag.matr. mit Einträgen in $M'' \subseteq B(H)$. Sei P die Projektion auf $K = \overline{Mx}$.

Beh.: $P \in M'$. Bew.: Weil K nach Konstr. M-invariant ist, ist es auch $K^\perp$ wegen $M = M^*$. Zerlegen wir ein bel. $y \in H^n$ als $y = y_K + y_{K^\perp}$ gilt für $A \in M$, dass $PAy = P(Ay_K + Ay_{K^\perp}) = Ay_K = APy$, d.h. $P \in M'$. Weil $\mathrm{id}_H \in M$, gilt $x \in Mx$ und daher

$Tx = TPx = PTx \in K = \overline{Mx}$. Demnach gibt es $S \in M$ mit $\|Tx - Sx\| < \varepsilon$, insbes. also $\|(S-T)x_i\| < \varepsilon$ für alle $i = 1, \dots, n$. □

Def. II.2.7 Eine unitale *-Unteralgebra von $B(H)$, die eine (dann alle) der Bedingungen (i), (ii), (iii) erfüllt, heißt von Neumann-Algebra.

Bem. Eine normabgeschlossene *-Unteralgebra von $B(H)$ heißt C^*-Algebra.

Bsp. • $\mathbb{C} \cdot id_H$ und $B(H)$. Es gilt $(\mathbb{C} \cdot id_H)' = B(H)$.
• Ist M eine von Neumann-Algebra, so auch M', denn für $T \in M'$ und $S \in M$ ist $(T^*S - ST^*)^* = S^*T - TS^* = 0$, d.h. M' ist eine unitale *-Unt.-algebra und $M' = (M'')' = (M')''$.

Sei (hier und fortan) G eine diskrete abzählbare Gruppe. Dann heißen

$$\lambda : G \to U(\ell^2 G) \quad \text{und} \quad \rho : G \to U(\ell^2 G)$$
$$g \mapsto (h \mapsto gh) \qquad g \mapsto (h \mapsto hg^{-1})$$

die links- und rechtsregulären Darstellungen von G. Daraus erhalten wir die (gleichnamigen) Algebren-Darstellungen $\lambda : \mathbb{C}G \to B(\ell^2 G)$ und $\rho : \mathbb{C}G \to B(\ell^2 G)$.

Def. II.2.8 Die Gruppen-von Neumann-Algebra von G ist $\mathcal{R}(G) := \varrho(\mathbb{C}G)'' \subseteq \mathcal{B}(\ell^2 G)$.

Bem. Genauer ist $\mathcal{R}(G)$ die rechte Gruppen-von Neumann-Algebra und $\mathcal{L}(G) = \lambda(\mathbb{C}G)''$ die linke G.v.N.A. Es gilt $\mathcal{R}(G)' = \mathcal{L}(G)$ (HA!)

Seien $\mathcal{B}(\ell^2 G)^\lambda$ und $\mathcal{B}(\ell^2 G)^\varrho$ die von Neumann-Algebren der ϱ- bzw. λ-äquivarianten Operatoren. Offensichtlich $\varrho(\mathbb{C}G) \subseteq \mathcal{B}(\ell^2 G)^\lambda$ und $\lambda(\mathbb{C}G) \subseteq \mathcal{B}(\ell^2 G)^\varrho$.

Satz II.2.9 Es gilt $\mathcal{R}(G) = \mathcal{B}(\ell^2 G)^\lambda$ und $\mathcal{L}(G) = \mathcal{B}(\ell^2 G)^\varrho$.

Bew. Wg. Symmetrie genügt es $\mathcal{R}(G) = \mathcal{B}(\ell^2 G)^\lambda$ zu zeigen. „$\subseteq$": klar, weil $\mathcal{B}(\ell^2 G)^\lambda$ stark abg. ist.
„$\supseteq$": Sei $T \in \mathcal{B}(\ell^2 G)^\lambda$ und $S \in \mathcal{R}(G)' = \mathcal{L}(G) = \lambda(\mathbb{C}G)''$, d.h. $S = s\text{-}\lim_{i \in I} S_i$ mit $S_i \in \lambda(\mathbb{C}G) \Rightarrow TS = ST$
$\Rightarrow T \in \mathcal{R}(G)'' = \mathcal{R}(G)$. □

Bspe.
- Für $|G| < \infty$ ist $\mathcal{R}(G) = \mathbb{C}G$, insbes. $\mathcal{R}(\{1\}) = \mathbb{C}$.
- $G = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, Erzeuger wirkt auf O.N.B. $\mathbb{Z} \subseteq \ell^2\mathbb{Z}$ durch $k \mapsto k+1$. Fourier-transformiert auf $L^2[-\pi, \pi]$ durch $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \mapsto \frac{e^{i(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} = e^{ix} \cdot \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$. Setze $z = e^{ix}$. Dann wirkt $\mathbb{C}\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ durch Multiplikation auf $L^2[-\pi, \pi]$ und für $T \in \mathcal{R}(G) = \mathcal{B}(\ell^2 G)^\lambda$ und $f \in L^2[-\pi, \pi]$ gilt $f = \lim_{k \to \infty} p_k$ mit $p_k \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$,

also $Tf = \lim_{k\to\infty} T(p_k \cdot 1) = \lim_{k\to\infty} p_k T(1) = T(1)\cdot f$.

Beh.: $T(1) \in L^\infty[-\pi,\pi]$. Bew.: Zeige $\|T(1)\|_\infty = \|T\|$.

Ang. es gäbe $\varepsilon > 0$, sodass $A = \{T(1) \geq \|T\| + \varepsilon\}$ pos. λ-Maß hat. Setze $f_A := \frac{\chi_A}{\sqrt{\lambda(A)}}$, d.h. $\|f_A\| = 1$.

Dann gilt $\|T\|^2 \geq \|T f_A\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |T(1)|^2 \frac{\chi_A}{\lambda(A)} \, d\lambda \geq$
$\geq (\|T\| + \varepsilon)^2$, Widerspruch.

Umgekehrt def. Mult. mit jeder Fkt. $g \in L^\infty[-\pi,\pi]$ einen Op. $T \in B(\ell^2 G)^\lambda$. Somit gezeigt:

<u>Satz II.2.10</u>. $R(\mathbb{Z}) \cong L^\infty[-\pi,\pi] \cong L^\infty(S^1)$. □

<u>Bem.</u> Genauso sieht man $R(\mathbb{Z}^n) \cong L^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Allgemeiner: Jede komm. v.N.A. ist isomorph zu $L^\infty(X,\mu)$ (↑ stk. Borel) und jede komm. C^*-Alg. zu $C(X)$ (↑ komp. Hausdorff)

<u>Def. II.2.11</u> Die vergrößerte G.v.N.Alg. ist
$B((\ell^2 G)^n)^\lambda = M_n(\lambda(CG)') = M_n(R(G))$.
(Hier wirkt G durch λ diagonal.)

<u>Offene Frage</u>: $R(F_n) \cong R(F_m) \overset{?}{\Rightarrow} n = m$.

<u>II.3 Spur und Dimension</u>

<u>Def. II.3.1</u> Die von Neumann-Spur ist
$tr_{R(G)} : R(G) \to \mathbb{C}$, $T \mapsto \langle e, Te\rangle$
mit dem Einselement $e \in \ell^2 G$.

Lemma II.3.2 $\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(ST) = \mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(TS)$.

Beweis. Für $g, h \in G$ gilt

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}((\cdot g)(\cdot h)) = \langle e, gh \rangle = \begin{cases} 1 & g = h^{-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \langle e, hg \rangle$$
$$= \mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}((\cdot h)(\cdot g)),$$

also folgt die Beh. für $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}G)$, wg. schwacher Stetigkeit also auch für $S, T \in \mathcal{R}(G)$. □

Genauso für $\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}: M_n(\mathcal{R}(G)) \to \mathbb{C}$, $A \mapsto \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)} A_{ii}$,

denn $\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}((A \cdot B)^T) = \mathrm{tr}(B^T A^T) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$.

Bsp. Für $\mathcal{R}(\mathbb{Z}) \cong L^\infty[-\pi, \pi]$ gilt $\mathrm{tr} f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\lambda$.
Ist $A \subseteq [-\pi, \pi]$ messbar, gilt $\chi_A = \overline{\chi_A} = \chi_A^2$, d.h. $\chi_A \in L^\infty[-\pi, \pi]$ ist eine Projektion und $\mathrm{tr}\, \chi_A = \frac{\lambda(A)}{2\pi} \in [0, 1]$ bel. Daher gibt es $p \in M_n(L^\infty[-\pi, \pi])$ mit $\mathrm{tr}\, p \in [0, n]$ bel.. Beachte $\mathrm{tr}\, p \in \{0, 1, \dots, n\}$ für eine Proj. $p \in M_n(\mathbb{C})$.

Sei H ein Hilbertraum mit $G \curvearrowright H$ unitär und $T \in B(H)^G$. Wir wollen „$\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)} T$" definieren. Wir nehmen dazu an, dass wir eine isometrische G-Einbettung $i: H \hookrightarrow (\ell^2 G)^n$ haben (bzgl. $G \curvearrowright (\ell^2 G)^n$ diag. via λ)

Prop. II.3.3 Das lineare Funktional

$$B(H)^G \to \mathbb{C}, \quad T \mapsto \mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(i \circ T \circ \mathrm{pr}_{i(H)})$$

ist unabhängig von der Wahl von i.

Bew. Sei $j: H \hookrightarrow (\ell^2 G)^m$ eine weitere Einbettung. O.B.d.A. $n = m$. Mit Satz II.2.1 erhalten wir eine unitäre Trafo. $j \circ i^{-1} : i(H) \to j(H)$, die wir zu einer part. Isom. u auf $(\ell^2 G)^n$ fortsetzen. Weil $j = u \circ i$, folgt $pr_{j(H)} = pr_{i(H)} \circ u^*$ durch Adjungieren und daher

$$\begin{aligned} tr\left(j \circ T \circ pr_{j(H)}\right) &= tr\left(u \circ i \circ T \circ pr_{i(H)} \circ u^*\right) = \\ &= tr\left(i \circ T \circ pr_{i(H)} \circ u^* \circ u\right) = tr\left(i \circ T \circ pr_{i(H)} \circ pr_{i(H)}\right) = \\ &= tr\left(i \circ T \circ pr_{i(H)}\right). \end{aligned}$$

□

Def II.3.4 Ein Hilbert $\mathcal{L}(G)$-Modul (Hilbert G-Modul, Hilbert-Modul) ist ein Hilbertraum H mit $G \curvearrowright H$ unitär, sodass es eine isometrische G-Einbettung $H \hookrightarrow (\ell^2 G)^n$ gibt für irgendein n.

