Halbeinfache Lie-Algebren

Holger Kammeyer (holger.kammeyer@hhu.de)

Inhalte

I Grundlagen
1. Lie-Algebren
2. Beispiele
3. Derivationen
4. Ideale
5. Automorphismen
6. Auflösbare Lie-Algebren
7. Nilpotente Lie-Algebren

II Strukturtheorie halbeinfacher Lie-Algebren
1. Der Satz von Lie
2. Jordan-Chevalley-Zerlegung
3. Killing-Form und Cartan-Kriterien
4. Zerlegung in einfache Ideale
5. Abstrakte Jordan-Zerlegung
6. Vollständige Reduzibilität von Darstellungen
7. Erhalt der Jordan-Zerlegung
8. Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2 K$
9. Wurzelraumzerlegung

III Wurzelsysteme

1. Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung
2. Geometrie des Wurzelsystems
3. Abstrakte Wurzelsysteme
4. Klasifizierung der Wurzelsysteme
5. Automorphismen von Wurzelsystemen
6. Konjugations-, Isomorphie- und Existenzsatz
7. Automorphismen einfacher Lie-Algebren

Übungsblätter

Lösungen

Hauptquelle: James E. Humphreys: „Introduction to Lie algebras and representation theory", Springer GTM 9

Lizenz: CC BY-SA 3.0 DE
https://creativecommons.org/licences/by-sa/3.0/de/

I Grundlagen

I.1 Lie-Algebren

Sei K ein Körper.

Def. I.1.1 Eine **Lie-Algebra** über K ist ein K-Vektorraum $\mathfrak{g}$ mit einer Abbildung $[\cdot,\cdot]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ (Lie-Klammer oder Kommutator genannt), sd. gilt:

(L1) $[\cdot,\cdot]$ ist bilinear.

(L2) Für alle $x\in\mathfrak{g}$ ist $[x,x]=0$.

(L3) Für alle $x,y,z\in\mathfrak{g}$ gilt die **Jacobi-Identität**:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Bemerkungen.

- Aus (L1) und (L2) folgt $0=[x+y,x+y]=[x,y]+[y,x]$, d.h. (L2)': $[x,y]=-[y,x]$.
- Ist $2\neq 0$ in K, folgt aus (ii)' umgekehrt $[x,x]=-[x,x] \Leftrightarrow 2\cdot[x,x]=0 \Leftrightarrow [x,x]=0$, d.h. (ii)
- Begriff der **Unter-Lie-Algebra** (kurz **Unteralgebra**) klar.
- Wir werden (fast) immer annehmen, dass $\dim_K\mathfrak{g}<\infty$.
- **Homomorphismen von Lie-Algebren** sind K-lineare Abb.en $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ mit $\phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)]$.
- ϕ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow \ker\phi=\{0\}$ und $\operatorname{im}\phi=\mathfrak{g}'$:
  Zu $x',y'\in\mathfrak{g}'$ wähle $x,y\in\mathfrak{g}$ mit $\phi(x)=x'$, $\phi(y)=y'$.
  Dann gilt $\phi^{-1}([x',y']) = \phi^{-1}([\phi(x),\phi(y)])$
  $= \phi^{-1}(\phi([x,y])) = [x,y] = [\phi^{-1}(x'),\phi^{-1}(y')]$.

I.2 Beispiele

(i) Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K V = n < \infty$.
Dann wird $\mathfrak{g} = \mathrm{End}(V)$ durch $[x,y] = x \cdot y - y \cdot x$ (Komposition) zu einer Lie-Algebra: (L1) und (L2) sind klar. (L3):

$[x,[y,z]] = x \cdot [y,z] - [y,z] \cdot x = x(yz - zy) - (yz - zy)x$

$= xyz - xzy - yzx + zyx$, zyklisch permutieren und aufsummieren ergibt null. Wir schreiben für diese Lie-Algebra fortan $\mathfrak{gl}(V)$ (zur Unterscheidung von der assoziativen Algebra $\mathrm{End}(V)$).

Basiswahl in V liefert $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}_n(K)$ mit $\mathfrak{gl}_n(K) = \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ und $[X,Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$ (Matrixmultiplikation).

Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(V)$ oder $\mathfrak{gl}_n(K)$ heißen **lineare Lie-Algebren**.

(ii) Folgende lineare Lie-Algebren heißen **klassische Lie-Algebren**:

Typ A_n: Wir nennen

$$\mathfrak{sl}_{n+1}(K) = \{ x \in \mathfrak{gl}_{n+1}(K) : \mathrm{Spur}\, x = 0 \}$$

die **spezielle lineare Algebra**. Sie ist eine Unteralg. von $\mathfrak{gl}_{n+1}(K)$, weil $\mathrm{Spur}([x,y]) = \mathrm{Spur}(xy - yx) =$

$= \mathrm{Spur}(xy) - \mathrm{Spur}(yx) = 0$. Es gilt

$$\dim_K \mathfrak{sl}_{n+1}(K) = \dim_K \ker(\mathrm{Spur} : \mathfrak{gl}_{n+1}(K) \to K) =$$
$$= (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n.$$

Typ D_n: Wir nennen

$$\mathfrak{so}_{2n}(K) = \{ x \in \mathfrak{gl}_{2n}(K) : x^T m + m x = 0 \}$$

mit $m = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ und $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ die (gerade) orthogonale Algebra. Schreiben wir $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, gilt $x^T m = \begin{pmatrix} c^T & a^T \\ d^T & b^T \end{pmatrix}$ und $m x = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$, d.h. $x \in \mathfrak{so}_{2n}(K)$ $\Leftrightarrow$ $b^T = -b$, $c^T = -c$, $a^T = -d$, $(d^T = -a)$.

Nachweis Unteralgebra: HA 1.1. Es gilt

$\dim_K \mathfrak{so}_{2n}(K) = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = 2n^2 - n$, falls $2 \neq 0$ in K.

Typ C_n: Wir nennen

$$\mathfrak{sp}_{2n}(K) = \{ x \in \mathfrak{gl}_{2n}(K) : x^T s + s x = 0 \}$$

mit $s = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ die symplektische Algebra.

Für $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt $x \in \mathfrak{sp}_{2n}(K)$ genau dann, wenn $b^T = b$, $c^T = c$, $a^T = -d$, $(d^T = -a)$. Es gilt

$\dim_K \mathfrak{sp}_{2n}(K) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = 2n^2 + n$.

Typ B_n: Wir nennen

$$\mathfrak{so}_{2n+1}(K) = \{ x \in \mathfrak{gl}_{2n+1}(K) : x^T l + l x = 0 \}$$

mit $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$ die (ungerade) orthogonale Algebra.

Es gilt $x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}_{2n+1}(K)$ genau dann, wenn

$a = 0$, $d = -c^T$, $g = -b^T$, $h^T = -h$, $f^T = -f$, $e^T = -i$.

Es folgt

$$\dim_K \mathfrak{so}_{2n+1}(K) = 2\cdot n + 2\cdot \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = 2n^2 + n, \text{ falls } 2 \neq 0 \text{ in } K.$$

(d.h. $\dim_K \mathfrak{so}_{2n+1}(K) = \dim_K \mathfrak{sp}_{2n}(K)$.)

Beobachtung. Aus der Relation $a^T = -a$ bzw. $e^T = -i$ folgt $\mathfrak{so}_{2n+1}(K) \leq \mathfrak{sl}_{2n+1}(K)$, $\mathfrak{sp}_{2n}(K) \leq \mathfrak{sl}_{2n}(K)$, $\mathfrak{so}_{2n}(K) \leq \mathfrak{sl}_{2n}(K)$.

(iii) Wir nennen

$$t_n(K) = \{ x \in \mathfrak{gl}_n(K) : x_{ij} = 0 \text{ für } i > j \}$$

die Algebra der (oberen) Dreiecksmatrizen,

$$n_n(K) = \{ x \in \mathfrak{gl}_n(K) : x_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j \}$$

die Algebra der strikten (oberen) Dreiecksmatrizen, und

$$d_n(K) = \{ x \in \mathfrak{gl}_n(K) : x_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j \}$$

die Algebra der Diagonalmatrizen. Offensichtlich ist $d_n(K)$ abelsch, d.h. $[x,y] = 0$ für alle $x, y \in d_n(K)$.

(iv) (Nur für Eingeweihte) Sei G eine reelle bzw. komplexe Lie-Gruppe. Dann bilden die linksinvarianten Vektorfelder auf G mit Kommutatorklammer

eine Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Insbesondere gilt $\mathrm{Lie}(SL_n\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$, $\mathrm{Lie}(SO_n\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}_n\mathbb{C}$ und $\mathrm{Lie}(Sp_{2n}\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$.

I.3 Derivationen

Def. I.3.1 Eine K-Algebra ist ein K-Vektorraum $\mathcal{A}$ mit einer bilinearen Abb. $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Bsp. · $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ist eine K-Algebra mit Matrixmult.
· Die Hamilton-Quaternionen $\mathbb{H}$ sind eine $\mathbb{R}$-Alg.
· Jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Schreiben dann $[\cdot,\cdot]$ statt $\cdot$.

Def. I.3.2 Sei $\mathcal{A}$ eine K-Algebra. Eine Derivation auf $\mathcal{A}$ ist eine K-lineare Abb. $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, die die Leibnizregel $\delta(a\cdot b) = \delta(a)\cdot b + a\cdot\delta(b)$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$ erfüllt.

Prop. I.3.3 Die Menge $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ der Derivationen auf $\mathcal{A}$ ist eine Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

Beweis. Offensichtlich ist $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ ein Untervektorraum. Seien $\delta, \delta' \in \mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ und $a, b \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$[\delta,\delta'](ab) = (\delta\delta' - \delta'\delta)(ab) = \delta(\delta'(a)b + a\delta'(b)) - \delta'(\delta(a)b + a\delta(b)) = \delta\delta'(a)b + \delta'(a)\delta(b) + \delta(a)\delta'(b) + a\delta\delta'(b) - \delta'\delta(a)b - \delta(a)\delta'(b) - \delta'(a)\delta(b) - a\delta'\delta(b) =$$

$= (\delta\delta' - \delta'\delta)(a)\cdot b + a\cdot(\delta\delta' - \delta'\delta)(b) =$

$= [\delta, \delta'](a)\cdot b + a\cdot[\delta,\delta'](b),$

also $[\delta, \delta'] \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{a}$. □

Beachte: Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, so ist also auch $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra

Prop. I.3.4 Für $x \in \mathfrak{g}$ sei $\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ definiert durch $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$ für $y \in \mathfrak{g}$. Dann ist $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$.

Beweis. Es gilt $\mathrm{ad}_x([y,z]) = [x,[y,z]] =$

$\overset{(L3)}{=} -[y,[z,x]] - [z,[x,y]] =$

$\overset{(L2)'}{=} [y,[x,z]] + [[x,y],z] =$

$= [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)].$ □

Prop. I.3.5 $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ ist ein Homomorph.

Beweis. Für $x, y, z \in \mathfrak{g}$ gilt

$(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x)(z) = [x,[y,z]]$

$-[y,[x,z]] \overset{(L3)}{=} -[z,[x,y]] - [y,[z,x]]$

$-[y,[x,z]] \overset{(L2)'}{=} [[x,y],z] = \mathrm{ad}_{[x,y]}(z).$ □

Def. I.3.5 $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ heißt die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$. Derivationen im Bild von ad heißen innere Derivationen.

Manchmal ist es hilfreich $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ für ad zu schreiben (für eine Diag.matrix x ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{d}_n(K)}(x) = 0$, aber i.A. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_n(K)}(x) \neq 0$.)

I.4 Ideale

Def. I.4.1 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über K.
Ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist ein K-Untervektorraum $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$, sodass für alle $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{a}$ gilt $[x, y] \in \mathfrak{a}$.

Notation: $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

Beispiele. • $\{0\} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ (trivial).
• Das Zentrum $Z(\mathfrak{g}) = \{z \in \mathfrak{g} : [x, z] = 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{g}\}$.
• Die derivierte Algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (definiert als $\langle [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \rangle_K \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ...). Beachte:
  ◦ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0 \iff \mathfrak{g}$ abelsch
  ◦ $[\mathfrak{sl}_n(K), \mathfrak{sl}_n(K)] = \mathfrak{sl}_n(K)$ ($n \neq 2$, falls $2 = 0$ in K)

Ideale kann man addieren und „multiplizieren"

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{x + y : x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\},$$

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \left\{ \sum [x_i, y_i] : x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in \mathfrak{b} \right\}$$

und erhält wieder Ideale.

Def. I.4.2 $\mathfrak{g}$ heißt einfach, falls $\{0\}$ und $\mathfrak{g}$ die einzigen Ideale von $\mathfrak{g}$ sind und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$.

Bsp/Lemma: $\mathfrak{g}$ einfach $\Rightarrow Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Satz I.4.3 $\mathfrak{sl}_2(K)$ mit $\operatorname{char} K \neq 2$ ist einfach.

Beweis. $\mathfrak{sl}_2(K) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{y}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{h} \right\rangle_K$. Dann gilt $[h,x] = 2x$, $[h,y] = -2y$, $[x,y] = h$, d.h. x, y, h ist eine Basis von $\mathfrak{g}$ aus EVen mit EWen $2, -2, 0$ für den Endomorphismus $\operatorname{ad}(h): \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Sei nun $0 \neq \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ und $0 \neq z = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot h \in \mathfrak{a}$.

Dann gilt $\operatorname{ad}(x)(\operatorname{ad}(x)(z)) = \operatorname{ad}(x)(b \cdot h + 2c \cdot x) = -2bx \in \mathfrak{a}$ und $\operatorname{ad}^2(y)(z) = -2ay \in \mathfrak{a}$.

Falls $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ folgt $x \in \mathfrak{a}$ oder $y \in \mathfrak{a}$ ($\operatorname{char} K \neq 2$!) und damit $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$. Falls $a = b = 0$, folgt $h \in \mathfrak{a}$ und damit ebenfalls $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$. □

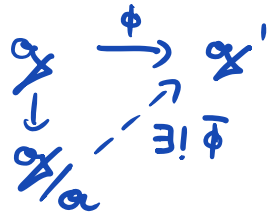
Def. I.4.4 Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Dann definieren wir die Faktoralgebra oder Quotientenalgebra von $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{a}$ als den Faktorraum $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ mit Klammer $[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] = [x,y] + \mathfrak{a}$.

Dies ist wohldefiniert, denn für $x - x', y - y' \in \mathfrak{a}$ folgt

$$[x' + \mathfrak{a}, y' + \mathfrak{a}] = [x', y'] + \mathfrak{a} =$$
$$= [x', y'] + [x - x', y'] - [y - y', x] + \mathfrak{a} =$$
$$= [x', y'] + [x, y'] - [x', y'] - [y, x] + [y', x] + \mathfrak{a}$$
$$= [x, y] + \mathfrak{a}.$$

Beachte: Für $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ist $\ker \phi \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Umgekehrt: Ist $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, so gilt $\mathfrak{a} = \ker(\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a})$.

Universelle Eigenschaft: Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Dann gilt für $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{a} \subseteq \ker \phi$:



□

Prop. I.4.5 a) Für $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ gilt $\mathfrak{g}/\ker\phi \xrightarrow{\cong}_{\bar{\phi}} \text{Bild}\,\phi$.

b) Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$. Dann gilt

$$\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{b}.$$

c) Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Dann gilt $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. □

Def. I.4.6 Eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist ein Homomorphismus $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Wichtigste Beispiel: $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{Def}} \mathfrak{gl}$). Beachte $\ker \mathrm{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Daher: $\mathfrak{g}$ einfach $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ linear.

(Tatsächlich: $\dim_K \mathfrak{g} < \infty \Rightarrow \mathfrak{g}$ linear [Ado-Iwasawa])

Sei $A \subseteq \mathfrak{g}$. Wir definieren noch den Normalisator

$$N_{\mathfrak{g}}(A) = \{ x \in \mathfrak{g} : [x, A] \subseteq A \} \subseteq \mathfrak{g}$$

und den Zentralisator

$$Z_{\mathfrak{g}}(A) = \{ x \in \mathfrak{g} : [x, A] = 0 \} \subseteq \mathfrak{g}.$$

Beide sind Unteralgebren nach (L3).

I.5 Automorphismen

Sei $\mathrm{char}\, K = 0$. Ist $x \in \mathfrak{g}$ mit $\mathrm{ad}\, x$ nilpotent (d.h. $(\mathrm{ad}\, x)^k = 0$ für ein $k > 0$), definieren wir

$$\exp(\mathrm{ad}\, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{ad}\, x)^j}{j!}.$$

Prop. I.5.1 Es gilt $\exp(\mathrm{ad}\, x) \in \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$.

Bew. Die Gleichung

$$\exp(\mathrm{ad}\, x)([y,z]) = [\exp(\mathrm{ad}\, x)(y), \exp(\mathrm{ad}\, x)(z)]$$

folgt aus Prop. I.3.4 und der Leibnizregel. Schreiben wir $\exp(\mathrm{ad}\, x) = 1 + \eta$, so ist

$$\text{"}\frac{1}{1+\eta}\text{"} = 1 - \eta + \eta^2 - \eta^3 \pm \cdots$$

ein Inverses zu $\exp(\mathrm{ad}\, x)$. □

Def. I.5.2 $\mathrm{Int}\, \mathfrak{g} = \langle \exp(\mathrm{ad}\, x) : \mathrm{ad}(x) \text{ nilpotent} \rangle_{\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}}$.

"Innere Automorphismen".