(Für $T \in \mathcal{L}(G)$ sei $T = s\text{-}\lim_{i \in I} T_i$ mit $T_i \in \mathcal{A}(CG)$ und für $x \in H$, definiere $T \cdot x = \lim_{i \in I} (T_i \cdot x)$.)

- Kategorie $\mathcal{L}(G)$-Mod mit beschränkten G-Operatoren als Morphismen.
- H heiße frei, falls $i: H \to (\ell^2 G)^n$ unitär gewählt werden kann.
- Mit Prop. II.3.3 erhalten wir $tr_{\mathcal{N}(G)}$ auf $End_{\mathcal{L}(G)}(H) = B(H)^G$.

Satz II.3.5 Sei H ein Hilbert $\mathcal{L}(G)$-Modul.

(i) $\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}$ ist $\mathbb{C}$-linear.

(ii) $\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}$ ist schwach stetig.

(iii) Für $S, T \in B(H)^G$ gilt $\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(ST) = \mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(TS)$.

(iv) Für $T \in B(H)^G$ gilt $\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(T^*T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$.

(v) Für $S, T \in B(H)^G$ mit $S \leq T$ gilt $\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(S) \leq \mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(T)$. □

In $\mathcal{L}(G)$-Mod haben wir folgende Konstruktionen:

- Ein Untermodul $K \subseteq H$ ist ein abg. G-inv. Unterraum.
- Ist $K \subseteq H$ ein Untermodul, so ist $H/K \cong K^\perp$ ein Faktormodul oder Quotientenmodul.
- Direkte Summe $H_1 \oplus H_2$.
- Tensorprodukt $H_1 \otimes H_2$ ist ein $G_1 \times G_2$-Hilbert-Modul ($i_j : H_j \to \ell^2(G)^{n_j}$, $j = 1, 2$ gibt $i_1 \otimes i_2 : H_1 \otimes H_2 \to \ell^2(G_1)^{n_1} \otimes \ell^2(G_2)^{n_2} = \ell^2(G_1 \times G_2)^{n_1 n_2}$)
- Für $G_0 \leq G$ mit $[G : G_0] < \infty$ haben wir $\mathrm{res}^G_{G_0} : \mathcal{L}(G)\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{L}(G_0)\text{-Mod}$ (die Einschränkung, nutze $\mathrm{res}^G_{G_0} \ell^2 G \cong \ell^2 G_0^{[G:G_0]}$.)

Satz II.3.6 (i) Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H & \to & K & \to & L & \to & 0 \\ & & \downarrow r & & \downarrow s & & \downarrow t & & \\ 0 & \to & H & \to & K & \to & L & \to & 0 \end{array}$$

in $\mathcal{L}(G)$-Mod.

Dann gilt $\mathrm{tr}\, s = \mathrm{tr}\, r + \mathrm{tr}\, t$.

(iii) Für $s \in B(H_1)^{G_2}$, $t \in B(H_2)^{G_2}$ gilt

$\mathrm{tr}(s \otimes t) = \mathrm{tr}(s) \cdot \mathrm{tr}(t)$.

(iii) Für $s \in B(H)^G$ und $[G : G_0] < \infty$ gilt

$\mathrm{tr}\left(\mathrm{res}^G_{G_0}(s)\right) = [G : G_0]\, \mathrm{tr}(s)$. □

Bew. Für (i) nutze $K \xrightarrow{u}_{\cong} H \oplus L$ und

$u^* s u \approx \begin{pmatrix} r & * \\ 0 & t \end{pmatrix}$. □

Def. II.3.7 Die von Neumann-Dimension eines Hilbert G-Moduls H ist

$$\dim_{\mathcal{R}(G)}(H) = \mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(\mathrm{id}_H).$$

Bspe. • $\dim_{\mathcal{R}(\{1\})}(H) = \dim_{\mathbb{C}} H$.

• $|G| < \infty$: $\dim_{\mathcal{R}(G)} H = \frac{\dim_{\mathcal{R}\{1\}} H}{|G|} = \frac{\dim_{\mathbb{C}} H}{|G|}$

unabhängig von $G \curvearrowright H$!

• $G = \mathbb{Z}$: $A \subseteq [-\pi, \pi]$ messbar, $L^2 A \subseteq L^2[-\pi,\pi] = l^2\mathbb{Z}$

$$\dim_{L^\infty[-\pi,\pi]}(L^2 A) = \mathrm{tr}_{L^\infty[-\pi,\pi]}(\mathrm{id}_A) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_A \, d\lambda = \frac{\lambda(A)}{2\pi} \in [0,1].$$

Mit II.3.6.(i) $\dim_{L^\infty[-\pi,\pi]} (L^2 A)^n = n \cdot \frac{\lambda(A)}{2\pi} \in [0, n]$.

Def. II.3.8 • $H \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} L$ in $\mathcal{L}(G)$-Mod heißt schwach exakt, falls $\ker p = \overline{\mathrm{im}\, i}$.

- $s: H \to K$ heißt schwacher Isom, falls
  $0 \to H \xrightarrow{s} K \to 0$ schwach exakt.

Satz II.3.7 (i) $\dim_{\mathcal{R}(G)} l^2 G = 1$.

(ii) Ist $0 \to H \to K \to L \to 0$ schwach exakt, folgt $\dim_{\mathcal{R}(G)} K = \dim_{\mathcal{R}(G)} H + \dim_{\mathcal{R}(G)} L$.

(iii) $\dim_{\mathcal{R}(G_1 \times G_2)} H_1 \otimes H_2 = \left(\dim_{\mathcal{R}(G_1)} H_1\right) \cdot \left(\dim_{\mathcal{R}(G_2)} H_2\right)$.

(iv) $\dim_{\mathcal{R}(G_0)} \operatorname{res}^G_{G_0} H = [G : G_0] \dim_{\mathcal{R}(G)} H$.

(v) Regularitäten.

□

→ Anschluss an die Einführung geschafft.

III ℓ^2-Bettizahlen von Zellkomplexen

III.1 G-CW-Komplexe

Def III.1.1 Sei X ein Zellkomplex. Eine Wirkung $G \curvearrowright X$ heißt zellulär, falls für jede offene Zelle $E \subseteq X$ und jedes $g \in G$ gilt:

(i) gE ist wieder eine offene Zelle ($\Leftrightarrow g: X \to X$ zellulär)

(ii) falls $gE \cap E \neq \emptyset$ gilt $gx = x$ für alle $x \in E$.

Bsp. · $S_3 \curvearrowright$ nicht zellulär

· $S_3 \curvearrowright$ zellulär

Wähle Pushouts für $X \rightsquigarrow X^n \setminus X^{n-1} \cong \coprod_{j \in J_n} \mathring{D}^n$

Wegen (i) erhalten wir $G \curvearrowright J_n$. Setze $I_n := J_n/G$

$\rightsquigarrow X^n \setminus X^{n-1} \cong \coprod_{i \in I_n} G/H_i \times \mathring{D}^n$ (G-Homöo. wg. (ii))

Wir nennen $G/H \times D^n$ eine n-dim. G-Zelle.

Satz III.1.2 Sei X ein Zellkomplex, $G \curvearrowright X$. TFAE:

(i) G wirkt zellulär.

(ii) Die Gerüste X^n sind G-invariant und es gibt Pushouts in G-Top

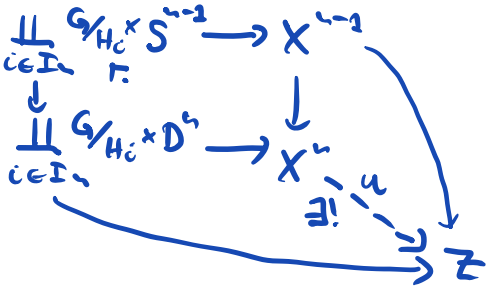
$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I_n} G/H_i \times S^{n-1} & \longrightarrow & X^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I_n} G/H_i \times D^n & \longrightarrow & X^n \end{array}$$

Bew. (ii) ⇒ (i): ✓ (i) ⇒ (ii): Diskussion oben:

Haben Pushouts $\coprod_{i\in I_n} G/H_i \times S^{n-1} \to X^{n-1}$ in Top.

$\coprod_{i\in I_n} G/H_i \times D^n \to X^n$

z.z.: Diese sind auch Pushouts in G-Top.



Weil jedes $x \in X^n$ sich zu $\coprod_{i\in I_n} G/H_i \times D^n$ oder X^{n-1} hochhebt ist u auch G-äquivariant. □

Def. III.1.3 Ein G-CW-Komplex ist ein CW-Komplex X mit $G \curvearrowright X$ zellulär. Er

- hat endlichen Typ, falls es für jedes n nur endl. viele n-dim. G-Zellen hat.
- ist endlich, falls es nur endl. viele G-Zellen hat
- heißt eigentlich, falls alle H_i in (ii) endlich sind.
- heißt frei, falls alle H_i trivial sind.

Bem. • X endlich ⟺ $G\backslash X$ kompakt (:⟺ X kokompakt)

- $N \trianglelefteq G \rightsquigarrow N\backslash X$ ist ein G/N-CW-Komplex.
- $G_0 \leq G \rightsquigarrow \mathrm{res}^G_{G_0}$: G-CW ⟶ G_0-CW

Bsp. Sei X ein zshgder CW-Komplex und $p: Y \to X$ eine reguläre Überlagerung. Dann ist Y ein G-CW-Komplex mit $G = \mathrm{Deck}(p)$. Umgekehrt: Ist Y ein zshgder G-CW Komplex, so ist $p: Y \to G\backslash Y$ eine reguläre Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(p) \cong G$.

III.2 Die l^2-Vervollständigung des zellulären Kettenkomplexes

Sei X ein G-CW-Komplex. Jedes $g \in G$ definiert $g \cdot : X \xrightarrow{\cong} X$ zellulär und wir erhalten funktoriell $g \cdot : C_*^{cw}(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} C_*^{cw}(X;\mathbb{Z})$, d.h. $C_*^{cw}(X;\mathbb{Z})$ ist kanonisch ein Kettenkomplex von $\mathbb{Z}G$-Linksmoduln und $C_*^{cw}(\cdot;\mathbb{Z})$ definiert einen Funktor

$$G\text{-CW} \longrightarrow \mathbb{Z}G\text{-chain}$$

Def. III.2.1 Der (zelluläre) l^2-Kettenkomplex eines G-CW-Komplexes X ist der $\mathbb{C}G$-Kettenkomplex

$$C_*^{(2)}(X) := l^2G \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*^{cell}(X;\mathbb{Z}).$$

Sei $G\text{-CW}^{prop}_{f.e.}$ die (volle) Unterkategorie der eigentlichen G-CW-Komplexe endlichen Typs.