Es gilt $\mathrm{Int}\, \mathfrak{g} \trianglelefteq \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$ (Normalteiler), denn für $\phi \in \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$ ist $\phi(\mathrm{ad}\, x)\phi^{-1} = \mathrm{ad}\, \phi(x)$, also

$$\phi \exp(\mathrm{ad}\, x)\phi^{-1} = \exp(\mathrm{ad}\, \phi(x)) \in \mathrm{Int}\, \mathfrak{g}.$$

Beispiel: Ist $K = \bar{K}$, $\mathrm{char}\, K = 0$, gilt

- $\mathrm{Int}\, \mathfrak{sl}_2(K) = \mathrm{Aut}\, \mathfrak{sl}_2(K) \cong \mathrm{PSL}_2(K)$
- $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{sl}_3(K) = \mathrm{PSL}_3(K) \rtimes \mathbb{Z}/2$.

(Noch) ohne Beweis.

I.6 Auflösbare Lie-Algebren

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über K.

Def. I.6.1. Die **derivierte Reihe** von $\mathfrak{g}$ ist definiert durch $\mathcal{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $\mathcal{D}^{n+1}\mathfrak{g} = [\mathcal{D}^n\mathfrak{g}, \mathcal{D}^n\mathfrak{g}]$ und $\mathfrak{g}$ heißt **auflösbar**, falls $\mathcal{D}^N\mathfrak{g} = 0$ für ein $N \geq 0$.

Beispiel: $\mathfrak{g}$ abelsch, Gegenbeispiel: $\mathfrak{g}$ einfach, z.B. $\mathfrak{sl}_2(K)$ für $\operatorname{char} K \neq 2$.

Prop. I.6.2 Die Lie-Algebra $\mathfrak{t}_n(K)$ ist auflösbar.

Beweis Es gilt $\mathcal{D}^1\mathfrak{t}_n(K) = [\mathfrak{t}_n(K), \mathfrak{t}_n(K)] \overset{HA}{=} \mathfrak{n}_n(K)$.

Sei $I_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{ij}$. Dann gilt

$$[I_{ij}, I_{kl}] = \delta_{jk} I_{il} - \delta_{il} I_{kj}.$$

Sei also $i < j$, $k < l$ und wegen (L2) o.B.d.A. $i \neq l$.

Dann gilt

$$[I_{ij}, I_{kl}] = \begin{cases} I_{il} & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $l - i = (l-k) + (k-i) \overset{j=k}{=} (l-k) + (j-i)$.

Es folgt $\mathcal{D}^r\mathfrak{t}_n(K) = \langle I_{ij} : (j-i) \geq 2^{r-1} \rangle_K$

und somit $\mathcal{D}^N\mathfrak{t}_n(K) = 0$ für $N \gg 0$. ∎

Prop. I.6.3 Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so auch jede Unteralg. $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ und jeder Quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

Sind $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar, so auch $\mathfrak{g}$.

Beweis. Es gilt $\mathcal{D}^n \mathfrak{h} \leq \mathcal{D}^n \mathfrak{g}$ (klar) und

$\underbrace{(\mathcal{D}^n \mathfrak{g})/\mathfrak{a}}_{:= \phi(\mathcal{D}^n \mathfrak{g}) \text{ für } \phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}} \equiv \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ (Induktion nach n, HA!)

□

Prop. I.6.4 Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ auflösbar, so auch $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \overset{\text{I.4.5.c)}}{\equiv} \mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ auflösbar lt. I.6.3, also $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ auflösbar ebenfalls lt. I.6.3. □

Def. I.6.5 Das auflösbare Radikal von $\mathfrak{g}$ ist das eindeutige maximale auflösbare Ideal $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

Eindeutig: Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ maximal auflösbar. Dann ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ auflösbar lt. I.6.4, also $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}+\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$ und symmetrisch $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. □

Def. I.6.6 Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt halbeinfach, falls $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} = \{0\}$.

Bsp. · Ist $\mathfrak{g}$ einfach, so auch halbeinfach, denn wegen $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{g}$ nicht auflösbar also $\mathfrak{g} \trianglerighteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

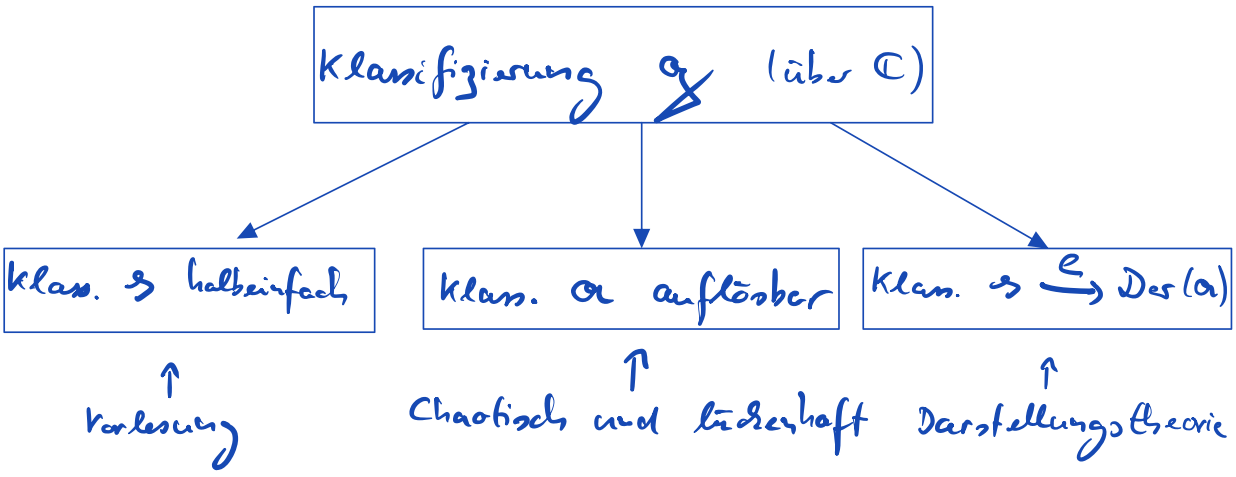
· $\mathfrak{g} = \{0\}$ ist halbeinfach, aber nicht einfach.

· Ist $\mathfrak{g}$ beliebig, so ist $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ halbeinfach. (HA!)

Mit $\mathfrak{a} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ haben wir eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow \underset{\text{auflösbar}}{\mathfrak{a}} \xrightarrow{i} \mathfrak{g} \xrightarrow{p} \underset{\text{halbeinfach}}{\mathfrak{s}} \longrightarrow 0 \,,$$

d.h. an jeder Stelle gilt Kern (nachfolgender Pfeil) = = Bild (vorheriger Pfeil). Mit anderen Worten: Jede Lie-Algebra ist eine Erweiterung einer halbeinfachen durch eine auflösbare Lie-Algebra. Ist $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, zerfällt die Erweiterung, d.h. es gibt einen Homomorphismus $s: \mathfrak{s} \to \mathfrak{g}$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}}$. In diesem Fall gilt $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \rtimes_\varrho \mathfrak{s}$ mit $\varrho: \mathfrak{s} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$, $x \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(s(x))|_{\mathfrak{a}}$, wobei das semidirekte Produkt $\mathfrak{a} \rtimes_\varrho \mathfrak{s}$ für Lie-Algebren $\mathfrak{a}, \mathfrak{s}$ und $\varrho: \mathfrak{s} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ i.A. definiert ist als der Vektorraum $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ mit $[a_1 \oplus s_1, a_2 \oplus s_2] = (\varrho(s_1)(a_2) - \varrho(s_2)(a_1) + [a_1, a_2]) \oplus [s_1, s_2]$.



I.7 Nilpotente Lie-Algebren

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über K.

Def. I.7.1 Die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{g}$ ist definiert durch $\mathcal{C}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $\mathcal{C}^n\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-1}\mathfrak{g}]$ und $\mathfrak{g}$ heißt nilpotent, falls $\mathcal{C}^N\mathfrak{g} = \{0\}$ für ein $N \geq 0$.

Offensichtlich: nilpotent $\Rightarrow$ auflösbar.

Beispiel. · $\mathfrak{n}_n(K)$ ist nilpotent, denn $\mathcal{C}^k\mathfrak{n}_n(K) = \langle I_{ij} : j-i \geq k+1 \rangle_K$.

· $\mathfrak{t}_n(K)$ ist auflösbar, aber nicht nilpotent, denn $\mathcal{D}^k(\mathfrak{t}_n(K)) = \mathfrak{n}_n(K)$ für $k \geq 1$.

Prop. I.7.2 (i) Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so auch $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

(ii) Ist $\mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ nilpotent, so auch $\mathfrak{g}$.

(iii) Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent und $\mathfrak{g} \neq 0$, folgt $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Bew. (i) Vie I.6.3. (ii) Gilt $\mathcal{C}^N(\mathfrak{g}) \leq \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, folgt $\mathcal{C}^{N+1}(\mathfrak{g}) \leq [\mathfrak{g}, \mathcal{Z}(\mathfrak{g})] = \{0\}$. (iii) Ist N minimal mit $\mathcal{C}^N(\mathfrak{g}) = \{0\}$, folgt $\{0\} \neq \mathcal{C}^{N-1}(\mathfrak{g}) \leq \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. □

Beachte: $\mathfrak{g}$ nilpotent $\Leftrightarrow$ Es gibt ein $N \geq 0$, sodass $\mathrm{ad}(x_1) \circ \mathrm{ad}(x_2) \circ \cdots \circ \mathrm{ad}(x_N)(y) = 0$ für alle $x_1, \ldots, x_N, y \in \mathfrak{g}$.

Insbes. $\mathrm{ad}(x)^N = 0$, d.h. alle $x \in \mathfrak{g}$ sind ad-nilpotent.

Satz I.7.3 (Engel) Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über K, sodass jedes $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent ist. Dann ist $\mathfrak{g}$ nilpotent.

Der Beweis benötigt etwas Vorbereitung.

Lemma I.7.4 Ist $x \in \mathfrak{gl}(V)$ nilpotent, so auch ad-nilpotent.

Bew. Betrachte $\lambda_x, \varrho_x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$
$\lambda_x(y) = xy$, $\varrho_x(y) = yx$. Dann kommutieren λ_x und ϱ_x und sind nilpotent, also ist auch $\operatorname{ad}(x) = \lambda_x - \varrho_x$ nilpotent. □

Warnung. $\mathrm{id}_H \in \mathfrak{gl}(V)$ ist ad-nilpotent, aber nicht nilpotent.

Satz I.7.5 Sei $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(V)$ mit $0 < \dim_K V < \infty$. Ist jedes $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent, so gibt es ein $0 \neq v \in V$ mit $\mathfrak{g}.v = \{0\}$.

Bew. Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$. Klar für $\mathfrak{g} = \{0\}$. Sei nun $\mathfrak{h} \lneq \mathfrak{g}$ maximal. Laut I.7.4 wirkt $\mathfrak{h}$ durch ad nilpotent auf $\mathfrak{g}$, also auch auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Nach I.V. gibt es $x + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $x \notin \mathfrak{h}$, mit $(\operatorname{ad}\mathfrak{h}).x \in \mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{h} \lneq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, also $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Dann aber $\dim_K \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$, denn sonst widerlegt $p^{-1}(\mathfrak{k})$ für $\mathfrak{k} \leq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ eindim. u. $\mathfrak{g} \supsetneq p^{-1}(\mathfrak{k})$ die Maximalität von $\mathfrak{h}$.

Wir haben also $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \oplus Kx$. Nach I.V. ist $W = \{v \in V : \mathfrak{h}.v = \{0\}\} \neq \{0\}$. Es gilt $\mathfrak{g}.W \subseteq W$, denn für $y \in \mathfrak{h}$, $z \in \mathfrak{g}$ und $w \in W$ gilt

$$yz.w = (zy + \underbrace{[y,z]}_{\in \mathfrak{h}}).w = 0.$$

Weil $x|_W$ nilpotent, gibt es $0 \neq v \in W$ mit $x.v = 0$, also auch $\mathfrak{g}.v = \{0\}$. □

Bew. von Satz I.7.3. Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$. Für $\mathfrak{g} = \{0\}$ trivial. Für $\mathfrak{g} \neq 0$ erfüllt $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ die Voraussetzungen von I.7.5, also gibt es ein $0 \neq x \in \mathfrak{g}$ mit $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})(x) = \{0\}$, d.h. $x \in Z(\mathfrak{g})$. Jedes $x + Z(\mathfrak{g}) \in \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ ist ad-nilpotent und $\dim \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) < \dim \mathfrak{g}$, also ist $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ nilpotent nach I.V. Somit ist $\mathfrak{g}$ nilpotent nach I.7.2.(ii). □

Def. I.7.6 Sei V ein K-Vektorraum. Eine vollständige Fahne in V ist eine Folge von Unterräumen

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$$

mit $\dim V_i = i$.

Satz I.7.7 Sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ mit $0 < \dim_K V < \infty$. Ist jedes $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent, so gibt es eine vollständige Fahne (V_i) in V, sd. $x.V_i \subseteq V_{i-1}$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $i = 1, \ldots, n$. Äquivalent: es gibt eine Basis von V bzgl. der $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{n}_n(K)$.

Bew. Nach I.7.5 gibt es $V_1 \subseteq V$ 1-dim. mit $\mathfrak{g}.V_1 \subseteq \{0\} = V_0$. Weil $\mathfrak{g}$ nilpotent auf V/V_1 wirkt, gibt es nach I.V. eine vollst. Fahne (W_i) in V/V_1 mit $\mathfrak{g}.W_i \subseteq W_{i-1}$. Setze $V_{i+1} = p^{-1}(W_i)$ für $V \xrightarrow{p} V/V_1$ und $i = 1, \dots, n-1$. Dann gilt $\mathfrak{g}.V_i = \mathfrak{g}.p^{-1}(W_{i-1})$ $= p^{-1}(\mathfrak{g}.W_{i-1}) \subseteq p^{-1}(W_{i-2}) = V_{i-1}$ für $i = 2, \dots, n+1$. □

Lemma I.7.8 Sei $\mathfrak{g}$ nilpotent, $0 \neq \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Dann gilt $\mathfrak{a} \cap Z(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Bew. Nach I.7.5 gibt es $0 \neq x \in \mathfrak{a}$ mit $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}).x = \{0\}$ oder äquivalent $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) = 0$, d.h. $x \in \mathfrak{a} \cap Z(\mathfrak{g})$. □

II Strukturtheorie halbeinfacher Lie-Algebren

Fortan sei $\operatorname{char} K = 0$ (d.h. $\mathbb{Q} \subseteq K$) und $K = \overline{K}$ (z.B. $K = \overline{\mathbb{Q}}$ oder $K = \mathbb{C}$).

II.1 Der Satz von Lie

Satz II.1.1 Sei $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(V)$ auflösbar mit $0 < \dim_K V < \infty$. Dann gibt es einen gemeinsamen Eigenvektor $v \in V$ für alle $x \in \mathfrak{g}$.

Bew. Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$. Anfang $\mathfrak{g} = \{0\}$ klar. Weil $\mathfrak{g}$ auflösbar, ist $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \{0\}$. Wähle einen Unterraum $h \leq \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ der Kodimension eins. Dann ist das Urbild $\mathfrak{a}$ von h in $\mathfrak{g}$ ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ der Kodimension eins. Nach I.V. gibt es ein $0 \neq v \in V$, das EV für alle $x \in \mathfrak{a}$ ist. Die EWe bilden eine Linearform $\lambda \in \mathfrak{a}^* = \operatorname{Hom}_K(\mathfrak{a}, K)$, d.h. $x.v = \lambda(x) \cdot v$ für alle $x \in \mathfrak{a}$. Sei

$$W = \{w \in V : x.w = \lambda(x) \cdot w \text{ für alle } x \in \mathfrak{a}\} \neq \{0\}.$$

Beh.: $\mathfrak{g}.W \subseteq W$. Sobald bewiesen, schreibe $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus Kz$ mit $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$ und wähle einen EV $v_0 \in W$ von z (existiert, weil $K = \overline{K}$!) Dann ist z ein EV für alle $x \in \mathfrak{g}$.

Nun zum Beweis der Beh. Seien $x \in \mathfrak{g}$, $w \in W$. Z.z. $x.w \in W$, d.h. für alle $y \in \mathfrak{a}$ soll gelten

$y.x.w = \lambda(y)x.w$. Weil $yx.w = (xy - [x,y]).w =$
$= \lambda(y)x.w - \lambda([x,y]).w$, bleibt z.z. $\lambda([x,y]) = 0$.
Sei dazu $w \in W$ und n maximal mit
$w, x.w, \dots, x^{n-1}.w$ linear unabhängig. Setze
$W_i = \langle w, x.w, \dots, x^{i-1}.w \rangle_K$. Dann gilt $x.W_n \subseteq W_n$
und $y.W_i \subseteq W_i$ für alle i. Bzgl. der Basis
$w, x.w, \dots, x^{n-1}.w$ von W_n ist $y = \begin{pmatrix} \lambda(y) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda(y) \end{pmatrix}$, denn
$$y.x^i w \equiv \lambda(y) \cdot x^i w \mod W_i$$
nach Induktion: klar für $i = 0$ und
$$y.x^i w = yx.x^{i-1}w = xy.x^{i-1}w - \underbrace{[x,y]}_{\in a}.x^{i-1}w.$$
Nach I.V. gilt $y.x^{i-1}w = \lambda(y) \cdot x^{i-1}w + w'$ mit $w' \in W_i$
$w' \in W_{i-1}$ und $x.w' \in W_i$.
Somit $\mathrm{Spur}_{W_n}(y) = n \cdot \lambda(y)$ für beliebiges $y \in a$.
Ersetzen wir y durch $[x,y] \in a$, folgt
$0 = \mathrm{Spur}_{W_n}([x,y]) = n \cdot \lambda([x,y])$. Es folgt $\lambda([x,y])$
$= 0$, weil $\mathrm{char}\, K = 0$. □

Satz II.1.2 (Lie) Sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ auflösbar
mit $\dim_K V = n < \infty$. Dann gibt es eine vollständige
Fahne (V_i) in V mit $\mathfrak{g}.V_i \subseteq V_i$. Äquivalent:
Es gibt eine Basis von V bzgl. der $\mathfrak{g} \subseteq t_n(K)$.
Bew. Induktion nach $\dim V$ mit II.1.1. wie im
Beweis von I.7.7. □

Korollar II.1.3 Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Dann gibt es Ideale $\mathfrak{g}_i \trianglelefteq \mathfrak{g}$ mit $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \leq \mathfrak{g}_1 \leq \dots \leq \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ und $\dim \mathfrak{g}_i = i$.