Satz III.2.2 Der l^2-Kettenkomplex definiert einen Funktor $C_*^{(2)}(\cdot) : G\text{-CW}^{prop}_{fin.} \longrightarrow \mathcal{U}(G)\text{-Hod}$.

Bew. Betrachten nur einen freien G-CW-Komplex endlichen Typs X. Dann gilt für alle n, dass $C_n^{cell}(X;\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}G)^{k_n}$ (durch Wahl einer n-Zelle in jeder G-Bahn von n-Zellen). Somit $C^{(2)}(X) \cong (l^2G)^n$ und durch diesen alg. Iso. wird $C^{(2)}(X)$ zu einem (freien) Hilbert $\mathcal{L}(G)$-Modul, (unabh. von der Wahl, denn je zwei Iso.s sind unitär konjugiert). Die Differentiale $d_n^{(2)}$ werden durch Rechtsmultiplikation mit Matrizen aus $Mat(k_n, k_{n-1}; \mathbb{Z}G)$ dargestellt und sind daher beschränkte G-Operatoren. Ebenso für $f_n^{(2)}: C_n^{(2)}(X) \to C_n^{(2)}(Y)$ induziert durch $f: X \to Y$. □

Für einen freien G-CW-Komplex mit k_n n-dim. G-Zellen gilt also $C_*^{(2)}(X) \equiv$

$$\cdots \to (l^2G)^{k_{n+1}} \xrightarrow{\cdot INC_{n+1}^G} (l^2G)^{k_n} \xrightarrow{\cdot INC_n^G} (l^2G)^{k_{n-1}} \to \cdots$$

mit $INC_n^G \in Mat(k_n, k_{n-1}; \mathbb{Z}G)$.

III.3 l^2-Bettizahlen und wie man sie berechnet

Def. III.3.1 Sei X ein eigentlicher G-CW-Komplex endlichen Typs und sei $(C_*^{(2)}(X), d_*^{(2)})$ der zugehörige l^2-Kettenkomplex. Dann ist die n-te (reduzierte)

ℓ^2-Homologie von X gegeben durch

$$H_n^{(2)}(X) = \ker d_n^{(2)} / \overline{\operatorname{im} d_{n+1}^{(2)}}.$$

Bem. Nach Satz III.2.2 und unserer Diskussion unter Satz II.3.5 ist $H_n^{(2)}(X)$ ein Hilbert-$\mathcal{L}(G)$-Modul.

Def. III.3.2 Sei X ein eigentlicher G-CW-Komplex endlichen Typs. Die n-te ℓ^2-Betti-Zahl von X ist

$$b_n^{(2)}(X) = \dim_{\mathcal{R}(G)} H_n^{(2)}(X) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

- Schreiben auch $b_n^{(2)}(G \curvearrowright X)$.
- Für eine reguläre Überlagerung $p: Y \to X$ ist $b_n^{(2)}(Y) := b_n^{(2)}(\mathrm{Deck}(p) \curvearrowright Y)$.
- Insbesondere $b_n^{(2)}(\tilde{X}) = b_n^{(2)}(\pi_1 X \curvearrowright \tilde{X})$ für einen zusammenhängenden endlichen CW-Komplex X.

Bsp. I) Falls $|G| < \infty$, ist jeder G-CW-Komplex X eigentlich und X hat endlichen Typ g.d.w. X^n kompakt für alle $n \geq 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} C_*^{(2)}(X) &= \ell^2 G \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*^{cw}(X) \cong \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*^{cw}(X) \cong \\ &\cong (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*^{cw}(X) \cong \\ &\cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*^{cw}(X)) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} C_*^{cw}(X) \cong \\ &\cong C_*^{cw}(X; \mathbb{C}), \end{aligned}$$

also $H_n^{(2)}(X) = H_n(X; \mathbb{C})$ und mit Satz II.3.7.(iv)

folgt $b_n^{(2)}(X) = \dim_{R(G)} H_n(X;\mathbb{C}) = \frac{\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Res}_1^G H_n(X;\mathbb{C})}{|G|}$

$= \frac{b_n(X)}{|G|}$.

Insbesondere also $b_n^{(2)}(X) = b_n(X)$, falls $G = \{1\}$.

II) Sei $S^2 = \bigcirc$ und $X = \widetilde{S^1}$ der $\mathbb{Z}$-CW-Komplex

$$C_*^{(2)}(\widetilde{X}) \equiv \cdots \to 0 \to \ell^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_1^{(2)}} \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$\text{Fourier} \downarrow \cong \qquad \cdot(z-1) \qquad \downarrow \cong$$

$$L^2 S^1 \xrightarrow{\cdot(z-1)} L^2 S^1$$

Jedes $f \in \ker d_1^{(2)}$ muss also Konstante Fourier-Koeffizienten haben. Wegen der ℓ^2-Bed. folgt $f = 0$, d.h. $\ker d_1^{(2)} = \{0\}$. Außerdem gilt $(d_1^{(2)})^* = \cdot(z^{-1}-1)$, also auch $0 = \ker (d_1^{(2)})^* = (\mathrm{im}\, d_1^{(2)})^\perp$ und damit $\overline{\mathrm{im}\, d_1^{(2)}} = C_0^{(2)}(\widetilde{X})$. Es folgt $H_n^{(2)}(\widetilde{X}) = 0$ für alle $n \geq 0$, also $b_n^{(2)}(\widetilde{X}) = 0$ für alle $n \geq 0$.

($\widetilde{X}$ ist ℓ^2-azyklisch)

III) Sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\circ} & X \\ \downarrow & \Gamma & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

mit X wie in II.

mit $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$-Wirkung.

Es gilt $C^{(2)}_*(Y) \cong$

$$\cdots \to 0 \to \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{d_2^{(2)}} \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2/\{0\}\times\mathbb{Z}/2)$$

Weil $X \subseteq Y$ und $X^0 = Y^0$ folgt wieder $\overline{\operatorname{im} d_1^{(2)}} = C_0^{(2)}(Y)$, also $b_0^{(2)}(Y) = 0$. Somit ist

$$0 \to \ker d_2^{(2)} \to \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{d_2^{(2)}} \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2/\{0\}\times\mathbb{Z}/2) \to 0$$

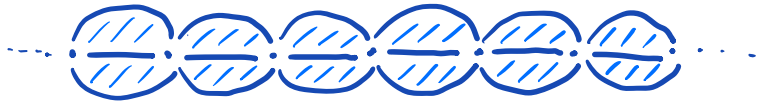
schwach exakt. Außerdem gilt (II.3.2.(iv))

$$\dim_{\mathcal{R}(G)} \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2/\{0\}\times\mathbb{Z}/2) = \frac{1}{2}\cdot \dim_{\mathcal{R}(\mathbb{Z})} \ell^2\mathbb{Z} = \frac{1}{2},$$

d.h. $b_2^{(2)}(Y) = \dim_{\mathcal{R}(G)} \ell^2 G - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Keine höher-dim. G-Zellen, also $b_n^{(2)}(Y) = 0$ für $n \geq 2$.

IV) Sei nun $Z =$



Dann ist $C^{(2)}_*(Z) =$

$$\cdots 0 \to \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{d_2^{(2)}} \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2) \oplus \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2/\{0\}\times\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{d_1^{(2)}} \quad (*)$$

$$\to \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2/\{0\}\times\mathbb{Z}/2).$$

Wieder hat $d_2^{(2)}$ dichtes Bild und $d_2^{(2)}$ ist injektiv (identisch in der ersten Komponente). Weil

$$\dim_{\mathcal{R}(G)} l^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2) \oplus l^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2/\{0\}\times\mathbb{Z}/2) = \frac{3}{2} = 1+\frac{1}{2} =$$

$$= \dim_{\mathcal{R}(G)} l^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2) + \dim_{\mathcal{R}(G)} l^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2/\{0\}\times\mathbb{Z}/2),$$

ist (*) schwach exakt, also ist $\mathbb{Z}$ l^2-azyklisch.

Statt mit dem l^2-Kettenkomplex zu argumentieren, besser:

Satz III.3.3 (Berechnung von l^2-Betti-Zahlen)

(i) Sei $f: X \xrightarrow{\simeq} Y$ eine G-Homotopieäquivalenz von eigentlichen G-CW-Komplexen endlichen Typs. Dann gilt $b_n^{(2)}(X) = b_n^{(2)}(Y)$ für alle $n \geq 0$.

(ii) Sei $X \neq \emptyset$ ein zusammenhängender eigentlicher G-CW-Komplex endlichen Typs. Dann gilt $b_0^{(2)}(X) = \frac{1}{|G|}$ (mit $\frac{1}{\infty} = 0$)

(iii) Seien X_1, X_2 eigentliche G_1- bzw. G_2-CW-Komplexe endlichen Typs. Dann ist $X_1 \times X_2$ ein eigentlicher $G_1 \times G_2$-CW-Komplex endlichen Typs und es gilt

$$b_n^{(2)}(X_1 \times X_2) = \sum_{p+q=n} b_p^{(2)}(X_1) \cdot b_q^{(2)}(X_2).$$

(iv) Sei X ein eigentlicher G-CW-Komplex endlichen Typs und $G_0 \leq G$ mit $[G:G_0] < \infty$. Dann ist $\operatorname{res}_{G_0}^G X$ ein eigentlicher G_0-CW-Komplex endlichen Typs und es gilt

$$b_n^{(2)}(\operatorname{res}_{G_0}^G X) = [G:G_0]\, b_n^{(2)}(X) \text{ für } n \geq 0.$$

□

Def. III.3.4 Sei X ein endlicher, eigentlicher G-CW-Komplex. Die ℓ^2-Eulercharakteristik ist

$$\chi^{(2)}(X) := \sum_{n\geq 0} (-1)^n b_n^{(2)}(X) \in \mathbb{R}.$$

- $\chi^{(2)}$ ist eine G-Homotopieäquivalenzinvariante (III.3.3.(i))

Satz III.3.5 (ℓ^2-Euler-Poincaré-Formel)
Sei X ein endlicher, eigentlicher G-CW-Komplex und sei $\{H_i\}_{i\in I_n}$ die Familie der Standgruppen der äquivarianten n-Zellen von X. Dann gilt

$$\chi^{(2)}(X) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \sum_{i\in I_n} \frac{1}{|H_i|}.$$

Bew. Siehe T1. IV. 2.8! Wende $\dim_{\mathcal{R}(G)}$ an auf

1.) $0 \to \ker d_n^{(2)} \to C_n^{(2)}(X) \xrightarrow{d_n^{(2)}} \overline{\operatorname{im} d_n^{(2)}} \to 0$

2.) $0 \to \overline{\operatorname{im} d_{n+1}^{(2)}} \to \ker d_n^{(2)} \to H_n^{(2)}(X) \to 0$

(jeweils schwach exakt) und nutze $C_n^{(2)}(X) \cong \bigoplus_{i\in I_n} \ell^2(G/H_i)$. Bleibt zu zeigen:

$\dim_{\mathcal{R}(G)} \ell^2(G/H) = \frac{1}{|H|}$. Betrachte dazu

$$i : \ell^2(G/H) \hookrightarrow \ell^2 G, \quad gH \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}(gh_1 + \dots + gh_n)$$

mit $H = \{h_1 = e, h_2, \dots, h_n\}$ (wohldefiniert ✓ isometrisch ✓ G-äquivariant ✓)

Dann ist $pr_{i(l^2(G/H))} = \cdot \frac{1}{n}(h_1 + \cdots + h_n)$ und daher

$$\dim_{R(G)} l^2(G/H) = tr_{N(G)} pr_{i(l^2(G/H))} = \frac{1}{n}. \quad \square$$

<u>Korollar III.3.6</u> Sei X ein endlicher, freier G-CW-Komplex. Dann gilt $\chi^{(2)}(X) = \chi(G\backslash X)$. $\square$

Insbesondere also $\chi(X) = \chi^{(2)}(\tilde{X})$ für einen kompakten, zusammenhängenden CW-Komplex X.

- Damit ist die Implikation „Singer $\Rightarrow$ Hopf" aus Kapitel 1 gezeigt.

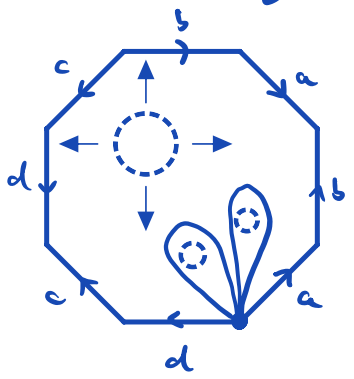
Wir betrachten noch einmal die Beispiele II–IV:

- $b_0^{(2)}(X) = b_0^{(2)}(Y) = b_0^{(2)}(Z) = 0$ folgt aus III.3.3.(iii).
- Wegen $0 = \chi(S^1) = \chi^{(2)}(X) = b_0^{(2)}(X) - b_1^{(2)}(X)$ folgt $b_2^{(2)}(X) = 0$.
- Nach III.3.5 haben wir $\chi^{(2)}(Y) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, also $b_1^{(2)}(Y) = \frac{1}{2}$.
- Weil $Z \simeq_G X$, ist Z wie X l^2-azyklisch.

<u>Satz III.3.7</u> (l^2-Poincaré-Dualität) Der top. Raum M trage zugleich die Struktur einer orientierbaren n-dim. Mannigfaltigkeit und eines endlichen, freien G-CW-Komplexes. Dann gilt $b_k^{(2)}(G \curvearrowright M) = b_{n-k}^{(2)}(G \curvearrowright M)$. $\square$

Bsp Sei $g \geq 1$. • Es gilt $b_2^{(2)}(\widetilde{\Sigma}_g) = b_0^{(2)}(\widetilde{\Sigma}_g) = 0$
sowie $b_1^{(2)}(\widetilde{\Sigma}_g) = -\chi^{(2)}(\widetilde{\Sigma}_g) = -\chi(\Sigma_g) = -(2-2g)$
$= 2g-2$.

• Sei $\Sigma_{g,d}$ die Fläche mit $d > 0$ Löchern,
$\Sigma_{g,d} = \Sigma_g \setminus \bigcup_{i=1}^{d} \mathring{D}^2$. Dann gilt $\Sigma_{g,d} \simeq \bigvee_{i=1}^{2g+d-1} S^1$:



,

also $1-(2g+d-1) = \chi(\Sigma_{g,d}) = \chi^{(2)}(\widetilde{\Sigma}_{g,d})$
$= \underbrace{b_0^{(2)}(\widetilde{\Sigma}_{g,d})}_{=0} - b_1^{(2)}(\widetilde{\Sigma}_{g,d}) + \underbrace{b_2^{(2)}(\widetilde{\Sigma}_{g,d})}_{=0}$,
$(\pi_1 \Sigma_{g,d} = F_{2g+d-1})$ $(\widetilde{\Sigma}_{g,d} \simeq \vee S^1$, keine 2-Zellen),

d.h. $b_1^{(2)}(\widetilde{\Sigma}_{g,d}) = 2g+d-2 = d+2(g-1)$.

III.4 Atiyahs Frage und Kaplanskys Vermutung

Sei $B^{(2)} = \{b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: es gibt einen endl., freien, zahmen G-CW-Komplex X mit $b_n^{(2)}(G \curvearrowright X) = b$ für ein $n \geq 0\}$

Frage (Atiyah, 1974) Gibt es $b \in B^{(2)}$ mit $b \notin \mathbb{Q}$?

Satz (Austin, 2013) Die Menge $B^{(2)}$ ist überabzählbar.

Satz (Grabowski 2014, Pichot-Schick-Zuk, 2015) $B^{(2)} = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Sei $\widetilde{B}^{(2)} \subseteq B^{(2)}$ die Teilmenge mit der zusätzlichen Annahme, dass $\pi_1 X = \{1\}$, also $X \to G\backslash X$ universell.
Weil $\{\text{endliche zshgde CW-Komplexe}\}/\simeq$ abzählbar ist, ist auch $\widetilde{B}^{(2)}$ abzählbar.
Aber: $\widetilde{B}^{(2)}$ enthält alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit berechenbarer Binärdarstellung (d.h. $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq \widetilde{B}^{(2)}$, $\pi, e \in \widetilde{B}^{(2)}$, ...).

Wollen $B^{(2)}$ und $\widetilde{B}^{(2)}$ ohne Rückgriff auf Zellkomplexe charakterisieren.

Prop. III.4.1 Sei $(C^{(2)}_*, d^{(2)}_*)$ ein Kettenkomplex von Hilbert-Moduln. Setze $\Delta^{(2)}_n := d^{(2)*}_n d^{(2)}_n + d^{(2)}_{n+1} d^{(2)*}_{n+1}$.
Dann gilt

$$C^{(2)}_n = \ker \Delta_n \oplus \overline{\operatorname{im} d^{(2)}_{n+1}} \oplus \overline{\operatorname{im} d^{(2)*}_n}$$

und die kanonische Abb. $\ker \Delta^{(2)}_n \xrightarrow{\cong} H^{(2)}_n(C^{(2)}_*)$ ist ein Iso. „l^2-Hodge-de-Rham-Zerlegung"

Bew. Es gilt $C^{(2)}_n = \ker d^{(2)}_n \oplus (\ker d^{(2)}_n)^\perp = \ker d^{(2)}_n \oplus \overline{\operatorname{im} d^{(2)*}_n}$. Außerdem folgt aus

$$\langle \Delta^{(2)}_n x, x \rangle = \| d^{(2)}_n x \|^2 + \| d^{(2)*}_{n+1} x \|^2,$$

dass $\ker \Delta^{(2)}_n = \ker d^{(2)}_n \cap \ker d^{(2)*}_{n+1}$

$= \ker d_n^{(2)} \cap (\operatorname{im} d_{n+1}^{(2)})^\perp$, also

$\ker d_n^{(2)} = \ker \Delta_n^{(2)} \oplus \overline{\operatorname{im} d_{n+1}^{(2)}}$, woraus auch die zweite Aussage folgt. □

Somit ist jedes $b \in B^{(2)}$ gegeben als

$$b = \dim_{\mathcal{R}(G)} \ker(\cdot A)$$

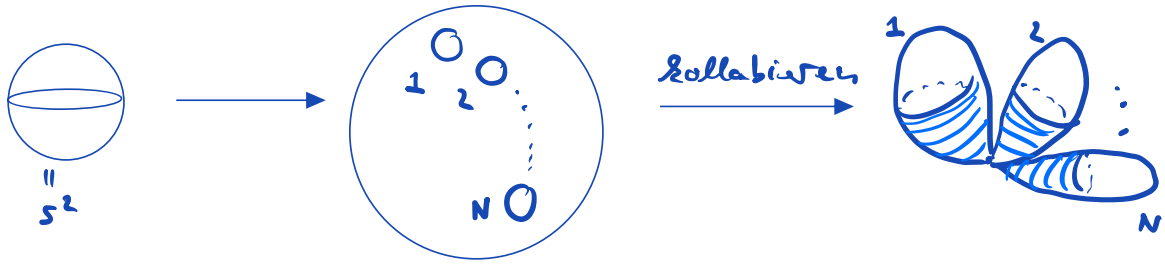
mit $A \in \mathrm{Mat}(k, l; \mathbb{Z}G)$. Aber auch umgekehrt:

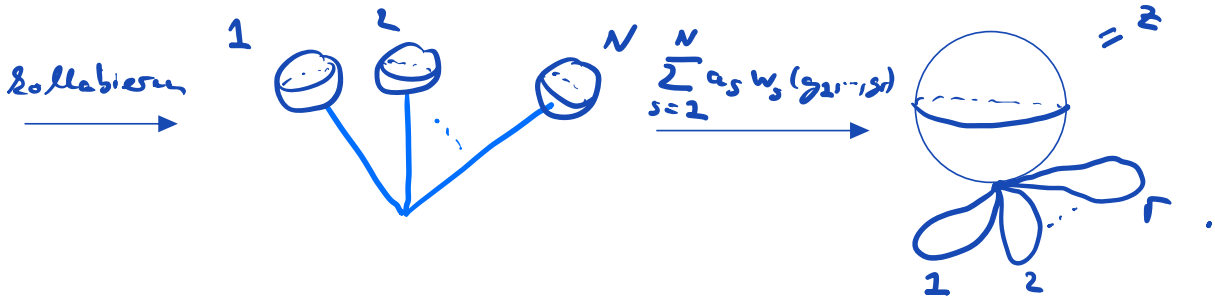
<u>Prop. III.4.2</u> Sei $A \in \mathrm{Mat}(k, l; \mathbb{Z}G)$ und G sei von r Elementen erzeugt. Dann gibt es einen freien G-CW-Komplex X mit k 3-dim. G-Zellen, l 2-dim. G-Zellen, r 1-dim. G-Zellen und einer 0-dim. G-Zelle, sodass

$$\begin{array}{ccc} C_3^{(2)}(X) & \xrightarrow{d_3^{(2)}} & C_2^{(2)}(X) \\ \| & & \| \\ (\ell^2 G)^k & \xrightarrow{\cdot A} & (\ell^2 G)^l \end{array}$$

und somit $b_3^{(2)}(X) = \dim_{\mathcal{R}(G)} \ker(\cdot A)$.