Beweis. Wende II.1.2 an auf $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \leq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ (auflösbar laut I.6.3.). □

Korollar II.1.4 Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Ist $x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, so ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ nilpotent. Insbes. ist $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ nilpotent.

Beweis. Nach II.1.2 haben wir $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{t}_n(K)$, also $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = [\mathrm{ad}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}(\mathfrak{g})] \subseteq \mathfrak{n}_n(K)$, d.h. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ ist nilpotent. Damit ist auch $\mathrm{ad}_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}(x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ nilpotent. Mit Satz I.7.3 (Engel) folgt, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ ist nilpotent. □

Also ist jede auflösbare Lie-Algebra eine Erweiterung einer abelschen durch eine nilpotente Lie-Algebra:

$$0 \to [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \to 0.$$

II.2 Jordan-Chevalley-Zerlegung

Nur in diesem Abschnitt sei $\mathrm{char}\, K$ beliebig.

Def. II.2.1 Sei V ein endl.-dim. K-VR. Dann heißt $x \in \mathrm{End}\, V$ halbeinfach, falls x diagonalisierbar ist

(über $k=\bar{k}$).

Prop. II.2.2 Sei $x \in \mathrm{End}\, V$.

(i) Es gibt eindeutige $x_s, x_n \in \mathrm{End}\, V$, sd. x_s halbeinfach, x_n nilpotent, $x = x_s + x_n$ und $[x_s, x_n] = 0$.

(ii) Es gilt $x_s = p(x)$ und $x_n = q(x)$ für gewisse $p, q \in k[X]$ mit $p(0) = q(0) = 0$.

Wir nennen $x = x_s + x_n$ die Jordan(-Chevalley)-Zerlegung.

Beweis. Sei $\prod_i (X - a_i)^{m_i}$ das char. Poly. von x.
Nach chinesischem Restsatz gibt es $p \in k[X]$ mit $p \equiv a_i \bmod (X-a_i)^{m_i}$ für alle i und $p \equiv 0 \bmod X$.
Setze $q(X) = X - p(X)$, $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$.
Dann gilt für $v \in \ker (x - a_i)^{m_i}$, dass $x_s \cdot v = a_i \cdot v$, also ist x_s halbeinfach und $x_n = x - x_s$ ist nilpotent, wie man auf einer Jordan-Basis nachprüft.
Ist $x = x_s' + x_n'$ eine weitere Jordan-Zerlegung, gilt $x_s - x_s' = x_n' - x_n$. Weil $[x_s, x_s'] = [x_n', x_n] = 0$ sind beide Seiten halbeinfach und nilpotent, also null. □

Lemma II.2.3 Sei $x \in \mathrm{End}\, V$. Dann ist $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}(x_s) + \mathrm{ad}(x_n)$ die Jordan-Zerlegung von $\mathrm{ad}\, x$.

Beweis. Wie in HA 1.3 sehen wir, dass für $y \in \mathrm{End}\, V$ halbeinfach mit EWen $a_1, \dots, a_n$ der Endomorphismus $\mathrm{ad}\, y \in \mathrm{End}(\mathrm{End}\, V)$ die EWe $a_i - a_j$ zu den EVen I_{ij} hat. Also ist $\mathrm{ad}\, y$ ebenfalls halbeinfach. Somit ist $\mathrm{ad}\, x_s$ halbeinfach, $\mathrm{ad}\, x_n$ nilpotent (I.7.4) und $[\mathrm{ad}\, x_s, \mathrm{ad}\, x_n] = \mathrm{ad}([x_s, x_n])$ $= \mathrm{ad}(0) = 0$ und die Beh. folgt aus II.2.2.(i). □

Lemma II.2.4 Sei $\mathfrak{A}$ eine endl.-dim. K-Algebra. Dann gilt für alle $\delta \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{A}$, dass $\delta_s, \delta_n \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{A}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\sigma = \delta_s \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{A}$. Sei $\mathfrak{A} = \bigoplus_a \mathfrak{A}_a$ die Hauptraumzerlegung von δ (= Eigenraumzerlegung von σ). Dann gilt $\mathfrak{A}_a \mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$, weil

$$(\delta - (a+b).\mathrm{id})^n (xy) = \sum_{i=0}^{n} ((\delta - a.\mathrm{id})^{n-i} x)((\delta - b.\mathrm{id})^i y)$$

(Induktion nach n). Es folgt $\sigma(xy) = (a+b) \cdot xy$, aber auch $(\sigma x)y + x\sigma(y) = a \cdot xy + x(b \cdot y) = (a+b) \cdot xy$ für alle $x \in \mathfrak{A}_a$, $y \in \mathfrak{A}_b$. Daher $\sigma \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{A}$. □

II.3 Killing-Form und Cartan-Kriterien

Suchen Kriterium für die Auflösbarkeit von $\mathfrak{g}$ (äquivalent: die Nilpotenz von $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.)

Prop. II.3.1 Seien $A \subseteq B \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ und

$$M = \{ x \in \mathfrak{gl}(V) : [x, B] \subseteq A \}.$$

Angenommen $x \in M$ erfülle $\mathrm{Spur}(xy) = 0$ für alle $y \in M$. Dann ist x nilpotent.

Bew. Sei $x = s + n$ die Jordan-Zerlegung (z.z. $s = 0$).

Fixiere Jordan-Basis bzgl. der $s = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$.

Sei $E = \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq K$ (z.z. $E = 0 \Leftrightarrow E^* = 0$)

Zu $f \in E^*$ sei $y \in \mathfrak{gl}(V)$ mit Matrixdarstellung $\mathrm{Diag}(f(a_1), \dots, f(a_n))$ bzgl. der Jordan-Basis.

Wie oben gesehen gilt $\mathrm{ad}\, s\,(I_{ij}) = (a_i - a_j) \cdot I_{ij}$ und $\mathrm{ad}\, y\,(I_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j)) \cdot I_{ij}$. Wähle $r(X) \in K[X]$ mit $r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$ und $r(0) = 0$ (Bed. wohldefiniert, denn $a_i - a_j = a_k - a_l$ impliziert $f(a_i) - f(a_j) = f(a_i - a_j) = f(a_k) - f(a_l)$.)

Nach Konstruktion haben wir $\mathrm{ad}\, y = r(\mathrm{ad}\, s)$.

Laut Lemma II.2.3 ist $\mathrm{ad}\, s = (\mathrm{ad}\, x)_s$. Daher gibt es nach Prop. II.2.2.(ii) ein $p \in K[X]$ mit $p(0) = 0$ und $\mathrm{ad}\, s = p(\mathrm{ad}\, x)$, d.h. $r \circ p(\mathrm{ad}\, x) = \mathrm{ad}\, y$. Weil nach Vor. $\mathrm{ad}\, x . B \subseteq A$, folgt auch $\mathrm{ad}\, y . B \subseteq A$, d.h. $y \in M$. Nach Vor. folgt $\mathrm{Spur}(xy) = 0 \Leftrightarrow \sum_i a_i f(a_i) = 0$. Weil $f \in \mathrm{Hom}(E, \mathbb{Q})$ gibt Anwenden von f, dass $\sum_i f(a_i)^2 = 0$, d.h. $f(a_i) = 0$ für alle i und somit $f = 0$. $\square$

Lemma II.3.2 Für $x, y, z \in \mathrm{End}\, V$ gilt

$$\mathrm{Spur}([x,y]z) = \mathrm{Spur}(x[y,z]).$$

Bew. $\mathrm{Spur}(xyz - yxz) = \mathrm{Spur}(xyz) - \mathrm{Spur}(xzy)$
$= \mathrm{Spur}(x(yz - zy))$. □

Satz II.3.3 (Cartan-Kriterium für Auflösbarkeit)
Sei $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}(V)$, sodass $\mathrm{Spur}(xy) = 0$ für alle $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $y \in \mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{g}$ auflösbar.

Bew. Wende II.3.1 an mit $A = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $B = \mathfrak{g}$ (sodass $\mathfrak{g} \subseteq M$). Haben $\mathrm{Spur}(xy) = 0$ für $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $y \in \mathfrak{g}$. Brauchen $\mathrm{Spur}(xy) = 0$ für $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $y \in M$. Sei dazu $x = [u, v]$ (ein Erzeuger). Dann gilt nach II.3.2, dass
$\mathrm{Spur}([u,v]y) = \mathrm{Spur}(u[v,y]) = \mathrm{Spur}([v,y]u) =$
$= 0$, weil $y \in M$. Wir dürfen nun schließen, dass x nilpotent ist. Also ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent nach Satz I.7.7. □

Korollar II.3.4 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, sodass $\mathrm{Spur}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y) = 0$ für alle $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $y \in \mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{g}$ auflösbar.

Bew. Es ist $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ auflösbar nach II.3.3, also $\mathfrak{g}$ auflösbar nach I.6.3. □

Def. II.3.5 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Die Killing-Form von $\mathfrak{g}$ ist die symmetrische Bilinearform

$$B_{\mathfrak{g}} = B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$$
$$(x, y) \longmapsto \text{Spur}(\text{ad}\, x\, \text{ad}\, y).$$

Nach II.3.2 ist B „assoziativ": $B([x,y],z) = B(x,[y,z])$.

Lemma II.3.6 Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Dann gilt $B_{\mathfrak{a}} = B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$.

Beweis Beobachtung: Für $\phi : V \to V$ mit $\phi(V) \subseteq W \subseteq V$ gilt $\text{Spur}\,\phi = \text{Spur}(\phi|_W)$. Für $x, y \in \mathfrak{a}$ gilt $(\text{ad}\, x)(\text{ad}\, y)(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$, also $\text{Spur}(\text{ad}\, x\, \text{ad}\, y) =$
$= \text{Spur}((\text{ad}\, x\, \text{ad}\, y)|_{\mathfrak{a}}) = \text{Spur}((\text{ad}\, x)|_{\mathfrak{a}}\,(\text{ad}\, y)|_{\mathfrak{a}}) =$
$= \text{Spur}(\text{ad}_{\mathfrak{a}} x\, \text{ad}_{\mathfrak{a}} y)$. □

Beispiel $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 K = \langle x, h, y \rangle$

$$\rightsquigarrow \text{ad}\, x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}\, h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}\, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ B hat Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit Determinante -128.

Also ist B nicht ausgeartet ($\text{char}\, K \neq 2$), d.h.
$\text{Rad}\, B = \{x \in \mathfrak{g} : B(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in \mathfrak{g}\} = \{0\}$.

Beobachtung: $\text{Rad}\, B \trianglelefteq \mathfrak{g}$ (vgl. „Assoziativität" von B)

Satz II.3.7 (Cartan-Kriterium für Halbeinfachheit)
Eine Lie-Algebra ist genau dann halbeinfach, wenn ihre Killing-Form nicht ausgeartet ist.

Bew. Sei zuerst $\operatorname{Rad} \mathfrak{g} = \{0\}$. Es gilt nach Def. $B(x,y) = 0$ für alle $x \in \operatorname{Rad} B$, $y \in \mathfrak{g}$. Insbes. folgt mit II.3.6 und II.3.4, dass $\operatorname{Rad} B \trianglelefteq \mathfrak{g}$ auflösbar ist, d.h. $\operatorname{Rad} B \leq \operatorname{Rad} \mathfrak{g} = \{0\}$ und B ist nicht ausgeartet.

Sei nun $\operatorname{Rad} B = \{0\}$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathfrak{a} \leq \operatorname{Rad} B$ für jedes abelsche Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Sei dazu $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{g}$. Dann haben wir

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\operatorname{ad} y} \mathfrak{g} \xrightarrow{\operatorname{ad} x} \mathfrak{a} \xrightarrow{\operatorname{ad} y} \mathfrak{a} \xrightarrow{\operatorname{ad} x} \{0\},$$

also $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)^2 = 0$, d.h. $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)$ ist nilpotent und somit $\operatorname{Spur}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$, also $x \in \operatorname{Rad} B$. □

II.4 Zerlegung in einfache Ideale

Für $A \subseteq \mathfrak{g}$ sei $A^\perp = \{x \in \mathfrak{g} : B(x,a) = 0 \text{ für alle } a \in A\}$.

Prop. II.4.1 Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach und $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Dann gilt

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$$

mit $\mathfrak{a}^\perp \trianglelefteq \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\perp$ sind halbeinfach.

Bew. Es ist $\mathfrak{a}^\perp \trianglelefteq \mathfrak{g}$, denn für $x \in \mathfrak{a}^\perp$, $y \in \mathfrak{g}$, $z \in \mathfrak{a}$ gilt $B([x,y],z) = B(x,[y,z]) = 0$. Dies zeigt außerdem nach II.3.4, dass $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ auflösbar, also trivial ist. Weil $\{0\} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \mathrm{Rad}(B_{|\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}) \overset{\text{II.3.6}}{=} \mathrm{Rad}(B_{\mathfrak{a}})$, ist $\mathfrak{a}$ halbeinfach laut II.3.7. Damit ist auch $\mathfrak{a}^\perp$ halbeinfach. Weil $B_{\mathfrak{a}}$ nicht ausg., gibt es zu $x \in \mathfrak{g}$ ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $B(x,a') = B(a,a')$ für alle $a' \in \mathfrak{a}$, also $x - a \in \mathfrak{a}^\perp$. Somit $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$. □

Beachte: Kann immer $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, folgt für $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$, dass $[a,b] \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, also $[a,b] = 0$. Außerdem gilt $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ bzgl. B, d.h. $B_{\mathfrak{g}} = B_{\mathfrak{a}} \oplus B_{\mathfrak{b}}$ nach II.3.6.

Satz II.4.2 Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, wenn sie sich eindeutig in einfache Ideale zerlegt:

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_t.$$

Bew. Haben wir eine solche Zerlegung, ist $B_{\mathfrak{g}}$ orthogonale Summe nicht ausgearteter Formen, also selbst nicht ausgeartet, somit ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach laut II.3.7.

Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, wähle $\{0\} \neq \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ minimal und erhalte $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ wie in II.4.1. Dann aber

folgt für $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{a}$, dass auch $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, also ist $\mathfrak{a}$ einfach. Weil $\mathfrak{a}$ halbeinfach, zerfällt es induktiv in eine direkte Summe einfacher Ideale, die auch Ideale in $\mathfrak{g}$ sind. Eindeutigkeit: Ist $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ einfach, folgt wegen $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \trianglelefteq \mathfrak{a}$, dass $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{a}$, weil $z(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Daher $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = \bigoplus_i [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_i]$, d.h. $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{i_0}$. □

Korollar II.4.3 Für $\mathfrak{g}$ halbeinfach gilt:

(i) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$,

(ii) Jedes $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ist direkte Summe einfacher Ideale von $\mathfrak{g}$.

Bew. (i) folgt durch Einsetzen der Zerlegung.

(ii) Nach II.4.1 ist $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ halbeinfach, nach II.4.2 zerfällt $\mathfrak{a}$ in einfache Ideale und diese sind auch Ideale in $\mathfrak{g}$. □

II.5 Abstrakte Jordan-Zerlegung

Lemma II.5.1. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Dann gilt $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \trianglelefteq \operatorname{Der} \mathfrak{g}$.

Bew. Für $x, y \in \mathfrak{g}$ und $\delta \in \operatorname{Der} \mathfrak{g}$ gilt

$$[\delta, \operatorname{ad} x](y) = \delta([x,y]) - [x, \delta(y)] = [\delta x, y] = \operatorname{ad}(\delta x)(y).$$

(*) □

Satz II.5.2 Für $\mathfrak{g}$ halbeinfach gilt $\operatorname{ad}\mathfrak{g} = \operatorname{Der}\mathfrak{g}$.

Beweis. Nach II.3.7 hat $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$ nicht ausgeartete Killing-Form. Nach II.3.6 und II.5.1 gilt $B_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} = B_{\operatorname{Der}\mathfrak{g}} | \operatorname{ad}\mathfrak{g} \times \operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Wie zuvor folgt $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \cap (\operatorname{ad}\mathfrak{g})^\perp = \{0\}$ und $[\operatorname{ad}\mathfrak{g}, (\operatorname{ad}\mathfrak{g})^\perp] = \{0\}$. Für $\delta \in (\operatorname{ad}\mathfrak{g})^\perp$ folgt aus (*) $\operatorname{ad}(\delta x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$, also $\delta = 0$. □

Mit Lemma II.2.4 folgt also für $\mathfrak{g}$ halbeinfach und $x \in \mathfrak{g}$, dass $\operatorname{ad} x = (\operatorname{ad} x)_s + (\operatorname{ad} x)_n$ mit $(\operatorname{ad} x)_s, (\operatorname{ad} x)_n \in \operatorname{ad}\mathfrak{g}$!

Def. II.5.3 Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach und $x \in \mathfrak{g}$. Dann ist

$$x = x_s + x_n$$

die eindeutige Jordan-Zerlegung von x, wobei $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ eindeutig bestimmt sind durch

$$\operatorname{ad}(x_s) = (\operatorname{ad} x)_s \quad \text{und} \quad \operatorname{ad}(x_n) = (\operatorname{ad} x)_n.$$

Beachte:
- x_s ist ad-halbeinfach,
- x_n ist ad-nilpotent,
- $[x_s, x_n] = 0$.
- Falls $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, stimmt dies mit der Jordan-Zerlegung als Endomorphismen überein (Beweis in Abschnitt II.7.)

II.6 Vollständige Reduzibilität von Darstellungen

Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Erinnerung: Eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist ein Homomorphismus $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ (I.4.6).