<u>Bew.</u> Sei zunächst $k = l = 1$ und $A = \left(\sum_{s=1}^{N} a_s w_s(g_1, \dots, g_r) \right)$ mit $G = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$. Setze $Z = S^2 \vee \left(\bigvee_{j=1}^{r} S^1 \right)$ und $Y = D^3 \cup_\varphi Z$ mit $\varphi : S^2 \to Z$ gegeben durch





Betrachte $\pi_2 Y \twoheadrightarrow G$. Der Kern definiert eine reguläre Überlagerung $p: X \to Y$ mit $\mathrm{Deck}(p) = G$ und $d_3^{cw}: \mathbb{Z}G \xrightarrow{\cdot A} \mathbb{Z}G$ nach Konstruktion.
Im Allgemeinen starte mit $Z = \bigvee S^2 \vee \bigvee S^1$ und klebe 3-Zellen an. □

Ist G sogar endlich präsentiert, können wir noch endlich viele 2-Zellen an Y anheften entsprechend der Relatorwörter. Die universelle Überlagerung ist dann ein einfach zusammenhängender G-CW-Komplex mit $d_3^{cw} = \cdot A\,(\times 0)$.

Für einen Ring $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{C}$ setzen wir

$$B_R^{(2)}(G) = \left\{ \dim_{R(G)} \ker(\cdot A) : A \in \mathrm{Mat}(k, l; RG) \right\}.$$

Dann folgt aus Prop. III.4.2

$$B^{(2)} = \bigcup_{\substack{G \text{ endl.} \\ \text{erz.}}} B_{\mathbb{Z}}^{(2)}(G) \quad \text{und} \quad \widetilde{B^{(2)}} = \bigcup_{\substack{G \text{ endl.} \\ \text{präs.}}} B_{\mathbb{Z}}^{(2)}(G).$$

Grabowski und Pichot-Schick-Zeh haben Lateinamerikanische Gruppen betrachtet:

$$G = \mathbb{Z}/2 \wr \mathbb{Z} := \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \rtimes \mathbb{Z}.$$

→ Beziehung zu Turingmaschinen.
→ Unendlich große Torsion

Vermutung III.4.3 (Atiyah, Lück-Schick)
Sei $\mathbb{Z} \leq R \leq \mathbb{C}$ ein Ring und G eine Gruppe, deren endliche Untergruppen beschränkte Ordnung haben. Sei $\mathrm{kgV}(G)$ das kgV der auftretenden Ordnungen. Dann gilt $b_R^{(2)}(G) \leq \frac{1}{\mathrm{kgV}(G)} \cdot \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

→ Für torsionsfreies G sagt die Vermutung also $b_R^{(2)}(G) \leq \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Vermutung III.4.4 (Kaplansky) Sei $\mathbb{Z} \leq R \leq \mathbb{C}$ ein Ring und G eine torsionsfreie Gruppe. Dann ist RG nullteilerfrei.

Satz III.4.5 Ist G torsionsfrei und erfüllt III.4.3 mit Koeff. in R, dann gilt auch III.4.4 für RG.

Beweis. Seien $a, b \in RG$ mit $a \cdot b = 0$. Falls $a = 0$ sind wir fertig. Andernfalls gilt für $a \in RG \leq l^2 G$,

dann $0 \neq a \in \ker(l^2G \xrightarrow{\cdot b} l^2G)$ und damit $0 < \dim_{R(G)} \ker(\cdot b) \leq 1$. Wegen III.4.3 folgt also $\dim_{R(G)} \ker(\cdot b) = 1$. Weil $l^2G = \ker(\cdot b) \oplus \ker(\cdot b)^\perp$, folgt $\ker(\cdot b) = l^2G$, insbesondere $0 = e \cdot b = b$. □

Erinnerung, Kapitel I:

Satz Sei G torsionsfrei. Ist $b_n^{(2)}(\bar{X}) \in \mathbb{Z}_{20}$ für jede reguläre Überlagerung $\bar{X} \xrightarrow{r} X$ mit einem zshgdn. komp. Zellkomplex X und $\mathrm{Deck}(p) \leq G$, dann gilt die Kaplansky-Vermutung für G und $R = \mathbb{Q}$.

Bew. Seien $a, b \in \mathbb{Q}G$, sodass $a \cdot b = 0$. Weil $a = \sum_{g \in G} a_g g$ und $b = \sum_{g \in G} b_g g$ endliche Linearkombinationen sind, gibt es $H \leq G$ endl. erzeugt mit $a, b \in \mathbb{Q}H$. Mit Prop. III.4.2 erhalten wir $B_{\mathbb{Z}}^{(2)}(H) \leq \mathbb{Z}_{20}$. Dann gilt aber auch $B_{\mathbb{Q}}^{(2)}(H) \leq \mathbb{Z}_{20}$, denn $\ker(\cdot A) = \ker(\cdot C \cdot A)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(k, l; \mathbb{Q}H)$ und $C \in \mathbb{Z}_{>0}$. Mit Satz III.4.5 folgt die Beh. □

Bem. Nach HA 3.5.1 gelten dann auch die Kaplansky-Vermutungen über nilpotente und idempotente Elemente für $\mathbb{Q}G$.

Sei $\mathcal{E}$ die kleinste Klasse von Gruppen, die abgeschlossen ist unter Bilden von Untergruppen, Quotienten, Erweiterungen und gerichteten Vereinigungen und sodass $\mathcal{E}$ alle endlichen und alle abelschen Gruppen enthält. Eine Gruppe $G \in \mathcal{E}$ heißt elementar mittelbar.

Sei $\mathcal{C}$ die kleinste Klasse von Gruppen, die abgeschlossen ist unter gerichteten Vereinigungen, die alle freien Gruppen enthält und alle Gruppen G in

$$1 \to N \to G \to A \to 1$$

mit $N \in \mathcal{C}$ und $A \in \mathcal{E}$.

Satz III.4.6 (Linnell 1993) Sei $G \in \mathcal{C}$, sodass die endlichen Untergruppen von G beschränkte Ordnung haben. Dann erfüllt G die Atiyah-Vermutung (III.4.3) mit Koeffizienten in $\mathbb{R} = \mathbb{C}$. □

IV ℓ^2-Betti-Zahlen von Gruppen

IV.1 Klassifizierende Räume für Familien

Def. IV.1.1 Eine Familie von Untergruppen von G ist eine Menge $\mathcal{F}$ von Untergruppen $H \leq G$, sodass
- $H \in \mathcal{F} \Rightarrow g^{-1}Hg \in \mathcal{F}$ für alle $g \in G$,
- $H, K \in \mathcal{F} \Rightarrow H \cap K \in \mathcal{F}$.

Bsps.
- $\mathrm{Triv} = \{\{1\}\}$
- $\mathrm{All} = \{H \leq G\}$
- $\mathrm{Fin} = \{H \leq G : |H| < \infty\}$
- $\mathrm{Vcyc} = \{H \leq G : \exists\, K \leq H, \text{ sd. } K \cong \mathbb{Z} \text{ und } [H:K] < \infty\}$

Erinnerung:
- Für einen G-Raum X und $H \leq G$ ist $X^H = \{x \in X : hx = x \text{ für alle } h \in H\}$
- X heißt schwach zusammenziehbar, falls

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & X \\ & \searrow \quad \exists \nearrow & \\ & D^n & \end{array} \qquad \text{für } n \geq 0$$

($\Leftrightarrow X \neq \emptyset$, wegzshgd., einfach zshgd., $\pi_n(X, \cdot) = 0$ für $n \geq 2$)

Satz IV.1.2 Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Untergruppen von G und E ein G-CW-Komplex mit allen Standgruppen in $\mathcal{F}$. Dann sind äquivalent:

(i) Für jeden G-CW-Komplex X mit Standgruppen in $\mathcal{F}$ gibt es eine bis auf G-Homotopie

eindeutige G-äquivariante Abb. $X \to E$.

(ii) Für jedes $H \in \mathcal{F}$ ist E^H schwach zusammenziehbar.

Bem. Jedes $H \in \mathcal{F}$ definiert einen Funktor

$$\begin{aligned} \underline{G\text{-Top}} &\longrightarrow \underline{\text{Top}} \\ X &\longmapsto X^H \\ (f: X \to Y) &\longmapsto (f|_{X^H}: X^H \to Y^H) \end{aligned}$$

Dazu linksadjungiert ist

$$\begin{aligned} \underline{\text{Top}} &\longrightarrow \underline{G\text{-Top}} \\ X &\longmapsto G/H \times H \\ (f: X \to Y) &\longmapsto (\mathrm{id} \times f: G/H \times X \to G/H \times Y) \end{aligned}$$

Die Hom-Set-Adjunktion ist gegeben durch

$$\mathrm{Hom}_{\underline{G\text{-Top}}}(G/H \times X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\text{Top}}}(X, Y^H)$$

$$(f: G/H \times X \to Y) \longmapsto (x \mapsto f(H, x))$$

$$((gH, x) \mapsto gh(x)) \longleftarrow (h: X \to Y^H).$$

Jetzt (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $H \in \mathcal{F}$. Aus (i) erhalten wir eine G-Abb. $f: G/H \to E$. Insbes. gilt $h \cdot f(H) = f(hH) = f(H)$ für $h \in H$, d.h. $f(H) \in E^H$, also $E^H \neq \emptyset$. Für $n \geq 1$ definiert jedes $f: S^{n-1} \to E^H$ einen Punkt in $\mathrm{Hom}_{\text{Top}}(S^{n-2}, E^H) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{G\text{-Top}}}(G/H \times S^{n-1}, E)$

Homöo. in Komp.-offen-Topologie

Letztere Raum ist wegzshgd. nach (i). Also finden wir einen Weg von f zu $\mathrm{const}: S^{n-1} \to E^H$, d.h. eine Nullhomotopie von f in E^H oder äquivalent eine Fortsetzung von f zu $D^n \to E^H$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei X ein G-CW-Komplex mit Standgruppen in F. Zu konstruieren eine G-Abb. $f: X \to E$ eindeutig bis auf G-Homotopie. Induktion über X^n. Für $X^0 \cong \coprod_{i \in I_0} G/H_i$ ist $E^{H_i} \neq \emptyset$ nach (ii). Wähle $x_i \in E^{H_i}$. Dies legt $f_0: X^0 \to E$ durch $f_0(H_i) = x_i$ fest. Für $f_0': X^0 \to E$ gegeben, setze $x_i' := f_0'(H_i)$. Dann definieren x_i, x_i' eine Abb. $h_i': G/H_i \times S^0 \to E$. Die adjungierte Abb. $S^0 \to E^{H_i}$ setzt sich nach (ii) fort zu $D^1 \to E^{H_i}$ und adjungiert erhalten wir $h_i: G/H_i \times D^1 \to E$. Dann ist $h = \coprod_{i \in I_0} h_i$ eine G-Homotopie $f_0 \simeq f_0'$.