Äquivalent: V ist ein $\mathfrak{g}$-Modul, d.h.

(M1) $(ax+by).v = a\cdot(x.v) + b\cdot(y.v)$

(M2) $x.(av+bw) = a\cdot(x.v) + b\cdot(x.w)$

(M3) $[x,y].v = x.y.v - y.x.v$

für alle $x,y \in \mathfrak{g}$, $v,w \in V$, $a,b \in K$.

- Ein Homomorphismus von $\mathfrak{g}$-Moduln $\phi: V \to W$ erfüllt $\phi(x.v) = x.\phi(v)$ für alle $v \in V$, $x \in \mathfrak{g}$.
- $\operatorname{Ker}\phi$, $\operatorname{Bild}\phi$ sind Untermoduln und $V/\operatorname{Ker}\phi \cong \operatorname{Bild}\phi$ u.s.w.
- V heißt irreduzibel, falls V genau zwei invariante Unterräume hat ($\{0\}$ und V).
- V heißt vollständig reduzibel, falls $V \cong V_1 \oplus \dots \oplus V_t$ mit V_i irreduzibel. (Äquivalent: jeder Untermodul $W \subseteq V$ ist komplementiert, d.h. $V \cong W \oplus W'$ für einen Untermodul $W' \subseteq V$.)

Satz II.6.1 (Weyl) Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann ist jede Darstellung $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ vollständig reduzibel.

Dabei ist $\dim_K V < \infty$ (wie immer) implizit.

Beweis. Für $\phi = \mathrm{ad}$ ist dies die Aussage von Satz II.4.2. Im Allgemeinen nutze Weyls unitären Trick (für $K = \mathbb{C}$): Es gibt eine kompakte, einfach zusammenhängende Lie-Gruppe U mit $\mathrm{Lie}(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{g}$ (z. Beispiel I.2.(iv).). $\phi|_{\mathrm{Lie}(U)}$ stiftet $\Phi : U \to GL(V)$. Wähle eine hermitesche Form $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ auf V und setze $\langle v, w \rangle = \int_U \langle g.v, g.w \rangle_0 \, d\mu_U(g)$ für das Haar-Maß μ_U auf U mit $\mu_U(U) = 1$. Ist $W \subseteq V$ ϕ-invariant, so auch Φ-invariant. Damit ist $W^\perp$ ein Φ-invariantes Komplement, denn für $v \in W^\perp$, $g \in U$, $w \in W$ gilt $\langle g.v, w \rangle = \langle v, \underbrace{g^{-1}.w}_{\in W} \rangle = 0$, und $W^\perp$ ist auch ϕ-invariant. □

II.7 Erhalt der Jordan-Zerlegung

Satz II.7.1 Sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ halbeinfach und $x \in \mathfrak{g}$. Dann enthält $\mathfrak{g}$ den halbeinfachen und nilpotenten Teil von x als Endomorphismus.

Korollar II.7.2 Abstrakte und gewöhnliche Jordan-Zerlegung von $x \in \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ halbeinfach stimmen überein.

Bew. Sei $x = x_s + x_n$ die gewöhnliche Jordan-Zerlegung. Dann ist nach II.2.3 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_s) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_n)$ die

Jordan-Zerlegung von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x$. Nach II.7.1 gilt $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ und weil Halbeinfachheit und Nilpotenz unter Einschränkung auf invariante Unterräume erhalten bleibt, ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$ die gewöhnliche Jordan-Zerlegung in $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. □

<u>Bew. (von II.7.1)</u> Sei $x = x_s + x_n$ die gewöhnliche Jordan-Zerlegung in $\mathfrak{gl}(V)$. Z.z.: $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$.
Weil $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x)(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$, folgt aus II.2.2. (ii), dass auch $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_n)(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$ und $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_s)(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$, d.h. $x_s, x_n \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$. Für einen Untermodul $W \subseteq V$ sei

$$\mathfrak{g}_W = \{ y \in \mathfrak{gl}(V) : y.W \subseteq W \text{ und } \mathrm{Spur}(y|_W) = 0 \}$$

(z.B. $\mathfrak{g}_V = \mathfrak{sl}(V)$). Weil $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, gilt $\mathfrak{g} \subseteq \bigcap_W \mathfrak{g}_W = \mathfrak{g}'$.
Beobachtung: $x_s, x_n \in \mathfrak{g}'$. Es genügt also z.z. $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

Nach II.6.1 gilt $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp$ ($\mathfrak{g}'$ ist $\mathfrak{g}$-Modul via ad, weil $\mathfrak{g} \subseteq N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}_W)$ für alle $W \subseteq V$.)
Sei nun $y \in \mathfrak{g}^\perp$. Dann gilt $[x, y] = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und damit für jeden irreduziblen $W \subseteq V$, dass $y|_W = \lambda \cdot \mathrm{id}_W$ nach Lemma von Schur (s.u.). Andererseits $\mathrm{Spur}(y|_W) = 0$, weil $y \in \mathfrak{g}_W$, also $\lambda = 0$, d.h. $y|_W = 0$.
Wegen II.6.1 folgt $y = 0$. □

Lemma II.7.3 (Schur) Sei $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ irreduzibel und $y \in \mathfrak{gl}(V)$ mit $[\phi(x), y] = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Dann gibt es $\lambda \in K$ mit $y = \lambda \cdot id_V$.

Bew. Weil $K = \bar{K}$, besitzt y einen EV $v_0 \in V$ mit EW $\lambda \in K$. Setze $y' = y - \lambda \cdot id_V$. Dann ist $W = \ker y' \subseteq V$ ein Untermodul, weil für $v \in W$ und $x \in \mathfrak{g}$ auch
$y'(x.v) = (y'.x).v = (x.y').v = x.(y'.v) = x.0 = 0$.
Weil $v_0 \in W$ und W irreduzibel, folgt $W = V$. □

Satz II.7.4 Sei $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung mit $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Für $x \in \mathfrak{g}$ sei $x = x_s + x_n$ die (abstrakte) Jordan-Zerlegung in $\mathfrak{g}$. Dann ist $\phi(x) = \phi(x_s) + \phi(x_n)$ die (gewöhnliche) Jordan-Zerlegung in $\mathfrak{gl}(V)$.

Bew. Sei $\{x_i\} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Basis aus EVen für $\operatorname{ad} x_s$, d.h. $[x_s, x_i] = \lambda_i x_i$. Dann folgt $[\phi(x_s), \phi(x_i)] = \lambda_i \phi(x_i)$, d.h. $\phi(\mathfrak{g})$ wird von EVen von $\operatorname{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}(\phi(x_s))$ erzeugt, also ist $\operatorname{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}(\phi(x_s))$ halbeinfach. Außerdem gilt $\operatorname{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}(\phi(x_n))^k(\phi(x)) = \phi((\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_n)^k(x)) = 0$ für $k \gg 0$ und alle $x \in \mathfrak{g}$, d.h. $\operatorname{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}(\phi(x_n))$ ist nilpotent. Damit ist $\phi(x) = \phi(x_s) + \phi(x_n)$ die abstrakte Jordan-Zerlegung in $\phi(\mathfrak{g})$. Nach II.7.2 ist es auch die gewöhnliche Jordan-Zerlegung. □

II.8 Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2(K)$

In diesem Abschnitt betrachten wir $\mathfrak{sl}_2(K) = \langle x, h, y \rangle_K$.
Sei V ein $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul. Wegen II.7.4 zerfällt V in Eigenräume von h:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda \quad \text{mit} \quad V_\lambda = \{v \in V : h.v = \lambda v\},$$

wobei alle EWe $\lambda \in K$, weil $K = \bar{K}$. Gilt $V_\lambda \neq \{0\}$, nennen wir λ ein **Gewicht** von h in V und V_λ heißt **Gewichtsraum**.

Lemma II.8.1 Für $v \in V_\lambda$ gilt $x.v \in V_{\lambda+2}$ und $y.v \in V_{\lambda-2}$.

Bew. $h.(x.v) = (h.x).v = ([h,x] + x.h).v = (2x + x.h).v$
$= (2x + \lambda x).v = (2+\lambda).(x.v)$ und ähnlich für y. □

Bemerkung. · Insbesondere sind $x., y. \in \mathrm{End}\, V$ nilpotent, wie wir es auch schon aus dem vorherigen Abschnitt wissen.
· Für $\lambda \in K$ mit $V_\lambda \neq \{0\}$ und $V_{\lambda+2} = \{0\}$ nennen wir jeden $0 \neq v \in V_\lambda$ einen Vektor **mit höchstem Gewicht** λ.

Sei nun V irreduzibel und $v_0 \in V_\lambda$ mit höchstem Gewicht.
Setze $v_{-1} = 0$ und $v_i = \frac{1}{i!}(y.)^i v_0$ für $i \geq 0$ (char $K = 0$).

Lemma II.8.2. (a) $h.v_i = (\lambda - 2i) \cdot v_i$.
(b) $y.v_i = (i+1) \cdot v_{i+1}$.
(c) $x.v_i = (\lambda - i + 1) \cdot v_{i-1}$.

Bew. (a) und (b) klar. (c):

$$i \cdot x_- v_i = x_- y_- v_{i-1} = ([x,y] + y_- x_-)\, v_{i-1} =$$
$$= h_- v_{i-1} + y_- x_- v_{i-1} \overset{(a)+I.V.}{=} (\lambda - 2(i-1)) v_{i-1}$$
$$+ (\lambda - (i-1) + 1) \cdot y_- v_{i-2} = (\lambda - 2i + 2) v_{i-1} + (\lambda - i + 2) y_- v_{i-2}$$
$$\overset{(b)}{=} (\lambda - 2i + 2) v_{i-1} + (\lambda - i + 2)(i-1) \cdot v_{i-1} =$$
$$= i(\lambda - i + 1) \cdot v_{i-1}. \qquad \square$$

Beobachtungen:

- Wegen (a) sind alle $v_i \neq 0$ linear unabhängig.
- Weil $\dim_K V < \infty$ gibt es m minimal mit $v_m \neq 0$ und $v_{m+1} = 0$, also auch $v_{m+i} = 0$ für $i \geq 1$.
- Somit ist $\{0\} \neq \langle v_0, v_1, \dots, v_m \rangle_K \subseteq V$ ein $\mathfrak{g}$-Untermodul, also $\langle v_0, v_1, \dots, v_m \rangle_K = V$, weil V irr.
- Bzgl. der Basis $v_0, \dots, v_m$ gilt $h_- \in \mathfrak{d}_{m+1}(K)$, $x_- \in \mathfrak{n}_{m+1}(K)$, $y_- \in \mathfrak{n}_{m+1}(K)^T$.
- Für $i = m+1$ sagt (c) $0 = (\lambda - m) \cdot v_m$, also gilt $\lambda = m = \dim V - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- Wegen (a) gilt $\dim V_\lambda = 1$, falls $V_\lambda \neq \{0\}$.
- Insbesondere ist der Vektor höchsten Gewichts ($= \dim V - 1$) bis auf Skalare eindeutig.

Satz II.8.3 Sei V ein irreduzibler $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul und $m = \dim V - 1$. Dann gilt:

(a) $V \cong V_m \oplus V_{m-2} \oplus \cdots \oplus V_{-m+2} \oplus V_{-m}$ (K-VR-Summe, wobei jedes V_μ eindim. Gewichtsraum von h)

(b) V hat einen (bis auf Skalare) eindeutigen Vektor mit höchstem Gewicht m.

(c) Die Wirkung von x, h, y auf V ist durch II.8.2 nach geeigneter Basiswahl eindeutig und explizit bestimmt. Insbesondere gibt es (bis auf Iso.) genau einen irr. $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul in jeder Dimension ≥ 1.

Bew. Es fehlt nur noch die Existenz in (c). Doch diese folgt, indem wir den $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul $V = \langle v_0, \ldots, v_m \rangle$ durch II.8.2. (a), (b), (c) definieren (HA 5.1!) □

Mit II.6.1 (Weyl) verstehen wir auch allgemeine $\mathfrak{sl}_2(K)$-Moduln:

Korollar II.8.4. Ist V ein $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul, so sind alle EWe von h ganzzahlig und treten zusammen mit ihrem Negativen gleich oft auf. Die Anzahl irr. Untermoduln von V ist $\dim V_0 + \dim V_1$. □

II.9 Wurzelraumzerlegung

In diesem Abschnitt ist $\{0\} \neq \mathfrak{g}$ halbeinfach.

Def. II.9.1 Eine Unteralgebra $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{g}$ heißt torisch, falls jedes $x \in \mathfrak{t}$ halbeinfach ist (d.h. $x = x_s$).

Beobachtung. Wäre jedes $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent (d.h. $x = x_n$), so wäre $\mathfrak{g}$ nach I.7.3 (Engel) nilpotent. Also gibt es $x \in \mathfrak{g}$ mit $x = x_s + x_n$ und $x_s \neq 0$, d.h. $\langle x_s \rangle_K \leq \mathfrak{g}$ ist torisch. Also gibt es immer $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{g}$ nicht-trivial torisch.

Lemma II.9.2 Jede torische Unteralgebra $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{g}$ ist abelsch.

Bew. z.z.: Für alle $x \in \mathfrak{t}$ ist null einziger EW von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(x)$. Angenommen $[x, y] = a \cdot y$ mit $0 \neq y \in \mathfrak{t}$ und $0 \neq a \in K$. Schreibe $x = \sum_i \lambda_i x_i$ in einer Basis aus EVen von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)$ (mit EWen μ_i). Dann gilt $-a \cdot y = \mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)(x) = \sum_i \lambda_i \mu_i x_i$, d.h. $\lambda_i \mu_i \neq 0$ für ein i. Aber $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)(-a \cdot y) = 0$, d.h. $-a \cdot y$ ist EV von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)$ zum EW null, Widerspruch. ∎

Def. II.9.3 Eine Cartan-Unteralgebra (CSA) ist eine maximale torische Unteralgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$.

Achtung: Diese Def. ist nur unter unseren Annahmen ($\mathfrak{g}$ halbeinfach, $\mathrm{char}\, K = 0$, $K = \bar{K}$) äquivalent zur eigentlichen Definition: $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ nilpotent und $n_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Beispiel. Die Diagonalmatrizen in $\mathfrak{sl}_n(K)$ bilden eine CSA $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{sl}_n(K)$. Allgemeiner in Typ A_n, B_n, C_n, D_n (HA 5.2).

Sei nun $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine CSA. Dann besteht die Familie $\{ad_{\mathfrak{g}}(h) : h \in \mathfrak{h}\}$ aus kommutierenden Endomorphismen, denn

$$[h_1,[h_2,x]] = -[x,\underbrace{[h_1,h_2]}_{=0 \text{ (II.9.2)}}] - [h_2,[x,h_1]] = [h_1,[h_2,x]]$$

Also sind alle $ad_{\mathfrak{g}}(h)$ für $h \in \mathfrak{h}$ gleichzeitig diag.bar:

$$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$$

mit $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : [h,x] = \alpha(h)\cdot x \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}$.
Dabei gilt $\mathfrak{g}_0 = z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \overset{\text{II.9.2}}{\supseteq} \mathfrak{h}$.

Def. II.9.4 Wir nennen $0 \neq \alpha \in \mathfrak{h}^*$ eine Wurzel von $\mathfrak{g}$ bzgl. $\mathfrak{h}$, falls $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$. Die Menge $\Phi \subseteq \mathfrak{h}^*$ aller Wurzeln nennen wir das Wurzelsystem von $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Für $\alpha \in \Phi$ heißt $\mathfrak{g}_\alpha$ der Wurzelraum der Wurzel α. Wir haben somit die Wurzelraumzerlegung (oder Cartan-Zerlegung)

$$\mathfrak{g} \cong z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha .$$

Offensichtlich gilt $|\Phi| < \infty$.

Nächste Ziele: · Zeige $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ und $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ nicht ausg.
· Finde möglichst viele Eigenschaften von $\Phi \subseteq \mathfrak{h}^* \cong_B \mathfrak{h}$.
· Definiere entsprechend abstrakte Wurzelsysteme.
· Klassifiziere abstr. Wurzelsysteme (durch Dynkin-Diagramme).
· Zeige $\{\mathfrak{g} \text{ halbeinfach}\}/\cong \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{abstr. Wurzelsysteme}\}/\cong$.

Prop. II.9.5. (i) Für $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
(ii) Für $0 \neq \alpha \in \mathfrak{h}^*$ ist jedes $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ (ad-)nilpotent.
(iii) Seien $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ mit $\alpha+\beta \neq 0$. Dann ist $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ bzgl. B.

Bew. (i) Seien $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$. Dann gilt

$$[h,[x,y]] = -[y,[h,x]] - [x,[y,h]] = -[y,\alpha(h)\cdot x] - [x,-\beta(h)\cdot y] = \alpha(h)[x,y] + \beta(h)[x,y] = (\alpha+\beta)(h)\cdot[x,y].$$

(ii) Folgt aus (i).
(iii) Sei $h \in \mathfrak{h}$ mit $(\alpha+\beta)(h) \neq 0$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$. Dann gilt

$$B(x,y) = \frac{1}{(\alpha+\beta)(h)}\big(B(\alpha(h)\cdot x, y) + B(x, \beta(h)\cdot y)\big)$$
$$= \frac{1}{(\alpha+\beta)(h)}\big(B([h,x],y) + B(x,[h,y])\big) = 0. \quad \square$$

Prop. II.9.6 $B|_{Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\times Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})}$ ist nicht ausgeartet.

Bew. Nach II.3.7 ist B nicht ausgeartet. Nach II.9.5 gilt $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\alpha$ für alle $0 \neq \alpha \in \mathfrak{h}^*$. Gilt also für $x \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, dass $B(x, Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})) = 0$, folgt $x = 0$. $\square$

Lemma II.9.7 Für $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$ mit y nilpotent und $[x,y]=0$ ist xy nilpotent und insbes. $\operatorname{Spur}(xy)=0$. □

Satz II.9.8 Sei $h \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Dann gilt $z_{\mathfrak{g}}(h)=h$.