Sei nun $f_{n-1}: X^{n-1} \to E$ gegeben. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i \in I_n} G/H_i \times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{n-1} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
\coprod_{i \in I_n} G/H_i \times D^n \arrow[r] \arrow[drr, dashed, bend right, "\text{existiert nach (ii)}"'] & X^n \arrow[dr, "\exists!"] \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] & \\
& & E.
\end{tikzcd}$$

Eindeutigkeit ähnlich wie für $n = 0$. $\square$

Def. IV.1.3 Ein G-CW-Komplex $E_{\mathcal{F}}G$ mit Standgruppen in $\mathcal{F}$, der (i) und (ii) erfüllt, heißt klassifizierender Raum von G für $\mathcal{F}$.

Satz IV.1.4 Zu jeder Gruppe G und jeder Familie $\mathcal{F}$ von Untergruppen von G gibt es einen bis auf G-Homotopieäquivalenz eindeutigen klassifizierenden Raum $E_{\mathcal{F}}G$.

Beweis. Existenz: $(E_{\mathcal{F}}G)^0 := \coprod_{H\in\mathcal{F}} G/H$. Sei $(E_{\mathcal{F}}G)^{n-1}$ bereits konstruiert. Für jedes $H\in\mathcal{F}$, wähle in $S^{n-1} \to ((E_{\mathcal{F}}G)^{n-1})^H$ in jeder Homotopieklasse und klebe $G/H \times D^n$ mit der adj. Abb an, um $(E_{\mathcal{F}}G)^n$ zu erhalten. Eindeutigkeit: Allgemeiner Umstand: $E^2_{\mathcal{F}}G \xrightarrow{\varphi} E^2_{\mathcal{F}}G$, $E^2_{\mathcal{F}}G \xrightarrow{\psi} E^2_{\mathcal{F}}G$, $\psi\circ\varphi \simeq id$, $\varphi\circ\psi \simeq id$. □

Setze $\underline{EG} := E_{\mathcal{FIN}}G$, $EG := E_{\mathcal{TRIV}}G$, $BG := {}_G\backslash EG$.

Quiz I

G	BG	EG	$\underline{EG}$
$\mathbb{Z}$	S^1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{Z}^k$	$(S^1)^k$	$\mathbb{R}^k$	$\mathbb{R}^k$
F_k	$\bigvee_{i=1}^{k} S^1$		
$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{RP}^\infty = \operatorname{colim}_n \mathbb{RP}^n$	S^∞	$\bullet$
D_∞	$\mathbb{RP}^\infty \vee \mathbb{RP}^\infty$		$\mathbb{R}$

IV.2 ℓ^2-Bettizahlen von Gruppen

Def. IV.2.1 Eine Gruppe G hat Typ F_∞, falls es ein G-CW-Modell für EG von endlichem Typ gibt. Sie hat Typ F_∞ bzgl. $\mathcal{F}$, falls es ein G-CW-Modell für $E_{\mathcal{F}}G$ von endlichem Typ gibt.

Def. IV.2.2 Hat G Typ F_∞ (bzgl. $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{FIN}$), setzen wir $b_n^{(2)}(G) := b_n^{(2)}(EG)$ (bzw. $b_n^{(2)}(G,\mathcal{F}) = b_n^{(2)}(E_{\mathcal{F}}G)$).

Satz IV.2.3 (ohne Beweis) $b_n^{(2)}(G) = b_n^{(2)}(G, \mathcal{FIN})$.

Wir können also $b_n^{(2)}(G) := b_n^{(2)}(G, \mathcal{FIN})$ setzen, falls G Typ F_∞ bzgl. $\mathcal{FIN}$ hat, selbst wenn G nicht Typ F_∞ hat.

Quiz II

G	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^\ell$	F_g	$\mathbb{Z}/2$	D_∞
$b_n^{(2)}(G)$	0	0	$\begin{cases} g-1 & n=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\begin{cases} 1/2 & n=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	0

Satz IV.2.4 Wir betrachten Gruppen vom Typ F_∞.

(i) $b_n^{(2)}(G_1 \times G_2) = \sum_{p+q=n} b_p^{(2)}(G_1) \cdot b_q^{(2)}(G_2)$.

(ii) $b_n^{(2)}(G_1 * G_2) = b_n^{(2)}(G_1) + b_n^{(2)}(G_2) \quad (n \geq 2)$,

$b_2^{(2)}(G_1 * G_2) = 1 + b_2^{(2)}(G_2) - \frac{1}{|G_2|} + b_2^{(2)}(G_2) - \frac{1}{|G_2|}$,

$b_0^{(2)}(G_1 * G_2) = 0$, falls G_1 und G_2 nicht-trivial.

(iii) $b_n^{(2)}(G_0) = [G : G_0]\, b_n^{(2)}(G)$ für $G_0 \leq G$, $[G : G_0] < \infty$.

Bew. (i) $E(G_1 \times G_2) = EG_1 \times EG_2$ → Künneth III.3.3. (iii).

(ii) $B(G_1 * G_2) = BG_1 \vee BG_2$, $E(G_1 * G_2) = \widetilde{BG_1 \vee BG_2}$

→ Mayer-Vietoris (technisch)

(iii) $EG_0 = \operatorname{res}^G_{G_0} EG$ → III. 3.3. (iv). □

Warum ist $b_n^{(2)}(G) := b_n^{(2)}(EG)$ bzw. $H_n^{(2)}(G) := H_n^{(2)}(EG)$ die „richtige" Definition für ℓ^2-Gruppenhomologie?

Erinnerung (Topologie II): $H_n(G) := \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Fundamentalsatz der Hom. Alg.: $\exists\, P_* \to \mathbb{Z}$ proj. Auflösung des triv. $\mathbb{Z}G$-Rechtsmoduls $\mathbb{Z}$,

$\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = H_n(P_* \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z})$.

(triv. $\mathbb{Z}G$-Rechtsm. ↗, ↖ triv. $\mathbb{Z}G$-Linksm.)

Ist BG ein klassifizierender Raum für G (d.h. $\widetilde{BG} = EG \simeq \cdot$) mit $BG^0 = \cdot$, so ist

$\cdots \to C_2^{cw}(EG) \to C_1^{cw}(EG) \to C_0^{cw}(EG) \cong \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$

eine freie (insbes. projektive) Auflösung von $\mathbb{Z}$.

Also gilt $H_n(G) = H_n(C_*^{cw}(EG) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) =$

$= H_n(C_*^{cw}(BG)) = H_n(BG)$, also

$$b_n(G) = b_n(BG) \quad \rightsquigarrow \quad b_n^{(2)}(G) = b_n^{(2)}(EG)$$

IV.3 Gruppentheoretische Anwendungen

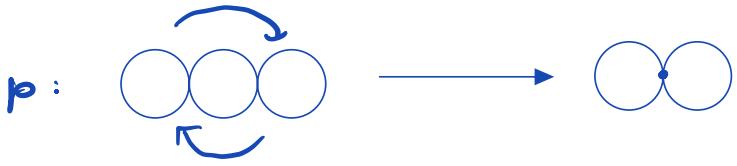
Def. IV.3.1 Eine Gruppe G heißt endlich $\aleph_0$-Hopfsch, falls G nicht isomorph zu einer ihrer echten Untergruppen mit endlichem Index ist.

Bsp. $|G| < \infty$. Gegenbsp. $G = \mathbb{Z}$.

Satz IV.3.2 Sei G vom Typ F_∞ und $b_n^{(2)}(G) > 0$ für ein $n \geq 0$. Dann ist G endlich $\aleph_0$-Hopfsch.

Bew. Sei $H \leq G$ mit $[G:H] \geq 2$ und $H \cong G$.
Dann gilt $b_n^{(2)}(G) = b_n^{(2)}(H) = [G:H]\, b_n^{(2)}(G)$, also $b_n^{(2)}(G) = 0$. □

Also ist F_k für $k \geq 2$ endlich $\aleph_0$-Hopfsch.
Jedoch!



reguläre Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(p) = \mathbb{Z}/2$, d.h. $F_3 \leq F_2$ mit $[F_2 : F_3] = 2$.

Bem. Mit dem selben Beweis gilt Satz IV.3.2 für jede multiplikative Gruppeninvariante, z.B. $\chi(G)$. Aber $b_n^{(2)}(G)$ für $n \geq 0$ ist feiner!

Sei $P = \langle S \mid R \rangle$ eine endliche Präsentation einer endl. präs. Gruppe G. Setze $g(P) := |S|$, $r(P) := |R|$.

Def. IV.3.3 Die Defizienz einer Gruppe G ist

$$\operatorname{def} G := \max_{P \text{ endl.}} \{ g(P) - r(P) \}.$$

Zu einer endl. Präs. P von G sei X_P der Präsentationskomplex. Durch Ankleben von höherdimensionalen Zellen ergänzen wir X_P zu einem Modell für BG mit $(BG)^2 = X_P$.