Bew. Setze $z := z_{\mathfrak{g}}(h)$. Wir arbeiten Schritt für Schritt:

1.) $x \in z \Rightarrow x_s, x_n \in z$: Z.z.: $\operatorname{ad}(x_{s/n})(h) = \{0\}$.
Weil $\operatorname{ad} x\,(h) = \{0\}$, folgt aus II.2.2.(ii), dass $(\operatorname{ad} x)_{s/n}(h) = \{0\}$. Aber $(\operatorname{ad} x)_{s/n} = \operatorname{ad}(x_{s/n})$.

2.) $x \in z$ halbeinfach $\Rightarrow x \in h$: $h + K\cdot x$ ist toriscb, weil $[h,x]=0$.
Da h maximal toriscb, folgt $x \in h$.

3.) $B|_{h\times h}$ ist nicht ausgeartet: Sei $h \in h$ mit $B(h,h)=0$.
Ist $x \in z$ nilpotent, gilt $B(x,h)=0$ nach II.9.7.
Dann aber auch $B(x,h)=0$ für alle $x \in z$ wegen 1.) und 2.). Aus II.9.6 folgt $h=0$.

4.) z ist nilpotent: Ist $x \in z$ halbeinfach, folgt $x \in h$ aus 2.) und somit ist $\operatorname{ad}_z(x)=0$ nilpotent.
Ist $x \in z$ nilpotent, so auch $\operatorname{ad}_z(x) = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x)|_z$.
Ist $x \in z$ beliebig, haben wir $x = x_s + x_n$ mit $x_s, x_n \in z$ laut 1.). Weil $[x_s, x_n]=0$, ist also $\operatorname{ad}_z(x)$ nilpotent.
Mit I.7.3 (Engel) ist z nilpotent.

5.) $\underline{h \cap [z,z] = \{0\}}$: Folgt wegen $B(h,[z,z]) =$
$= B([h,z],z) = B(\{0\},z) = \{0\}$ aus 3.).

6.) $\underline{z \text{ ist abelsch}}$. Weil z laut 4.) nilpotent, gilt mit $[z,z] \neq \{0\}$ auch $[z,z] \cap Z(z) \neq \{0\}$ laut I.7.8. Sei also $0 \neq z \in [z,z] \cap Z(z)$. Nach 2.) und 5.) ist z nicht halbeinfach, d.h. $0 \neq z_n \in z$ nach 1.), also $z_n \in Z(z)$ weil $\operatorname{ad}(z)(z) = 0$ und weil $\operatorname{ad}(z_n) = (\operatorname{ad}(z))_n = p(\operatorname{ad}(z))$ für ein Polynom $q \in K[X]$ mit $q(0) = 0$ laut Prop. II.2.2.(ii). Aber dann folgt aus II.9.7, dass $B(z_n, z') = 0$ für alle $z' \in z$ im Widerspruch zu II.9.6.

7.) $\underline{z = h}$. Angenommen, es gäbe $z \in z \setminus h$. Wegen 1.) und 2.) ist dann $0 \neq z_n \in z$. Wegen 6.) und II.9.7 gilt dann $B(z_n, z) = 0$ wieder im Widerspruch zu I.9.6. □

$\underline{\text{Korollar II.9.9}}$ $B_{|h \times h}$ ist nicht ausgeartet. □

Somit erhalten wir $h^* \xrightarrow{\cong} h$, $\alpha \longmapsto t_\alpha$, wobei $t_\alpha \in h$ eindeutig bestimmt ist durch $B(t_\alpha, h) = \alpha(h)$ für alle $h \in h$. Insbesondere haben wir die endliche Menge $\{t_\alpha : \alpha \in \Phi\} \subseteq h$.

III Wurzelsysteme

Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach mit CSA $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ und Wurzelsystem $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

III.1 Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung

Satz III.1.1 Sei $\alpha \in \Phi$. Dann gilt

(i) $K \cdot \Phi = \mathfrak{h}^*$.

(ii) $-\alpha \in \Phi$.

(iii) Für $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ gilt $[x,y] = B(x,y) t_\alpha$.

(iv) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = K \cdot t_\alpha$.

(v) $\alpha(t_\alpha) = B(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.

(vi) Zu $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ gibt es $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, sodass

$\langle x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha \rangle_K \xrightarrow{\cong} \mathfrak{sl}_2 K$

$x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

mit $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$.

(vii) $h_\alpha = \frac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)} \cdot t_\alpha$, $h_{-\alpha} = -h_\alpha$.

Bew. (i) LA: $K\Phi = \mathfrak{h}^* \Leftrightarrow \bigcap_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha = \{0\}$. Falls (i) nicht gilt, gibt es also $0 \neq h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Dann folgt aber $\{0\} = [h, \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha] = [h, \mathfrak{g}]$, d.h. $h \in Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$, Widerspruch.

(ii) II.9.S.(iii) sagt $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ für alle $-\alpha \neq \beta \in \mathfrak{h}^*$. Weil $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, impliziert II.3.7, dass $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq \{0\}$.

(iii) Für alle $h \in \mathfrak{h}$ gilt

$$B(h,[x,y]) = B([h,x],y) = B(\alpha(h)\cdot x, y)$$
$$= B(t_\alpha, h)\cdot B(x,y) = B(B(x,y)t_\alpha, h)$$
$$= B(h, B(x,y)t_\alpha),$$

also $B(x,y)t_\alpha - [x,y] \in \operatorname{Rad} B_{|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} \overset{\text{II.9.3}}{=} \{0\}$.

(iv) Nach (iii) bleibt z.z. $B_{|\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}} \neq 0$.
Aber das haben wir bei (ii) gerade gesehen.

(v) Wie eben finden wir $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $B(x,y) = 1$, also $[x,y] = t_\alpha$ laut (iii). Wäre $\alpha(t_\alpha) = 0$, gilt $[t_\alpha, x] = [t_\alpha, y] = 0$, also ist $\langle x, y, t_\alpha\rangle_K = \mathfrak{s} \cong \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \leq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ auflösbar.
Nach II.1.2 (Lie) ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha)$ nilpotent, weil $t_\alpha \in [\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$.
Weil $t_\alpha \in \mathfrak{h}$, ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha)$ aber auch halbeinfach, also $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha) = 0$, d.h. $t_\alpha \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, Widerspruch.

(vi) Zu $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ wähle $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $B(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)}$. Dann gilt nach (iii) $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$
$= B(x_\alpha, y_\alpha)\cdot t_\alpha = \frac{2}{B(t_\alpha,t_\alpha)}\cdot t_\alpha$. Außerdem folgt $[h_\alpha, x_\alpha]$
$= \alpha(h_\alpha)x_\alpha = 2x_\alpha$ und $[h_\alpha, y_\alpha] = -\alpha(h_\alpha)y_\alpha = -2y_\alpha$.

(vii) $\alpha(h_\alpha) = 2$ forciert $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{B(t_\alpha,t_\alpha)}$. $t_{-\alpha}$ ist definiert durch $B(t_{-\alpha}, h) = -\alpha(h)$ für alle $h \in \mathfrak{h}$, d.h. $B(-t_{-\alpha}, h) = \alpha(h)$ für alle $h \in \mathfrak{h}$, also $t_\alpha = -t_{-\alpha}$. Es folgt $h_{-\alpha} = -h_\alpha$. □

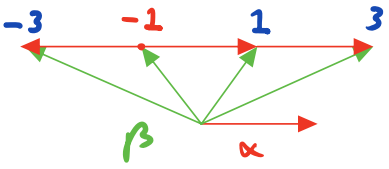
Zu $\alpha \in \Phi$ sei nun $\mathfrak{sl}_2^\alpha \leq \mathfrak{g}$ konstruiert wie in (vi).

Wir betrachten nun die Darstellung $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{sl}_2^\alpha \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.
Zunächst der Untermodul $V = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{c \in K^*} \mathfrak{g}_{c\cdot\alpha}$ (vgl. II.2.5.(i)).
Dieser hat die Gewichte 0 und $c\cdot\alpha(h_\alpha) = 2c$ für alle $c \in K^*$ mit $\mathfrak{g}_{c\cdot\alpha} \neq \{0\}$. Wegen II.8.4 folgt $c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \subseteq K$. Es gilt $V_0 = \mathfrak{h}$ und $\mathrm{ad}\,\mathfrak{sl}_2^\alpha . \ker\alpha = \{0\}$, d.h. $\ker\alpha \subseteq \mathfrak{h} \subseteq V$ ist ein trivialer Untermodul, der in $\dim\mathfrak{h} - 1$ irreduzible ein-dim. Untermoduln zerfällt. Außerdem ist $\mathfrak{sl}_2^\alpha \subseteq V$ ein irr. Untermodul mit $\mathfrak{sl}_2^\alpha \cap \mathfrak{h} = K\cdot h_\alpha$ und $h_\alpha \notin \ker\alpha$. Damit sind $-2, 0, 2$ die einzigen geraden Gewichte in V. Somit insbes. $2\alpha \notin \Phi$. Weil $\alpha \in \Phi$ beliebig war, folgt dann aber auch $\frac{\alpha}{2} \notin \Phi$, d.h. 1 ist kein Gewicht von V. Damit folgt aus II.8.4, dass $V = \ker\alpha \oplus \mathfrak{sl}_2^\alpha$ und deshalb $\dim\mathfrak{g}_\alpha = 1$ und $\pm\alpha$ sind die einzigen Vielfachen von α in Φ. Zusammenfassung:

<u>Satz III.1.2</u> (i) Für $\alpha \in \Phi$ gilt $\dim\mathfrak{g}_\alpha = 1$ und $\mathfrak{sl}_2^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus h_\alpha$ mit $h_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$.
Zu $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ gibt es $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ eindeutig mit $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha \left(= \frac{2t_\alpha}{B(t_\alpha, t_\alpha)}\right)$.
(ii) Gilt $\alpha \in \Phi$ und $c\cdot\alpha \in \Phi$ für $c \in K^*$, so folgt $c = \pm 1$. □

Wir betrachten nun die Wirkung von $\mathfrak{sl}_2^\alpha$ auf $\mathfrak{g}_\beta$ für $\beta \in \Phi$ mit $\beta \neq \pm\alpha$.

Sei dazu jetzt $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + i\alpha}$. Nach II.9.5.(i) ist dies wieder ein $\mathfrak{sl}_2^\alpha$-Modul mit Gewichten $(\beta + i\alpha)(h_\alpha) = \underbrace{\beta(h_\alpha)}_{\in \mathbb{Z}} + 2i \in \mathbb{Z}$ und eindim. Gewichtsräumen. Weil $\dim_K V_0 \oplus V_1 = 1$, ist V irreduzibel (II.8.4). Das höchste bzw. niedrigste Gewicht ist $\beta(h_\alpha) + 2q$ bzw. $\beta(h_\alpha) - 2r$, wenn q bzw. r die größte ganze Zahl ist, für die $\beta + q\cdot\alpha \in \Phi$ bzw. $\beta - r\cdot\alpha \in \Phi$. Wegen II.8.3 gilt dann $\beta + i\cdot\alpha \in \Phi$ für alle $-r \le i \le q$ und $\beta(h_\alpha) + 2q = -(\beta(h_\alpha) - 2r)$, also $\beta(h_\alpha) = r - q$, der „Linksüberhang" der α-Kette durch β:

$\beta(h_\alpha) =$ 

Wir nennen $(\beta(h_\alpha))_{\alpha,\beta \in \Phi}$ die Cartan-Zahlen von Φ.

Zusammenfassung:

<u>Satz III.1.3</u> (i) Für $\alpha, \beta \in \Phi$ ist $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ und $\beta - \beta(h_\alpha)\cdot\alpha \in \Phi$.

(ii) Für $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$ gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

(iii) Für $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta \neq \pm\alpha$ seien $r, q \in \mathbb{Z}$ maximal mit $\beta - r\alpha, \beta + q\cdot\alpha \in \Phi$. Dann gilt $\beta + i\cdot\alpha \in \Phi$ für alle $-r \le i \le q$ und $\beta(h_\alpha) = r - q$.

(iv) Die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ für $\alpha \in \Phi$ erzeugen $\mathfrak{g}$. □

III.2 Geometrie des Wurzelsystems

Für $\alpha, \beta \in h^*$ setze $(\alpha, \beta) = B(t_\alpha, t_\beta)$. Wegen III.1.1.(i) gibt es eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von h^* aus Wurzeln $\alpha_i \in \Phi$.

Prop. III.2.1 Für $\beta \in \Phi$ sei $\beta = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i$ mit $c_i \in K$. Dann gilt $c_i \in \mathbb{Q} \subseteq K$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Anwenden von $\frac{2(\cdot, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$ liefert das LGS

$$\underbrace{\frac{2(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}}_{\beta(h_{\alpha_j}) = b_j \in \mathbb{Z}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}}_{= \alpha_i(h_{\alpha_j}) = a_{ij} \in \mathbb{Z} \ (\text{III.1.3.(i)})} \cdot c_i \iff A \cdot c = b$$

mit $A = (a_{ij})^T$, $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in K^n$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{Z}^n$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$. Es gilt $\det_K A = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)} \right) \det_K((\alpha_i, \alpha_j)) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, weil B nicht ausgeartet ist. Also hat das LGS eine eindeutige Lösung $c \in \mathbb{Q}^n$. □

Für $E_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\Phi \subseteq h^*$ folgt somit $\dim_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}} = n$.

Außerdem gilt für $\lambda, \mu \in h^*$, dass

$$(\lambda, \mu) = B(t_\lambda, t_\mu) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\lambda) \cdot \alpha(t_\mu) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \lambda) \cdot (\alpha, \mu).$$

Insbesondere

$$(\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \beta)^2 \iff \frac{1}{(\beta, \beta)} = \sum_{\alpha \in \Phi} \left(\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \right)^2 \in \mathbb{Q}$$

für $\beta \in \Phi$, d.h. $(\beta, \beta) \in \mathbb{Q}$, weil $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}$, also auch $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$. Daher ist $B|_{E_{\mathbb{Q}}}$ eine nicht ausgeartete symm. $\mathbb{Q}$-Bilinearform. Für $\lambda \in E_{\mathbb{Q}}$ gilt

$(\lambda,\lambda) = \sum_{\alpha\in\Phi} (\alpha,\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$, also ist $(\cdot,\cdot)$ positiv definit.
Deshalb wird $E = \mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$ durch $B|_{E_{\mathbb{Q}}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ zu einem euklidischen Raum. Somit:

Satz III.2.2 (i) $E \cong \mathbb{R}\Phi$, $0 \notin \Phi$.
(ii) Sei $\alpha \in \Phi$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt $c\cdot\alpha \in \Phi \Leftrightarrow c = \pm 1$.
(iii) Für $\alpha, \beta \in \Phi$ ist $\beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\cdot\alpha \in \Phi$.
(iv) Für $\alpha, \beta \in \Phi$ ist $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$. □

III.3 Abstrakte Wurzelsysteme

Setze $\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$. Beobachtung: $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta,\alpha\rangle\alpha$ ist die Reflexion in der Ebene von E mit Normale α.

Def. III.3.1 Sei E ein euklidischer Raum. Eine endliche Teilmenge $\Phi \subset E$ heißt (abstraktes, reduziertes) Wurzelsystem, falls
(W1) $E \cong \mathbb{R}\cdot\Phi$, $0 \notin \Phi$.
(W2) Sei $\alpha \in \Phi$. Die einzigen Vielfachen von α in Φ sind $\pm\alpha$.
(W3) Für $\alpha \in \Phi$ gilt $\sigma_\alpha(\Phi) \subseteq \Phi$.
(W4) Für $\alpha, \beta \in \Phi$ gilt $\langle \beta, \alpha\rangle \in \mathbb{Z}$.
Der Rang von Φ ist $n = \dim_{\mathbb{R}} E$.

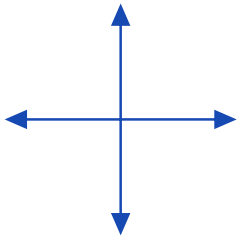
Def. III.3.2 Die Weyl-Gruppe von Φ ist
$$W = \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Phi \rangle \subset GL(E).$$
Wegen (W3) und (W1) ist W endlich.

Beispiele.

Rang 1: A_1:

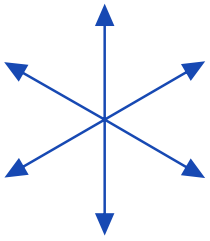
$W \cong \mathbb{Z}/2$.

Rang 2: $A_1 \times A_1$:



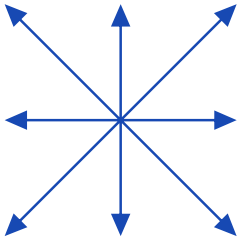
$W \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

A_2:



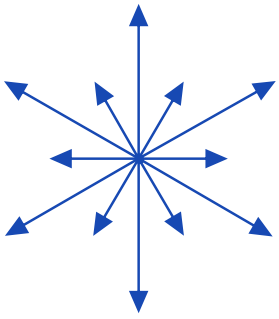
$W \cong S_3$.

B_2:



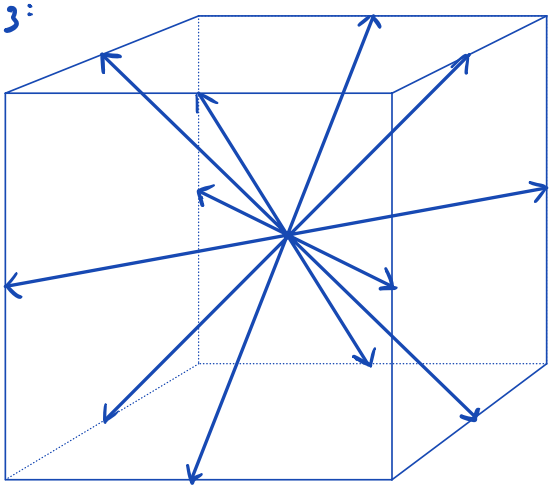
$W \cong (\mathbb{Z}/2)^2 \rtimes \mathbb{Z}/2$

G_2:



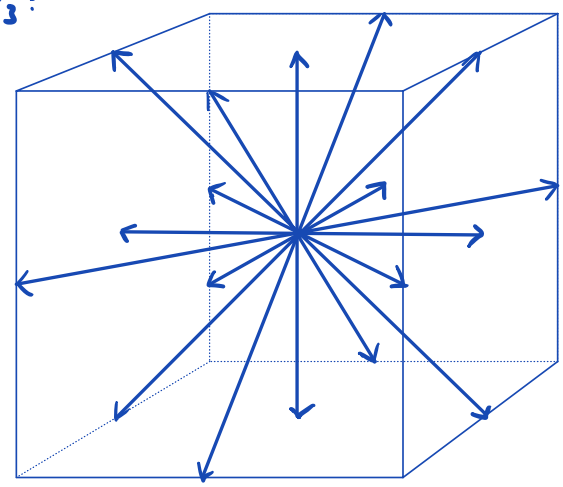
$W \cong D_6$

Rang 3 : A_3 :



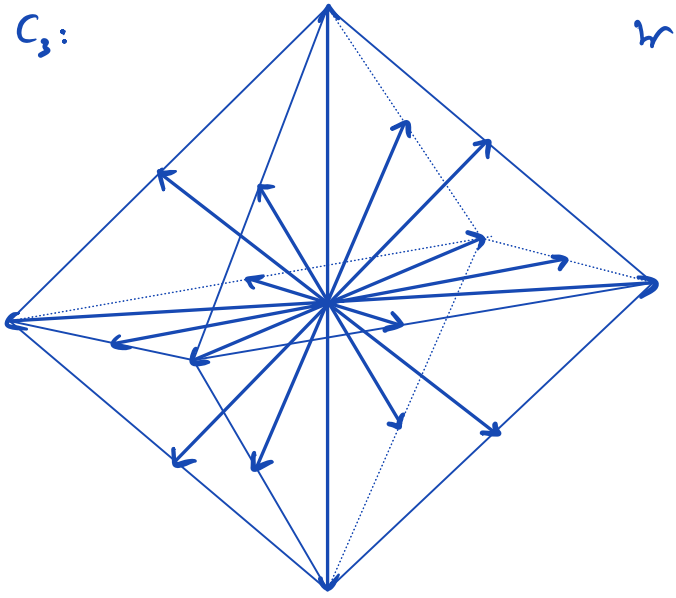
$W \cong S_4$

B_3 :



$W \cong (\mathbb{Z}/2)^3 \rtimes S_3$

C_3 :



$W \cong (\mathbb{Z}/2)^3 \rtimes S_3$

Def. III.3.3 Ein Morphismus von Wurzelsystemen $(E, \Phi) \to (E', \Phi')$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abb. $f: E \to E'$ mit $f(\Phi) \subseteq \Phi'$ und $\langle f(\beta), f(\alpha)\rangle = \langle \beta, \alpha\rangle$.

Damit sind auch Isomorphismen und Automorphismen definiert. Beachte: $\sigma_{f(\alpha)}(f(\beta)) = f(\beta) - \langle f(\alpha), f(\beta)\rangle \cdot f(\alpha)$
$= f(\beta - \langle \alpha, \beta\rangle \cdot \alpha) = f(\sigma_\alpha(\beta))$. Ist f ein Iso., ist also $W(\Phi) \to W(\Phi')$, $\sigma \mapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}$ ein Iso. von Gruppen. Wir haben eine Inklusion $W(\Phi) \leq \mathrm{Aut}\,\Phi$ (Injektivität braucht Nachweis!). HA: $W(\Phi) \trianglelefteq \mathrm{Aut}\,\Phi$.

Es gilt

$$\langle \beta, \alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\cdot\cos\theta \quad \text{mit } \theta = \sphericalangle(\beta,\alpha),$$

also

$$\underbrace{\langle \beta, \alpha\rangle}_{\in\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\langle \alpha, \beta\rangle}_{\in\mathbb{Z}} = 4\cos^2\theta \in \{0,1,2,3,4\} \quad (W4)$$

Es bleiben nur folgende Möglichkeiten, falls $\beta \neq \pm\alpha$, $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$:

$\langle \alpha, \beta\rangle$	$\langle \beta, \alpha\rangle$	θ	$\|\beta\|/\|\alpha\|$
0	0	$\pi/2$	–
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	$\sqrt{2}$
-1	-2	$3\pi/4$	$\sqrt{2}$
1	3	$\pi/6$	$\sqrt{3}$
-1	-3	$5\pi/6$	$\sqrt{3}$

Beobachtung. Falls $(\alpha,\beta) > 0$, ist $\alpha - \beta \in \Phi$.

Def. III.3.4 Eine Basis von (E, Φ) ist eine Teilmenge $\Delta \subset \Phi$, sd:

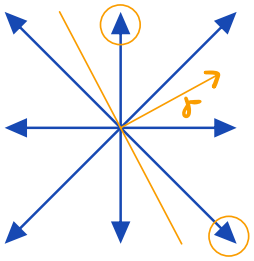
(i) Δ ist eine Basis von E.

(ii) Für jedes $\alpha \in \Phi$ gilt $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} k_\beta \cdot \beta$, sodass entweder $k_\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für alle $\beta \in \Delta$ oder $k_\beta \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ für alle $\beta \in \Delta$.

Entsprechend heißt α positiv oder negativ.

Ist Δ gewählt, nennen wir jedes $\alpha \in \Delta$ einfache Wurzel.

Konstruktion: Wähle $\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} (\mathbb{R}\alpha)^\perp$ (regulärer Vektor) und setze $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi : (\gamma, \alpha) > 0\}$. Dann gilt $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$. Wir nennen $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ zerlegbar, falls $\alpha = \beta + \delta$ mit $\beta, \delta \in \Phi^+(\gamma)$. Dann bilden die unzerlegbaren Wurzeln in $\Phi^+(\gamma)$ eine Basis $\Delta = \Delta(\gamma)$ und jede Basis entsteht so.



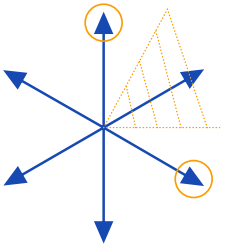
Beobachtung. Aus $\alpha, \beta \in \Delta$ und $\alpha \neq \beta$ folgt $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Def. III.3.5 Die Zusammenhangskomponenten von $E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} (\mathbb{R}\alpha)^\perp$ heißen (offene) Weyl-Kammern.

Für eine Basis $\Delta \subset \Phi$ heißt

$$\mathcal{C}(\Delta) = \bigcap_{\alpha \in \Delta} \{x \in E : (x, \alpha) > 0\}$$

die fundamentale Weyl-Kammer von Δ. Jede Weyl-Kammer ist fundamental für genau ein $\Delta \subset \Phi$.



Es gilt

$$\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma') \iff \Delta(\gamma) = \Delta(\gamma') \iff \mathcal{C}(\Delta(\gamma)) = \mathcal{C}(\Delta(\gamma'))$$

und für $\sigma \in W(\Phi)$ folgt aus $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$, dass

$$\sigma(\Phi^+(\gamma)) = \Phi^+(\sigma(\gamma)),\ \sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma)),\ \sigma(\mathcal{C}(\Delta(\gamma))) = \mathcal{C}(\Delta(\sigma\gamma))$$

- W wirkt einfach transitiv auf den Weyl-Kammern (Basen, Mengen positiver Wurzeln).
- Es gilt $W = \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Delta \rangle$.

<u>Def. III.3.6</u> Wir nennen (E, Φ) irreduzibel, falls aus $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ mit $\Phi_1 \perp \Phi_2$ folgt, dass $\Phi_1 = \emptyset$ oder $\Phi_2 = \emptyset$.

Definieren wir Irreduzibilität für Basen genauso, gilt Φ irr. $\iff$ Δ irr.

<u>Prop. III.3.7</u> Sei Φ irr. Dann ist $W \curvearrowright E$ irr.

<u>Bew.</u> Ist $\{0\} \neq E' \subseteq E$ W-invariant, so auch $E'^{\perp}$.
Für $\alpha \in \Phi$ gilt $\alpha \in E'$ oder $E' \subseteq (\mathbb{R}\alpha)^{\perp}$ ($\iff \alpha \in E'^{\perp}$) (HA 7.1). Weil Φ irr., folgt $\Phi \subset E'$ oder $\Phi \subset E'^{\perp}$.
Weil $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} = E$, muss $\Phi \subset E'$, also $E' = E$. □

<u>Prop. III.3.8</u> Sei Φ irr. Dann gibt es höchstens zwei verschiedene Wurzellängen in Φ und die Bahnen von $W \curvearrowright \Phi$ sind die Wurzeln gleicher Länge.

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\|\beta\|$ maximal. Nach III.3.7 ist $\langle V, \alpha \rangle_{\mathbb{R}} = E$, also o.B.d.A. $(\alpha, \beta) \neq 0$. Dann gilt $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \in \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$. Würden alle drei Fälle auftreten, gäbe es $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$ mit $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha_1\|} = \sqrt{2}$, $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha_2\|} = \sqrt{3}$, aber dann $\frac{\|\alpha_2\|}{\|\alpha_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, Widerspruch.

Seien nun $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\|\alpha\| = \|\beta\|$, wieder o.B.d.A. $(\alpha, \beta) \neq 0$. Dann gilt $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1$. Weil $\sigma_\beta(\beta) = -\beta$, o.B.d.A. $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$. Dann gilt $(\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha)(\beta) =$

$= \sigma_\alpha \sigma_\beta (\beta - \alpha) = \sigma_\alpha (\beta - \alpha - \beta) = \alpha$. □

III.4 Klassifizierung der Wurzelsysteme

Sei (E, Φ) ein Wurzelsystem mit Weyl-Gruppe W und Basis $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Phi$.

Def. III.4.1 Wir nennen $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle) \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ die Cartan-Matrix von Φ.

- Wohldefiniert, weil W transitiv auf den Basen operiert.
- Invertierbar wie im Beweis von III.2.1.

Beispiele.

$A_1 \times A_1$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, A_2: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, B_2: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, G_2: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Beobachtung. Gilt für (E', Φ'), $\Delta' = \{\alpha_1', \dots, \alpha_n'\} \subset \Phi'$, dass $\langle \alpha_i', \alpha_j' \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$, dann def. $\alpha_i \mapsto \alpha_i'$ einen Iso. $(E, \Phi) \xrightarrow{\sim} (E', \Phi')$.

→ Wurzelsysteme sind durch die Cartan-Matrizen eindeutig bestimmt. Umgekehrt lässt sich aus einer Cartan-Matrix das Wurzelsystem zurückgewinnen (Wurzelketten!)

Def. III.4.2 Der Coxeter-Graph von Φ hat Eckenmenge Δ und für $i \neq j$ sind α_i und α_j durch $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \cdot \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$ Kanten verbunden.

Beispiele.

A_1: , $A_1 \times A_1$: , A_2: , B_2: , G_2: ,

A_3: , B_3: , C_3: .

Um die Cartan-Matrix aus dem Coxeter-Graph zurückzugewinnen, fehlt die Info, welche Wurzel größer ist, falls oder . Füge entsprechend „<" oder „>" hinzu und erhalte das Dynkin-Diagramm von Φ:

B_2: , G_2: , B_3: , C_3: .

Beobachtung · Φ irr. $\Leftrightarrow$ Δ irr. $\Leftrightarrow$ Dynk.-Diag. zshgd.

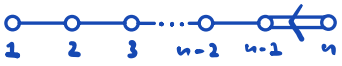
· Haben für allgemeines Φ eine eindeutige Zerlegung $\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_r$ in $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ mit $E_i \perp E_j$ für $i \neq j$ und (E_i, Φ_i) irr.

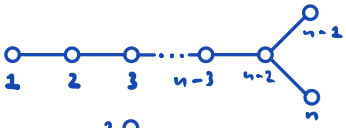
Wir müssen also noch die irreduziblen Wurzelsysteme oder äquivalent die zshgden. Dynkin-Diagramme klassifizieren.

Satz III.4.3 Die Isomorphieklassen irreduzibler Wurzelsysteme vom Rang n entsprechen 1:1 folgenden Dynkin-Diagrammen:

A_n $(n \geq 1)$:

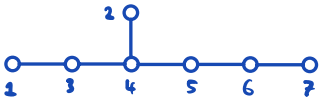
B_n $(n \geq 2)$:

C_n $(n \geq 3)$: 

D_n $(n \geq 4)$: 

Klassische Typen

E_6:

E_7: 

E_8:

F_4:

G_2:

Ausnahmetypen

Bew. z.z.: 1.) Isomorphe Wurzelsysteme haben gleiche Dynkin-Diagramme.

2.) Nur die gelisteten Dynkindiagramme können auftreten.

3.) Wurzelsysteme mit gleichem Dynkin-Diagramm sind isomorph.

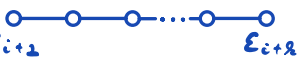
4.) Jedes gelistete Diagramm ist Dynkin-Diagramm eines Wurzelsystem.

1.) + 3.) sind klar, weil das Dynkin-Diagramm nur eine kompakte Notation für die Cartan-Matrix ist.

Zu 2.) Zeigen äquivalent, dass nur die zugrundeliegenden Coxeter-Graphen auftreten können. Dazu nennen wir eine Teilmenge $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ lin. unabh. Einheitsvektoren eines euklidischen Raums $(E, (\cdot,\cdot))$ zulässig, falls $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0$ für $i \neq j$ und $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ für $i \neq j$. Beachte: $\Delta \subseteq \Phi$ wird zulässig, indem man jedes $\alpha \in \Delta$ durch $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ ersetzt. Wie zuvor entsteht ein Graph Γ mit n Knoten, indem für $i \neq j$ der i-te mit dem j-ten durch $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2$ Kanten verbunden ist.
Zu bestimmen: die durch zulässige Mengen entstehenden zusammenhängenden Graphen. Beobachtungen:
(i) $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n\}$ ist wieder zulässig und entspricht Entfernen des i-ten Knoten mitsamt seinen Kanten.
(ii) Die Anzahl der Paare verbundener Knoten ist $< n$:
Es gilt $0 < \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \|^2 = n + 2 \sum_{i<j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ und $\left((\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0 \Rightarrow 2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq -1\right)$.
(iii) Γ hat (als einfacher Graph) keine Zyklen:
Folgt aus (i) und (ii).

(iv) Höchstens drei Kanten beginnen an jedem Knoten in Γ:
Sei ε einer der zulässigen Vektoren und ε sei verbunden mit
$\eta_1, \dots, \eta_s$. Aus (iii) folgt $(\eta_i, \eta_j) = 0$ für $i \neq j$. Sei
$\eta_0 \in \{\eta_1, \dots, \eta_s\}^\perp \subseteq \langle \varepsilon, \eta_1, \dots, \eta_s \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\|\eta_0\| = 1$.
Dann gilt $(\varepsilon, \eta_0) \neq 0$ und deshalb folgt aus
$1 = \|\varepsilon\|^2 = \sum_{i=0}^{n} (\varepsilon, \eta_i)^2$, dass $\sum_{i=1}^{n} 4(\varepsilon, \eta_i)^2 < 4$.

(v) Eine Dreifachkante gibt es nur in $\Gamma =$:
Folgt aus (iv).

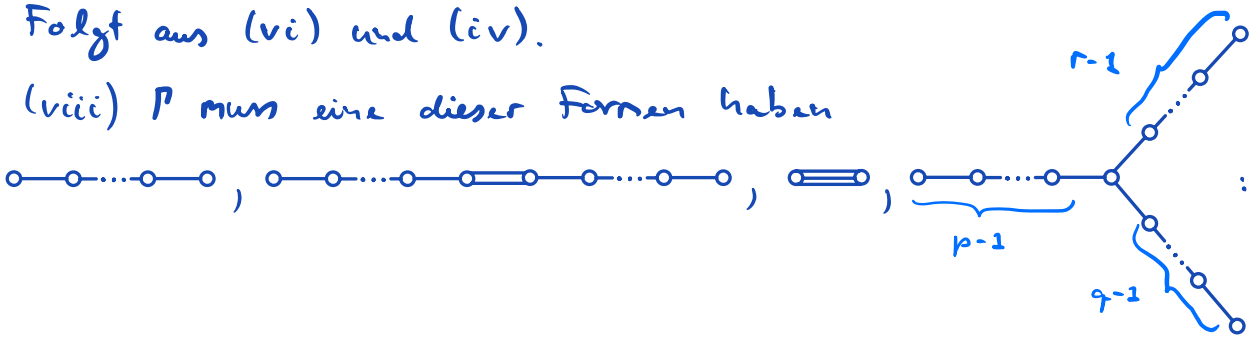
(vi) Jeder Typ-A_n Teilgraph 

kann durch einen Knoten ersetzt werden:
Wir zeigen $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \varepsilon_{i+s+1}, \dots, \varepsilon_n\} \cup \{\underbrace{\sum_{j=1}^{s} \varepsilon_{i+j}}_{=\varepsilon}\}$ ist zulässig.
Es gilt $\|\varepsilon\|^2 = s + \sum_{j<l} 2(\varepsilon_{i+j}, \varepsilon_{i+l}) = s + (s-1)\cdot(-1) = 1$.
Nach (iii) gilt für jedes $\eta \in \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \varepsilon_{i+s+1}, \dots, \varepsilon_n\}$,
dass $(\eta, \varepsilon) = 0$ oder $= (\eta, \varepsilon_{i+j_0})$ für ein $j_0 \in \{1, \dots, s\}$.
Es folgt $4(\eta, \varepsilon)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(vii) Γ hat keinen dieser Teilgraphen

Folgt aus (vi) und (iv).