Die Inklusion $j: X_P \to BG$ induziert

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C_2(X_P) & \to & C_1(X_P) & \to & C_0(X_P) & \to & 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ C_3(BG) & \to & C_2(BG) & \to & C_1(BG) & \to & C_0(BG) & \to & 0 \end{array}$$

also $\forall i$

$$H_i(X_P) \xrightarrow{\cong} H_i(BG)$$

für $i = 0, 1$ und einen Epi.

$$H_2(X_P) \twoheadrightarrow H_2(BG).$$

Somit

$$g(P) - r(P) = 1 - \chi(X_P) = 1 - b_0(X_P) + b_1(X_P) - b_2(X_P) = b_1(X_P) - b_2(X_P) \leq b_1(G) - b_2(G),$$

also auch $\operatorname{def} G \leq b_1(G) - b_2(G)$.

Bsp. $\operatorname{def}(\mathbb{Z}^n) = \frac{n(3-n)}{2} = n - \binom{n}{2}$.
In der Tat gilt „$\geq$" wegen $\mathbb{Z}^n = \langle x_1, \dots, x_n \mid [x_i, x_j] \rangle$
und „$\leq$", weil $b_1(\mathbb{Z}^n) - b_2(\mathbb{Z}^n) = b_1(\mathbb{T}^n) - b_2(\mathbb{T}^n)$
$= n - \binom{n}{2}$.

Bsp. Sei G eine Ein-Relator-Gruppe, d.h. es gibt $P = \langle x_1, \dots, x_g \mid r \rangle$. Falls G torsionsfrei ist, ist bekannt, dass $X_P \simeq BG$. Daher
$$g - 1 \leq \operatorname{def} G \leq b_1(G) - b_2(G) = -\chi(G) + 1 =$$
$$= -(1 - g + 1) + 1 = g - 1,$$
also $\operatorname{def} G = g - 1$.

Satz IV.3.4 $\operatorname{def} G \leq 1 - b_0^{(2)}(G) + b_2^{(2)}(G) - b_2^{(2)}(G)$

Bew. Genauso! □

Bem. Diese Schranke kann besser oder schlechter sein als $b_1(G) - b_2(G)$ (oder gleich).

Satz IV.3.5 Sei G eine torsionsfreie Ein-Relator-gruppe mit g Erzeugern. Dann gilt $b_1^{(2)}(G) = g - 2$ und $b_2^{(2)}(G) = 0$.

(Schon gesehen: Korrekt für Flächengruppen)

Bew. $BG = X_P$ hat keine 3-Zellen, daher

$$H_2^{(2)}(G) = \ker\left(d_2^{(2)} : C_2^{(2)}(\tilde{X}_p) \to C_1^{(2)}(\tilde{X}_p)\right)$$

und $C_2^{(2)}(\tilde{X}_p) \cong \ell^2 G$. Weil nach Def. $r \neq 1 \in F_g$, ist $d_2^{(2)} \neq 0$. Daher gilt $0 \leq b_2^{(2)}(G) < 1$.
Nach [Jaikin-Zapirain, López Álvarez; 2018] erfüllt G die Atiyah-Vermutung III.4.3 (mit $R=\mathbb{C}$) und daher $b_2^{(2)}(G) = 0$. Somit

$$b_1^{(2)}(G) = -\chi(G) = -(1-g+1) = g-2. \qquad \square$$

V Lücks Approximationssatz

V.1 Funktionalkalküle

Sei H ein separabler Hilbertraum, $T \in B(H)$.

Für eine „Funktion" f wollen wir „$f(T)$" erklären.

Ist $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$, können wir $f(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$ setzen. Ist $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathbb{C}[[z]]$ konvergent in $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \|T\| + \varepsilon\}$ für ein $\varepsilon > 0$, so gilt $\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k T^k \| \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k \|T\|^k$, also ist $\sum_{k=1}^{n} a_k T^k$ eine Cauchy-Folge im Banachraum $B(H)$, sonst existiert $f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$.

→ Erinnerung: eine in U konvergente Potenzreihe definiert eine holomorphe Funktion $f: U \to \mathbb{C}$

→ Für holomorphes f gilt die Cauchy-Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \text{ wobei}$$

die geschlossene Kurve $\gamma: I \to \mathbb{C}$ den Punkt z einfach umläuft

→ Idee: entwickle „operatorwertige" Integration und setze

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - T} \, d\zeta,$$

wobei Γ eine endliche Menge von Kurven ist, sodass jeder Punkt im Spektrum von T einfach umlaufen wird.

Def. V.1.1 Das Spektrum von $T \in B(H)$ ist

$$\sigma(T) = \{ \zeta \in \mathbb{C} : \zeta \cdot id_H - T \text{ ist nicht bijektiv} \}.$$

($\Leftrightarrow$ „nicht invertierbar", II.2.1)

Bem. • $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ ist immer nichtleer und kompakt.

• $r(T) := \sup_{\zeta \in \sigma(T)} |\zeta| = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|$.

Satz V.1.2 (Holomorphes Funktionalkalkül)
Sei $T \in B(H)$ und U eine offene Umgebung von $\sigma(T)$. Dann gibt es einen eindeutigen $\mathbb{C}$-Algebren-Homomorphismus

$$\mathcal{O}(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorph} \} \longrightarrow B(H), \quad f \mapsto f(T),$$

sodass

- $\chi_U(T) = id_H$
- $id_U(T) = T$
- stetig bzgl. gleichmäßiger Konvergenz auf kompakten Teilmengen von U.

„**Bew.**" Existenz: s.o. Eindeutigkeit: Der Homomorphismus ist auf Polynomen schon bestimmt und holomorphe Funktionen sind lokal auf Kompakta gleichmäßige Limites von Polynomen (Potenzreihenentwicklung). □

Bem. · Allgemeiner haben wir nicht nur für $B(H)$, sondern für jede Banachalgebra ein holomorphes Funktionalkalkül.

· Es gilt $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

Für einen selbstadjungierten Operator $T = T^*$ haben wir $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ und $r(T) = \|T\|$.

$\rightsquigarrow$ Können Def.bereich von $\mathcal{O}(U)$ zu $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ ausweiten:

Satz V.1.3 (Stetiges Funktionalkalkül) Sei $T \in B(H)$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine eindeutige isometrische $*$-Einbettung von C^*-Algebren

$$C(\sigma(T), \mathbb{C}) \longrightarrow B(H), \quad f \mapsto f(T),$$

sodass $\chi_{\sigma(T)}(T) = \mathrm{id}_H$ und $\mathrm{id}_{\sigma(T)}(T) = T$. □

Bem. · Allgemeiner für unitale C^*-Algebren statt $B(H)$.

· Wieder gilt $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

· Ist $\lambda \in \sigma(T)$ ein EW mit EV $x \in H$, so ist x ein EV von $f(T)$ zum EW $f(\lambda)$.

· $f(T) = f(T)^* \iff f \in C(\sigma(T), \mathbb{R})$.

· $f(T) \geq 0 \iff f \geq 0$.

Für $T \in B(H)$ selbstadjungiert und $x \in H$ ist also

$$\Phi_{x,T} : C(\sigma(T), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \langle x, f(T)x \rangle$$

ein positives lineares Funktional, d.h. $\Phi_{x,T}(f) \geq 0$ falls $f \in C(\sigma(T), \mathbb{R}_{\geq 0})$.

Satz V.1.4 (Riesz-Markow) Seien X ein kompakter Hausdorffraum und $\Phi: C(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional. Dann gibt es ein eindeutiges reguläres Borel-Maß μ auf X, sodass

$$\Phi(f) = \int f \, d\mu$$

für alle $f \in C(X, \mathbb{C})$. Es gilt $\mu(X) = \|\Phi\|$. □

Def. V.1.5 Das Spektralmaß von $T \in \mathcal{B}(H)$ für $x \in H$ ist das eindeutige $\mu_{x,T}$ mit $\Phi_{x,T} = \int \cdot \, d\mu_{x,T}$.

Es gilt also $\langle x, f(T)x \rangle = \int f \, d\mu_{x,T}$ für $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$.

Beobachtung: Rechte Seite ist für $f \in \mathcal{B}(\sigma(T), \mathbb{C})$ definiert, die beschränkten Borel-messbaren Funktionen $f: \sigma(T) \to \mathbb{C}$.

$\rightsquigarrow$ Erhalte $\langle x, f(T)y \rangle$ für $x, y \in H$ durch Polarisierung

$\rightsquigarrow$ Riesz-Lemma: $\exists!\, z \in H: \langle z, y \rangle = \langle x, f(T)y \rangle$

$\rightsquigarrow$ Definiere $z =: f(T)^* x \rightsquigarrow f(T)^* \rightsquigarrow f(T)$.

Satz V.1.6 (Messbares Funktionalkalkül) Sei $T \in \mathcal{B}(H)$, $T = T^*$. Dann setzt sich das stetige Funktionalkalkül eindeutig fort zu einem stetigen $*$-Homomorphismus

$$\mathcal{B}(\sigma(T), \mathbb{C}) \longrightarrow B(H), \quad T \longmapsto f(T).$$

Bem · Allgemeiner für von-Neumann-Algebren.
· Es gilt $\|f(T)\| \leq \|f\|_\infty$.
· Ist $\lambda \in \sigma(T)$ ein EW von T zum EV $x \in H$ mit $\|x\|=1$ so gilt $\mu_{x,T} = \delta_\lambda$ und umgekehrt.
· In diesem Fall gilt $f(T)x = f(\lambda)x$.
· Es gibt ein bis auf Äquivalenz eindeutiges Maß μ_T auf $\sigma(T)$ mit $\mu_T(A)=0 \iff \mu_{x,T}(A)=0$ für alle $x \in H$.
· Somit $L^\infty(\sigma(T), \mu_T) = \mathcal{B}(\sigma(T), \mathbb{C})/_{=\mu_T\text{-f.ü.}}$ und $L^\infty(\sigma(T), \mu_T) \subseteq B(H)$ ist eine schwach-abg. $*$-Einbettung.