(viii) Γ muss eine dieser Formen haben



Wegen (v) gibt es nur eine Dreifachkante. Gäbe es mehr als eine Doppelkante, hätte Γ einen Teilgraph im Widerspruch zu (vcc). Wenn Γ eine Doppelkante hat, gibt es keinen Teilgraph , denn sonst gäbe es auch im Widerspruch zu (vcc). Wegen (ccc) bleibt dann nur . Hat Γ nur Einfachkanten, kann Γ höchstens einen Teilgraph haben, weil andernfalls auftritt im Widerspruch zu (vcc). Wegen (ccc) bleiben nur der erste und letzte Graph.

(ix) Ist Γ von der Form ,
hat Γ Typ B_n/C_n oder Typ F_4:

Folgt etwas schwieriger mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungl.

(x) Ist Γ von der letzten Form in (vccc), hat Γ Typ D_n, E_6, E_7 oder E_8:

Folgt trickreich u.a. unter Herleitung der Ungleichung $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$.

Zu 4.) Die klassischen Typen entstehen als Wurzelsysteme der klassischen Matrixalgebren aus I.2.(cc). Für die fünf verbleibenden Ausnahmetypen kann man eine explizite Konstruktion angeben, z.B. für G_2: $\Phi = \pm\{\varepsilon_2-\varepsilon_1, \varepsilon_2-\varepsilon_3, \varepsilon_1-\varepsilon_3, 2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3, 2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3, 2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2\} \subset (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^{\perp} \subset \mathbb{R}^3$. □

III.5 Automorphismen von Wurzelsystemen

Nach HA 6.2 gilt $W(\Phi) \trianglelefteq \operatorname{Aut}\Phi$. Für eine feste Basis $\Delta \subset \Phi$ sei $\operatorname{Sym}\Delta = \{\sigma \in \operatorname{Aut}\Phi : \sigma(\Delta) = \Delta\}$. Für $\sigma \in \operatorname{Aut}\Phi$ und alle $\alpha, \beta \in \Phi$ gilt $\langle \sigma(\alpha), \sigma(\beta)\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$, also ist jedes $\sigma \in \operatorname{Sym}\Delta$ durch eine Symmetrie des Dynkin-Diagramms gegeben. Umgekehrt liefert jede solche Symmetrie durch Fortsetzen ein $\sigma \in \operatorname{Sym}\Delta$ und wir erkennen, dass $\operatorname{Sym}\Delta$ mit der Gruppe der Dynkin-Diagramm-Symmetrien identifiziert werden kann.

Lemma III.5.1 Es gilt $\operatorname{Aut}\Phi = W(\Phi) \rtimes \operatorname{Sym}\Delta$.

Beweis. Aus $\sigma \in W(\Phi) \cap \operatorname{Sym}\Delta$ folgt $\sigma = \mathrm{id}_E$, weil $W(\Phi)$ einfach transitiv auf der Menge der Basen wirkt. Für $\sigma \in \operatorname{Aut}\Phi$ ist $\sigma(\Delta)$ eine Basis, also gibt es $\tau \in W(\Phi)$ mit $\tau(\sigma(\Delta)) = \Delta$, d.h. $\sigma = \underset{W(\Phi)}{\tau^{-1}} \circ \underset{\operatorname{Sym}\Delta}{(\tau\circ\sigma)}$. □

Offensichtlich gilt für Typ A_n $(n \geq 2)$, D_n $(n \geq 5)$ und E_6, dass $\operatorname{Sym}\Delta \cong \mathbb{Z}/2$ und $\operatorname{Sym}\Delta \cong S_3$ für Typ D_4 („Trialität"). In allen anderen Typen gilt $\operatorname{Sym}\Delta = 1$.

III.6 Konjugations-, Isomorphie- und Existenzsatz

Klassifizierungsschema (Erinnerung: $\operatorname{char} K = 0$, $\bar{K} = K$).

$$\{\mathfrak{g} \text{ einfach}\}/\!\cong \;\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\; \{(E,\Phi) \text{ irr. Wurzelsys.}\}/\!\cong \;\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\; \{\text{zshgd. Dynkin-Diag.}\}/\!\cong$$

Noch zu erledigen:

1.) Wohldefiniert: Unabh. von der Wahl einer CSA $h \leq \mathfrak{g}$.

2.) Injektiv: Gilt für $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$, dass $(E, \Phi) \equiv (E', \Phi')$, folgt $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$.

3.) Surjektiv: Ist Φ irr., gibt es $\mathfrak{g}$ einfach mit Wurzelsys. Φ.

Satz III.6.1. Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach mit CSAs $h, h' \leq \mathfrak{g}$.
Dann gibt es $f \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ mit $f(h') = h$.

Bew. Aufwendig [Humphreys, §§ 15-16]. □

Satz III.6.2 Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ einfach mit CSAs $h \leq \mathfrak{g}$, $h' \leq \mathfrak{g}'$, sodass $\Phi \equiv \Phi'$ (induziert $f: h \to h'$). Sei $\Delta \subset \Phi$ eine Basis (induziert $\Delta' \subset \Phi'$). Seien $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ für $\alpha \in \Delta$ und $0 \neq X'_\alpha \in \mathfrak{g}'_{\alpha'}$ bel.
Dann gibt es einen eindeutigen Isom. $F: \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'$ mit $F|_h = f$ und $F(X_\alpha) = X'_\alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$.

Bew. Seien $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $Y'_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'_{-\alpha'}$ für $\alpha \in \Delta$ wie in III.1.1.(vi). Sei $D \leq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ erzeugt von $\{ X_\alpha \oplus X'_{\alpha'}, Y_\alpha \oplus Y_{\alpha'}, h_\alpha \oplus h'_{\alpha'} : \alpha \in \Delta \}$. Dann gilt für die Projektionen

$$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}' \underset{p'}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \begin{matrix} \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' \end{matrix},$$

dass $p|_D$ und $p'|_D$ jeweils Isom. sind [H., § 14.2]. □

Für eine Menge X heißt $\mathfrak{F}(X) = \langle X \rangle_{\text{Lie-Alg.}} \subset \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{k=0}^{n} KX$ mit Kommutatorklammer die freie Lie-Algebra über X.

Satz III.6.3 (Serre) Sei Φ irr. mit Basis $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ und $\mathfrak{g}$ der Quotient von $\mathcal{F}\{x_i, y_i, h_i : 1 \le i \le n\}$ nach dem Ideal erzeugt von

- $[h_i, h_j]$,
- $[x_i, y_i] - h_i$, $[x_i, y_i]$ für $i \neq j$,
- $[h_i, x_j] - \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle x_j$, $[h_i, y_j] + \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle y_j$,
- $(\operatorname{ad} x_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(x_j)$, $(\operatorname{ad} y_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(y_j)$.

Dann ist $\mathfrak{g}$ endl. dim. einfach mit CSA $\langle h_i \rangle_K$ und $\Phi(\mathfrak{g}) = \Phi$.

Bew. [H., § 18]. □

III.7 Automorphismen einfacher Lie-Algebren

Satz III.7.1 Sei $\mathfrak{g}$ einfach mit CSA $\mathfrak{h} \le \mathfrak{g}$ und Basis $\Delta \subset \Phi$. Dann gilt $\operatorname{Aut} \mathfrak{g} \cong \operatorname{Int} \mathfrak{g} \rtimes \operatorname{Sym} \Delta$.

Bew. Aus Satz III.6.2 erhalten wir für jedes $\sigma \in \operatorname{Aut} \Phi$ ein $\overline{\sigma} \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ mit $\overline{\sigma}|_\Phi = \sigma$ und $\overline{(\cdot)} : \operatorname{Sym} \Delta \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ definiert eine Inklusion als Untergruppe.

Sei $g \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ beliebig. Nach III.6.1 gibt es $f \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ mit $f(g(h)) = h$ und wir erhalten $f \circ g|_\Phi = \sigma \in \operatorname{Aut} \Phi$ (mit $\Phi \subset h \cong_B h^*$). Nach III.5.1 gibt es $\tau \in W(\Phi)$ mit $\tau\sigma \in \operatorname{Sym} \Delta$. Man kann nun $\overline{\tau} \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ so wählen, dass $g = (\overline{\tau} \circ f)^{-1} \circ (\overline{\tau\sigma})$ mit $(\overline{\tau} \circ f)^{-1} \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$, $\overline{\tau\sigma} \in \overline{\operatorname{Sym} \Delta}$.

Für $\operatorname{Int} \mathfrak{g} \cap \overline{\operatorname{Sym} \Delta} = \{1\}$ verweisen wir auf [Bourbaki, Lie VIII.5]. □

Blatt 1

1.) Rechnen Sie nach, dass $\mathfrak{so}_{2n}(K) \subset \mathfrak{gl}_{2n}(K)$ tatsächlich eine Unteralgebra ist.

2.) Zeigen Sie für $t_n(K) = d_n(K) \oplus n_n(K)$, dass
(i) $[d_n(K), n_n(K)] = n_n(K)$.
(ii) $[t_n(K), t_n(K)] = n_n(K)$.

3.) Die Matrix $x \in \mathfrak{gl}_n(K)$ habe n verschiedene Eigenwerte $a_1, \dots, a_n \in K$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ad} x$ die Eigenwerte $a_i - a_j$ mit $1 \leq i, j \leq n$ hat.

Blatt 2

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra über K.

1.) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{a} \equiv \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \text{ für alle } n \geq 0.$$

2.) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ halbeinfach ist.

3.) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}$ genau dann auflösbar ist, wenn es eine Folge

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \trianglerighteq \mathfrak{g}_2 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq \mathfrak{g}_k = \{0\}$$

gibt mit $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ abelsch für $i = 0, \ldots, k-1$.

Blatt 3

1.) Sei $\mathfrak{g}$ nilpotent, $h \leq \mathfrak{g}$. Zeigen Sie, dass $h \leq n_{\mathfrak{g}}(h)$.

2.) Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, sodass $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ nilpotent ist und sodass $\mathrm{ad}(x)|_{\mathfrak{a}}$ nilpotent ist für alle $x \in \mathfrak{g}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}$ nilpotent ist.

3.) Zeigen Sie, dass jede nilpotente Lie-Algebra $\{0\} \neq \mathfrak{g}$ eine äußere Derivation besitzt.
(Hinweis: Nutze $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus K \cdot x$ mit $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Dann gilt $z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \neq \{0\}$. Wähle n maximal mit $z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{C}^n(\mathfrak{g})$ und ein beliebiges $z \in z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \setminus \mathfrak{C}^{n+1}(\mathfrak{g})$. Dann ist $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definiert durch $\delta|_{\mathfrak{a}} = 0$ und $\delta(x) = z$ eine äußere Derivation.)

Blatt 4

1.) Zeigen Sie, dass die Killing-Form B einer nilpotenten Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ verschwindet.

2.) Zeigen Sie, dass eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ genau dann auflösbar ist, wenn $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{Rad} B$.

3.) Finden Sie eine auflösbare Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit $B \neq 0$.

Hinweis: Auch in den Übungen gilt fortan $\operatorname{char} K = 0$ und $K = \bar{K}$.

Blatt 5

1.) Konstruieren Sie eine irreduzible $\mathfrak{sl}_2(K)$-Darstellung jeder Dimension ≥ 1.
(Hinweis: Lemma II.8.2. Zum Nachweis der Modulaxiome genügt es zu zeigen, dass die Endomorphismen $x_\cdot, h_\cdot, z_\cdot$ die selben Kommutatorrelationen wie x, y, z erfüllen.)

2.) Zeigen Sie, dass in den klassischen Lie-Algebren vom Typ A_n, B_n, C_n, D_n die Diagonalmatrizen eine CSA mit Dimension n bilden.

3.) Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach und $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ eine CSA. Zeigen Sie, dass $n_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Blatt 6

1.) Zeigen Sie, dass es keine halbeinfache Lie-Algebra der Dimension vier, fünf oder sieben gibt.

2.) Zeigen Sie, dass für jedes Wurzelsystem $\Phi \subset E$ die Weyl-Gruppe W ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}\,\Phi$ ist.

3.) Sei $\Phi \subset E$ ein Wurzelsystem. Für $\alpha \in E \setminus \{0\}$ sei $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ und $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee : \alpha \in \Phi\}$. Beweisen Sie, dass $\Phi^\vee$ ein Wurzelsystem ist und dass kanonisch $W(\Phi) \cong W(\Phi^\vee)$. Zeigen Sie außerdem, dass $\langle \alpha^\vee, \beta^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$ und zeichnen Sie $\Phi, \Phi^\vee \subset E$ für Φ vom Typ A_2, B_2, G_2. Gilt im Allgemeinen $\Phi \cong \Phi^\vee$?

Blatt 7

Sei (E, Φ) ein Wurzelsystem und $\Delta \subset \Phi$ eine Basis.

1.) Für einen Unterraum $E' \subseteq E$ und $\alpha \in \Phi$ gelte $\sigma_\alpha(E') = E'$. Zeigen Sie, dass entweder $\alpha \in E'$ oder $E' \subset (\mathbb{R}\alpha)^\perp$.

2.) Sei $\alpha \in \Phi$ einfach. Zeigen Sie $\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) \subseteq \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$.

3.) Sei $\varrho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$ und $\alpha \in \Delta$. Zeigen Sie $\sigma_\alpha(\varrho) = \varrho - \alpha$.

4.) Sei $\sigma \in W(\Phi)$ das eindeutige Element mit $\sigma(\Phi^+) = \Phi^-$. Zeigen Sie, dass in jeder Darstellung $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_\ell}$ von σ als reduziertes Wort mit $\alpha_i \in \Delta$ jedes σ_α für $\alpha \in \Delta$ vorkommen muss. Für welche irreduziblen Wurzelsysteme von Rang zwei und drei gilt $\sigma = -\mathrm{id}_E$?

Lösung 1

1.) Offensichtlich ist $\mathfrak{so}_{2n}(K) \leq \mathfrak{gl}_n(K)$ ein K-Untervektorraum. Seien $x, y \in \mathfrak{so}_{2n}(K)$, d.h. $x^T m + mx = 0$ und $y^T m + my = 0$ mit $m = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ und $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Dann gilt

$$[x,y]^T m + m[x,y] = (xy - yx)^T m + m(xy - yx) =$$
$$= y^T x^T m - x^T y^T m + mxy - myx =$$
$$= y^T(-mx) - x^T(-my) + (-x^T m)y - (-y^T m)x = 0.$$

2.) (i) Wir zeigen zunächst für jeden Basisvektor $e_i = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \overset{i}{1} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_i$ von $\mathfrak{d}_n(K)$, dass

$[e_i, x] \in \mathfrak{n}_n(K)$ für alle $x \in \mathfrak{n}_n(K)$.

In der Tat gilt

$$[e_i, x] = e_i \cdot x - x \cdot e_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ x_{i1} & \cdots & x_{in} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Weil $x_{i1} = \cdots = x_{ii} = 0$ und $x_{ii} = \cdots = x_{ni} = 0$, ist dies eine strikte obere Dreiecksmatrix.

Somit folgt $[\mathfrak{d}_n(K), \mathfrak{n}_n(K)] \leq \mathfrak{n}_n(K)$.

Sei I_{ij} die $(n \times n)$-Matrix $i \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ j. Dann gilt für $i > j$, dass $[e_i, I_{ij}] = I_{ij}$, also auch $\mathfrak{n}_n(K) \leq [\mathfrak{d}_n(K), \mathfrak{n}_n(K)]$.

(ii) „$\geq$" folgt sofort aus (i) und „$\leq$" folgt ebenfalls aus (i), weil $t_n(K) = d_n(K) \oplus n_n(K)$.

3.) Das charakt. Polynom von $x \in gl_n(K)$ zerfällt nach Annahme in verschiedene Linearfaktoren. Daher gibt es eine Basis aus EVen für x und wir dürfen annehmen $x = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$.
Dann gilt $ad_x(I_{ij}) = [x, I_{ij}] = xI_{ij} - I_{ij}x =$
$= a_i \cdot I_{ij} - a_j I_{ij} = (a_i - a_j) \cdot I_{ij}$.

Lösung 2

1.) Induktionsanfang: Es gilt $\mathcal{D}^0(\mathfrak{g})/\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \cong \mathcal{D}^0(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$.

Induktionsschritt: Sei $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ die kanonische Abbildung. Dann gilt $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})/\mathfrak{a} \cong \phi(\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})) \cong$

$= \phi([\mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g})]) = [\phi(\mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g})), \phi(\mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g}))]$

$= [\mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g})/\mathfrak{a}, \mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g})/\mathfrak{a}] \overset{I.V.}{\cong} [\mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}), \mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})]$

$= \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$. □

2.) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ auflösbar, $\mathfrak{b} = \phi^{-1}(\mathfrak{a})$ für $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. Dann ist $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, denn für $x \in \mathfrak{b}$, $y \in \mathfrak{g}$ gilt $\phi([y,x]) = [\phi(y), \phi(x)] \in \mathfrak{a}$, also $[y,x] \in \mathfrak{b}$. Außerdem ist $\mathfrak{b}$ auflösbar lt I.6.3, denn $\phi(\mathfrak{b})$ und $\mathfrak{b} \cap \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ sind auflösbar. Es folgt $\mathfrak{b} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$, also $\mathfrak{a} = \phi(\mathfrak{b}) = \{0\}$. □

3.) Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, liefert die derivierte Reihe

$$\mathfrak{g} = \mathcal{D}^0\mathfrak{g} \trianglerighteq \mathcal{D}^1\mathfrak{g} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq \mathcal{D}^s\mathfrak{g} = \{0\}$$

das Gewünschte, denn wegen $\mathcal{D}^{i+1}\mathfrak{g} = [\mathcal{D}^i\mathfrak{g}, \mathcal{D}^i\mathfrak{g}]$ ist $\mathcal{D}^i\mathfrak{g}/\mathcal{D}^{i+1}\mathfrak{g}$ nach Konstruktion abelsch.