Beobachtung: Für $A \subseteq \sigma(T)$ messbar, ist $\chi_A = \overline{\chi}_A = \chi_A^2$ eine Projektion, damit ist auch $P_T(A) := \chi_A(T) \in B(H)$ eine Projektion und P_T ist ein projektionswertiges Maß (d.h. $P_T(\sigma(T)) = id_H$ und für $x \in H$ ist $A \mapsto \langle x, P_T(A)x \rangle$ ein Borel-Maß, nämlich $\mu_{x,T}$.)
„Integration" beschränkter Borel-Funktionen liefert

$$\int f \, dP_T = f(T)$$

und es gilt für alle $x \in H$, dass

$$\langle x, \int f \, dP_T \, x \rangle = \int f \, d\langle x, P_T x \rangle = \int f \, d\mu_{x,T}.$$

Für $f = id_{\sigma(T)}$ folgt:

Satz V.1.7 (Spektralsatz) Für $T \in B(H)$ s.a. gilt

$$T = \int \lambda \, dP_T(\lambda). \qquad \square$$

Prop. V.1.8 Ist $\lambda \in \sigma(T)$ ein EW, so ist $P_T(\{\lambda\})$ die orth. Projektion auf den Eigenraum von λ. $\square$

V.2 Der Approximationssatz

Def. V.2.1 Eine (abzählbare, diskrete) Gruppe G heißt residuell endlich, falls sie eine (residuell endliche) Kette

$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots$, $G_i \trianglelefteq G$, $[G : G_i] < \infty$, $\bigcap_{i=0}^{\infty} G_i = \{1\}$

besitzt.

Bspe. endl. erzeugt abelsch (sogar nilpotent), F_n, $\pi_1(M^3)$, $G \leq GL(n, K)$ endl. erzeugt mit char K bel.

Gegenbspe. Baumslag-Solitar-Gruppen $B(n,m) = \langle a, b \mid b a^n b^{-2} a^m \rangle$ außer für $n = \pm 1$, $m = \pm 1$, $n = \pm m$, Higmans Gruppe, Tarski-Monster.

Satz V.2.2 (Lück, 1994) Sei G residuell endlich und X ein freier G-CW-Komplex endlichen Typs. Dann gilt für jede Kette $(G_i)_{i=0}^{\infty}$ und jedes $n \geq 0$, dass

$$b_n^{(2)}(G \curvearrowright X) = \lim_{i \to \infty} \frac{b_n(G_i \backslash X)}{[G : G_i]}.$$

Bem. Für einfach zshgdes X ergibt sich der Satz aus der Einleitung.

Kor. V.2.3 Sei G res. endl. und von Typ F_∞. Dann gilt für jede Kette $(G_i)_{i=0}^{\infty}$ und jedes $n \neq 0$, dass

$$b_n^{(2)}(G) = \lim_{i\to\infty} \frac{b_n(G_i)}{[G:G_i]}.$$

Bew. Setze $X = EG$, dann ist auch $G_i \curvearrowright EG$ frei und somit $G_i \backslash EG$ ein Modell für BG_i. □

- $b_n^{(2)}(\tilde{X}) > 0 \rightsquigarrow$ „freies Homologiewachstum entlang Überlagerungen"
- $b_n^{(2)}(G) > 0 \rightsquigarrow$ " " " Untergruppen"

V.3 Der Beweis

z.z. $b_n^{(2)}(G \curvearrowright X) = \lim_{i\to\infty} b_n^{(2)}(G/G_i \curvearrowright G_i\backslash X)$.

(vgl. Bsp. I unter Def. III.3.2)

Erinnerung: $b_n^{(2)}(G \curvearrowright X) = \dim_{R(G)} \ker \Delta_n^{(2)}$ und

$$\begin{array}{ccc} C_n^{(2)}(X) & \xrightarrow{\Delta_n^{(2)}} & C_n^{(2)}(X) \\ \| & & \| \\ \ell^2(G)^k & \xrightarrow{\cdot D} & \ell^2(G)^k, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_n^{(2)}(G_i\backslash X) & \xrightarrow{\Delta_{n,i}^{(2)}} & C_n^{(2)}(G_i\backslash X) \\ \| & & \| \\ \ell^2(G/G_i)^k & \xrightarrow{\cdot D_i} & \ell^2(G/G_i)^k \end{array}$$

für eine $*$-invariante Matrix $D \in \mathrm{Mat}(k,k;\mathbb{Z}G)$ (hier benutzen wir, dass X^{n+1} endlich ist!) und D_i entsteht aus D durch $\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}(G/G_i)$. D.h.

z.z. $\dim_{\mathcal{R}(G)} \ker(\cdot D) = \lim_{i\to\infty} \dim_{\mathcal{R}(G/G_i)} \ker(\cdot D_i)$

Sei nun $\varepsilon := e \oplus \cdots \oplus e \in l^2(G)^k$. Aus Prop. V.1.8 folgt

$$\dim_{\mathcal{R}(G)} \ker(\cdot D) = \mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)} \mathrm{pr}_{\ker(\cdot D)} =$$

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)} P_{\cdot D}(\{0\}) = \langle \varepsilon, P_{\cdot D}(\{0\})\varepsilon \rangle = \mu_{\varepsilon, \cdot D}(\{0\}).$$

Genauso

$$\dim_{\mathcal{R}(G/G_i)} \ker(\cdot D_i) = \mu_{\varepsilon_i, \cdot D_i}(\{0\})$$

für $\varepsilon_i = G_i \oplus \cdots \oplus G_i \in l^2(G/G_i)^k$. Setzten wir

$\mu_{\varepsilon, \cdot D} =: \mu$ und $\mu_{\varepsilon_i, \cdot D_i} =: \mu_i$ bleibt also

z.z. $\mu(\{0\}) = \lim_{i\to\infty} \mu_i(\{0\})$.

Es gilt $\|\cdot D\| \le k^2 \cdot \|D\|_1 := d$ und auch $\|\cdot D_i\| \le d$,

also $\mathrm{supp}\,\mu, \mathrm{supp}\,\mu_i \subseteq [0, d]$.

Prop. V.3.1 Für alle $f \in C([0,d], \mathbb{R})$ gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{i\to\infty} \int f \, d\mu_i \quad \text{(schwache Konvergenz)}.$$

Beweis. Sei zunächst $f \in \mathbb{R}[x]$. Dann gilt

$$\int f \, d\mu = \langle \varepsilon, f(\cdot D)\varepsilon \rangle = \langle \varepsilon, \cdot \underbrace{f(D)}_{\in \mathrm{Mat}(k,k;\mathbb{R}G)} \varepsilon \rangle =: (*) \text{ und}$$

$$\int f \, d\mu_i = \langle \varepsilon_i, \cdot \underbrace{f(D_i)}_{\in \mathrm{Mat}(k,k;\mathbb{R}(G/G_i))} \varepsilon_i \rangle =: (**)$$

Da $i \gg 0$, sodass G_i keine $g \in G$ aus den Trägern

der Diagonaleinträge von $f(D)$ enthält, gilt (*)=(**).
Im Allg. nutze Stone-Weierstraß. □

Mit dem „Portmanteau-Satz" folgt

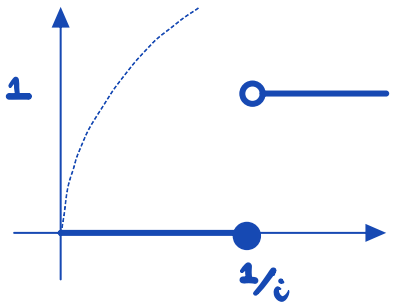
$$\mu(\{0\}) \geq \limsup_{i\to\infty} \mu_i(\{0\}).$$

Noch z.z.: $\mu(\{0\}) \leq \liminf_{i\to\infty} \mu_i(\{0\})$

Beachte: Dies folgt nicht aus $\mu_i \to \mu$ schwach!
Bsp.: $\delta_{1/i} \to \delta_0$ schwach!

Z.B. wäre $\mu_i = \delta_{1/i}$, falls $D_i = \begin{pmatrix} 1/i\, G_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/i\, G_i \end{pmatrix}$.

ABER: D_i hat Einträge in $\underline{\mathbb{Z}}[G/G_i]$!
Daraus erhalten wir eine uniforme Schranke an die spektralen Verteilungsfunktionen $\lambda \mapsto \mu_i((0,\lambda))$:



Prop. V.3.2 Für alle $i \geq 0$ und alle $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$\mu_i((0,\lambda)) \leq \frac{k \log d}{|\log \lambda|}.$$

Bew. Zu gegebenem i sei $r := \ell [G : G_i]$. Betrachte D_i als symmetrische $(r \times r)$-Matrix mit Koeff. in $\mathbb{Z}$. Seien $\lambda_1 < \cdots < \lambda_s$ die pos. EWe von D_i mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_s$. Dann gilt

$$\mu_i(\{\lambda_j\}) = \dim_{R(G/G_i)} P_{\cdot D_i}(\{\lambda_j\}) = \dim_{R(G/G_i)} \text{Bild } P_{D_i}(\{\lambda_j\})$$

$$= \frac{m_j}{[G : G_i]}.$$

Sei nun $\lambda \in (0,1)$ gegeben und sei λ_ℓ der größte Eigenwert $\leq \lambda$. Dann gilt

$$\mu_i((0,\lambda)) = \mu_i(\{\lambda_1\}) + \cdots + \mu_i(\{\lambda_\ell\}) =$$

$$= \frac{m_1 + \cdots + m_\ell}{[G : G_i]}.$$

Setze $R := \text{Rang } D_i = m_1 + \cdots + m_s$ und $p(x) = \frac{\text{CharPoly}_{D_i}(x)}{x^{r-R}} \in \mathbb{Z}[x]$. Dann gilt

$$\lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_s^{m_s} = p(0) \geq 1.$$

Somit

$$1 \leq \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_\ell^{m_\ell} \cdot \lambda_{\ell+1}^{m_{\ell+1}} \cdots \lambda_s^{m_s} \leq \lambda^{m_1 + \cdots + m_\ell} d^r \quad | \log$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq (m_1 + \cdots + m_\ell) \log \lambda + \ell \cdot [G : G_i] \cdot \log d$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_1 + \cdots + m_\ell}{[G : G_i]} \leq \frac{\ell \cdot \log d}{-\log \lambda} = \frac{\ell \cdot \log d}{|\log \lambda|}. \qquad \square$$

Aus $\mu_i(\{0\}) = \mu_i([0,\lambda)) - \mu_i((0,\lambda))$ für $\lambda \in (0,1)$ folgt wegen Portmanteau ($\liminf \mu_i(U) \geq \mu(U)$ für U offen)

$$\liminf_{i\to\infty} \mu_i(\{0\}) \geq \mu([0,\lambda)) - \frac{k \cdot \log d}{|\log \lambda|},$$

also auch

$$\liminf_{i\to\infty} \mu_i(\{0\}) \geq \lim_{\lambda\to 0^+} \left(\mu([0,\lambda)) - \frac{k \cdot \log d}{|\log \lambda|} \right)$$

$$= \inf_{\lambda > 0} \mu([0,\lambda)) \geq \mu(\{0\}). \qquad \square$$