Gibt es umgekehrt

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \trianglerighteq \mathfrak{g}_2 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq \mathfrak{g}_s = \{0\}$$

mit $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ abelsch, beweisen wir $D^i\mathfrak{g} \leq \mathfrak{g}_i$ durch Induktion nach i.

Induktionsanfang: $D^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$.

Induktionsschritt: Es gilt $D^{i+1}\mathfrak{g} = [D^i\mathfrak{g}, D^i\mathfrak{g}]$
$\overset{\text{I.V.}}{\leq} [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]$. Weil $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ abelsch ist, gilt für alle $x, y \in \mathfrak{g}_i$, dass $[x + \mathfrak{g}_{i+1}, y + \mathfrak{g}_{i+1}] = \mathfrak{g}_{i+1}$, d.h. $[x,y] + \mathfrak{g}_{i+1} = \mathfrak{g}_{i+1} \Leftrightarrow [x,y] \in \mathfrak{g}_{i+1}$.
Somit folgt $D^{i+1}\mathfrak{g} \leq [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \leq \mathfrak{g}_{i+1}$.

Weil $\mathfrak{g}_s = \{0\}$, schließen wir $D^s\mathfrak{g} = \{0\}$, d.h. $\mathfrak{g}$ ist auflösbar.

Lösung 3

1.) Anwenden von I.7.5 auf $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ liefert ein $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ mit $[\mathfrak{h}, x] \in \mathfrak{h}$ für alle $h \in \mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{h} \subsetneq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. □

2.) Weil $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ nilpotent ist, gibt es $N \gg 0$ mit $\mathfrak{C}^N(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \{0\}$, d.h. $\mathfrak{C}^N(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$. Somit ist $\mathrm{ad}(x)|_{\mathfrak{C}^N(\mathfrak{g})}$ nilpotent für alle $x \in \mathfrak{g}$ und daher $\mathfrak{C}^N(\mathfrak{g})$ nilpotent laut Satz von Engel. Es folgt, dass $\mathfrak{g}$ nilpotent ist. □

3.) Wir haben $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{g}$ der Kodimension eins: Weil $\mathfrak{g}$ nilpotent ist, gilt $0 < \dim \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Wähle einen beliebigen Unterraum $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ der Kodimension eins und setze $\mathfrak{a} = p^{-1}(\mathfrak{a}')$ für $p: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Wie schon gesehen gilt $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{g}$ und $\dim \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{a}' + \dim \mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$
$= (\dim \mathfrak{g} - \dim [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] - 1) + \dim [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$
$= \dim \mathfrak{g} - 1$.
Wählen wir $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$, folgt also $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus K \cdot x$ (Vektorraumzerlegung). Falls $\mathfrak{a} = \{0\}$, gilt $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g} \neq \{0\}$. Andernfalls gilt $Z(\mathfrak{a}) \neq \{0\}$, weil $\mathfrak{a}$

nilpotent ist. Wegen $Z(\mathfrak{a}) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ gilt also in jedem Fall $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \neq \{0\}$.

Sei n maximal mit $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \subseteq C^n(\mathfrak{g})$ und wähle $z \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \setminus C^{n+1}(\mathfrak{g})$, sowie $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$. Dann ist $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus K \cdot x$ und $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definiert durch $\delta|_{\mathfrak{a}} = 0$ und $\delta(x) = z$ eine Derivation, denn für $a_1 + \lambda_1 x,\ a_2 + \lambda_2 x \in \mathfrak{a} \oplus K \cdot x$ folgt

$$[a_1 + \lambda_1 x,\ a_2 + \lambda_2 x] = [a_1, a_2] + \lambda_1 [x, a_2] + \lambda_2 [a_1, x]$$

$\in \mathfrak{a}$, also $\delta([a_1 + \lambda_1 x,\ a_2 + \lambda_2 x]) = 0$ und andererseits gilt auch

$$[\delta(a_2 + \lambda_2 x),\ a_2 + \lambda_2 x] + [a_2 + \lambda_2 x,\ \delta(a_2 + \lambda_2 x)]$$
$$= [\lambda_1 z,\ a_2 + \lambda_2 x] + [a_1 + \lambda_1 x,\ \lambda_2 z] =$$
$$= \lambda_1 \lambda_2 [z, x] + \lambda_1 \lambda_2 [x, z] = 0.$$

Angenommen, es gäbe $y \in \mathfrak{g}$ mit $\delta = \operatorname{ad}(y)$. Dann würde gelten $[y, a] = \delta(a) = 0$, d.h. $y \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \subseteq C^n(\mathfrak{g})$, also

$$z = \delta(x) = [y, x] \in C^{n+1}(\mathfrak{g}),$$

Widerspruch. Somit ist δ eine äußere Derivation. □

Lösung 4

1.) Sei $\mathfrak{g}$ nilpotent und $x, y \in \mathfrak{g}$. Dann ist $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) \in \operatorname{End} \mathfrak{g}$ ein nilpotenter Endomorphismus, denn für alle $z \in \mathfrak{g}$ haben wir $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)^n (z) \in \mathcal{C}^{2n}\mathfrak{g}$ und $\mathcal{C}^n\mathfrak{g} = \{0\}$ für $n \gg 0$. Es folgt $B(x,y) = \operatorname{Spur}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$.

2.) Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Nach dem Satz von Lie gibt es eine Basis von $\mathfrak{g}$ bzgl. der $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{t}_n(K)$. Für $x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ gilt folglich $\operatorname{ad} x \in [\mathfrak{t}_n(K), \mathfrak{t}_n(K)] = \mathfrak{n}_n(K)$ und somit auch $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y \in \mathfrak{n}_n(K)$ für alle $y \in \mathfrak{g}$. Es folgt $B(x,y) = \operatorname{Spur}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$, also $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{Rad} B$. Die Umkehrung ist die Aussage von Korollar II.3.4.

3.) Betrachte die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit Basis $\{x,y\}$ und $[x,y] = x$. (Zum Nachweis der Jacobi-Identität genügt die Rechnung:

$$[y,[x,y]] + [x,[y,y]] + [y,[y,x]] = \\ = \quad -x \qquad\qquad +0 \qquad\qquad +x \qquad = 0.)$$

Es gilt $\mathcal{D}^2\mathfrak{g} = [Kx, Kx] = \{0\}$, also ist $\mathfrak{g}$ auflösbar. Bzgl. der Basis $\{x,y\} \subseteq \mathfrak{g}$ haben wir $\operatorname{ad} y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Also gilt $B(y,y) = \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

Lösung 5

1.) Wir definieren $V(m) = \langle v_0, v_1, \dots, v_m \rangle_K$ mit der $\mathfrak{sl}_2(K)$-Wirkung wie in II.8.2. und zeigen, dass dies einen Homomorphismus $\phi : \mathfrak{sl}_2(K) \to \mathfrak{gl}(V)$ definiert:

- $[h, x].v_i = (h.x - x.h).v_i = (m-i+1)h.v_{i-1}$
  $- (m-2i).x.v_i = (m-i+1)(m-2(i-1)).v_{i-1}$
  $- (m-2i)(m-i+1).v_{i-1} = 2.(m-i+1).v_{i-1}$
  $= 2 \cdot x.v_i = [h,x].v_i$

- $[h, y].v_i = (h.y - y.h).v_i = (i+1).h.v_{i+1} - (m-2i).y.v_i$
  $= (i+1).(m-2(i+1)).v_{i+1} - (m-2i)(i+1).v_{i+1}$
  $= (-2).(i+1).v_{i+1} = -2\,y.v_i = [h,y].v_i$

- $[x, y].v_i = (x.y - y.x).v_i = (i+1).x.v_{i+1}$
  $- (m-i+1)\,y.v_{i-1} = (i+1)(m-(i+2)+1).v_i$
  $- (m-i+1).i.v_i = (\cancel{im} - \cancel{i^2} - \cancel{i} + \cancel{i} + m - i - \cancel{1} + \cancel{1}$
  $- \cancel{mi} + \cancel{i^2} - i).v_i = (m-2i).v_i = h.v_i = [x,y].v_i.$

Sei $\{0\} \neq W \subseteq V(m)$ ein invarianter Unterraum und $0 \neq w \in \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i \in W$. Sei i_0 maximal mit $\lambda_{i_0} \neq 0$. Dann gilt $0 \neq (x.)^{i_0} w \in K \cdot v_0$, also folgt $W = V$, d.h. $V(m)$ ist irreduzibel.

2.) Sei $\mathfrak{g}$ eine der klassischen Lie-Algebren. Wegen II.7.2 bilden die Diagonalmatrizen eine torische Unteralgebra $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{g} \geq \mathfrak{t} \geq \mathfrak{d}$ torisch und $x \in \mathfrak{t}$, so ist x wieder wegen II.7.2 diagonalisierbar und kommutiert mit allen $y \in \mathfrak{d}$ wegen II.9.2. Weil aber in Typ

A_n: $\quad I_{i,i} - I_{n+2,n+2} \in \mathfrak{d}$ $\quad$ für $i = 1, \dots, n$,

B_n: $\quad I_{i,i} - I_{2n+3-i,2n+3-i} \in \mathfrak{d}$ $\quad$ für $i = 2, \dots, n+1$,

C_n, D_n: $\quad I_{i,i} - I_{2n+1-i,2n+1-i} \in \mathfrak{d}$ $\quad$ für $i = 1, \dots, n$,

ist die gemeinsame Eigenraumzerlegung von x und allen $y \in \mathfrak{d}$ bereits festgelegt, d.h. $x \in \mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}$ ist maximal torisch. Aus obiger Liste folgt zudem $\dim \mathfrak{d} = n$.

3.) Sei $x \in n_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Schreibe $x = h_0 + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha$ gemäß Cartan-Zerlegung. Dann gilt für alle $h \in \mathfrak{h}$, dass $\mathfrak{h} \ni [h, x] = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h) x_\alpha \in \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$, also $[h, x] \in \mathfrak{h} \cap \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$, d.h. $[h, x] = 0$ und somit $x \in z(\mathfrak{h}) \overset{\text{II.2.8}}{=} \mathfrak{h}$.

Lösung 6

1.) Weil Wurzeln in Paaren $\pm\alpha$ auftreten, ist $\dim \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ gerade, also $\dim \mathfrak{g} \equiv \dim \mathfrak{h}$ (2).

Würde also $\dim \mathfrak{g} = 4$ gelten, muss $\dim \mathfrak{h} = 2$, denn es gibt immer eine CSA $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ und $\mathfrak{g}$ ist nicht abelsch. Aber dann müsste $\Phi = \{\pm\alpha\}$ für ein $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ gelten im Widerspruch zu $\langle\Phi\rangle = \mathfrak{h}^*$.

Aus $\dim \mathfrak{g} = 5$ folgt $\dim \mathfrak{h} = 1$ oder 3. Falls $\dim \mathfrak{h} = 1$, muss $\Phi = \{\pm\alpha\}$, also $\dim \mathfrak{g} = 3$, Widerspruch. Falls $\dim \mathfrak{h} = 3$, muss ebenfalls $\Phi = \{\pm\alpha\}$, wieder im Widerspruch zu $\langle\Phi\rangle = \mathfrak{h}^*$.

Aus $\dim \mathfrak{g} = 7$ folgt zunächst $\dim \mathfrak{h} = 1, 3$ oder 5, aber wie eben schließen wir $\dim \mathfrak{h} = 1$ oder 5 aus. Falls $\dim \mathfrak{h} = 3$, muss $\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$, was erneut $\langle\Phi\rangle = \mathfrak{h}^*$ widerspricht.

2.) Sei $\sigma_\alpha \in W$ ein Erzeuger und $\tau \in \mathrm{Aut}\,\Phi$. Dann gilt für $\beta \in \Phi$, dass

$$\tau\sigma_\alpha\tau^{-1}(\beta) = \tau(\tau^{-1}(\beta) - \langle\tau^{-1}(\beta), \alpha\rangle\cdot\alpha) =$$

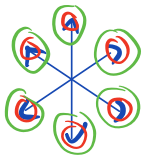
$$= \beta - \langle\beta, \tau(\alpha)\rangle\cdot\tau(\alpha) = \sigma_{\tau(\alpha)}(\beta).$$

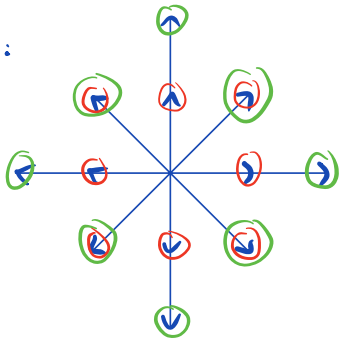
Weil $\mathbb{R}\Phi = E$, folgt $\tau\sigma_\alpha\tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha)}$ in $GL(E)$.

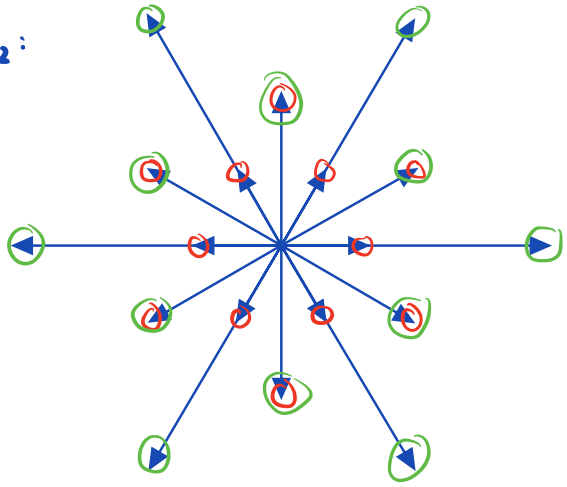
Weil jedes $g \in W$ von der Form $g = \sigma_{\alpha_1}\circ\sigma_{\alpha_2}\circ\cdots\circ\sigma_{\alpha_k}$

für $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \Phi$ ist, gilt $\tau g \tau^{-1} = \tau \sigma_{\alpha_1} \tau^{-1} \circ \dots \circ \tau \sigma_{\alpha_s} \tau^{-1}$
$= \sigma_{\tau(\alpha_1)} \circ \dots \circ \sigma_{\tau(\alpha_s)} \in W$.

3.) Die Axiome (W1) und (W2) sind für $\Phi^\vee$ klar.
Seien $\alpha^\vee, \beta^\vee \in \Phi^\vee$. Dann gilt $\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = \sigma_\alpha(\beta^\vee) =$
$= \sigma_\alpha\left(\frac{2\beta}{(\beta,\beta)}\right) = \frac{2}{(\beta,\beta)} \sigma_\alpha(\beta) = \frac{2\sigma_\alpha(\beta)}{(\sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\beta))} \in \Phi^\vee$.
Dies zeigt (W3). Schließlich gilt $\langle \beta^\vee, \alpha^\vee \rangle =$
$= \frac{2(\beta^\vee, \alpha^\vee)}{(\alpha^\vee, \alpha^\vee)} = \frac{2(\beta^\vee, \alpha)}{(\alpha^\vee, \alpha)} = \frac{2(\beta,\alpha)\cancel{(\alpha,\alpha)}}{(\beta,\beta)\cdot\cancel{(\alpha,\alpha)}} = \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.
Dies zeigt (W4). Der Isom. $W(\Phi) \cong W(\Phi^\vee)$ folgt
aus $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha^\vee}$ für alle $\alpha \in \Phi$. Die Identität
$\langle \beta^\vee, \alpha^\vee \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ haben wir gerade gesehen. Bilder:

A_2:  ist selbstdual

B_2: 

G_2: 

Im Allgemeinen gilt nicht $\Phi \cong \Phi^\vee$, z. B. $B_3^\vee = C_3$.

Lösung 7

1.) Falls es $x \in E'$ gibt mit $(x, \alpha) \neq 0$, dann gilt auch $\langle x, \alpha \rangle \neq 0$ und aus $x, \sigma_\alpha(x) \in E'$ folgt $\alpha = \frac{x - \sigma_\alpha(x)}{\langle x, \alpha \rangle} \in E'$.

2.) Sei $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$, $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$, $k_\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
Weil $\beta \neq \pm \alpha$, gibt es $\alpha \neq \gamma \in \Delta$ mit $k_\gamma > 0$.
Dieser Koeffizient bleibt in $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ erhalten, also muss $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+$ und außerdem $\sigma_\alpha(\beta) \neq \alpha$, weil schon $\sigma_\alpha(-\alpha) = \alpha$.

3.) Es gilt $\sigma_\alpha\left(\frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta\right) = \sigma_\alpha\left(\frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}} \beta\right) + \sigma_\alpha\left(\frac{\alpha}{2}\right) \overset{2.)}{=} \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}} \beta - \frac{\alpha}{2} = \rho - \alpha$.

4.) Sei $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \cdot \sigma_{\alpha_t}$ eine reduzierte Wortdarstellung mit $\alpha_i \in \Delta$. Angenommen $\Delta \ni \beta \neq \alpha_i$ für $i = 1, \ldots, t$.
Nach 2.) gilt $\sigma(\beta) \in \Phi^+$, Widerspruch.
Durch Inspektion erhält man für Φ irr. vom Rang 2 oder 3:
$\sigma = -\mathrm{id}_E \iff \Phi$ hat Typ B_2, G_2, B_3 oder C_3.
$\sigma \neq -\mathrm{id}_E \iff \Phi$ hat Typ A_2 oder A_3.
Für allgemeines irreduzibles Φ gilt

$-\mathrm{id}_E \notin W(\Phi) \iff \Phi$ hat Typ A_n, D_{2n+1} oder E_6.