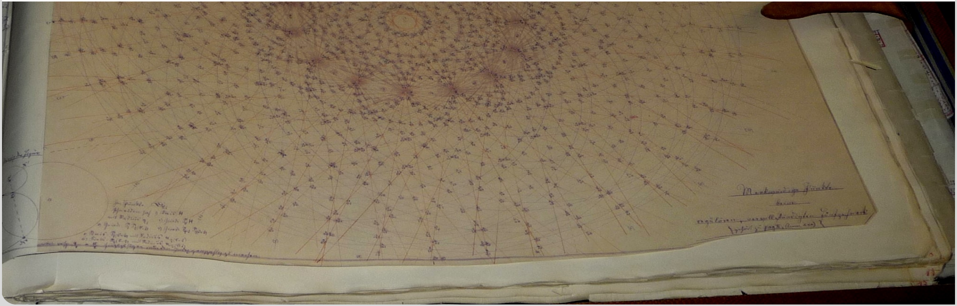
Karlsruher Institut für Technologie

Die Konstruktion des regelmäßigen 65.537-Ecks mit Zirkel und Lineal

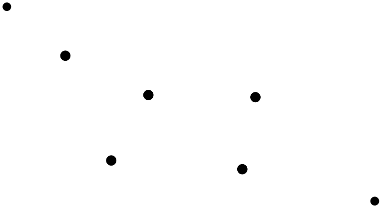
Tag der Mathematik

Dr. Holger Kammeyer | 16. März 2019

INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE

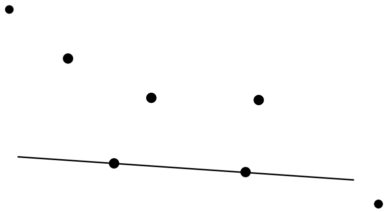


Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



Gegeben seien Punkte in der Ebene.

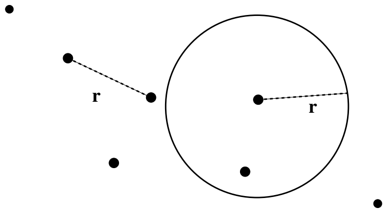
Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade ziehen, auf der zwei Punkte liegen.

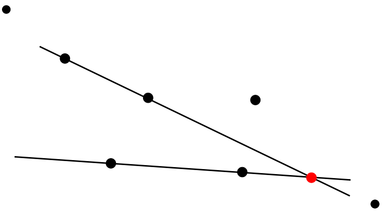
Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade ziehen, auf der zwei Punkte liegen.
- mit einem **Zirkel** einen Kreis um einen Punkt schlagen, dessen Radius der Abstand zweier Punkte ist.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

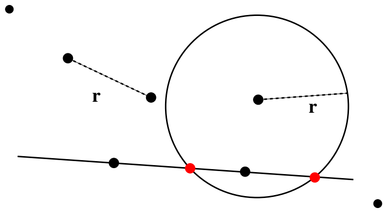


Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade ziehen, auf der zwei Punkte liegen.
- mit einem **Zirkel** einen Kreis um einen Punkt schlagen, dessen Radius der Abstand zweier Punkte ist.

Entstehen dabei **Schnittpunkte** von **Geraden und Geraden,**

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

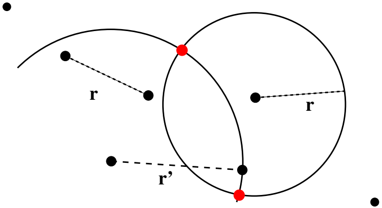


Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade ziehen, auf der zwei Punkte liegen.
- mit einem **Zirkel** einen Kreis um einen Punkt schlagen, dessen Radius der Abstand zweier Punkte ist.

Entstehen dabei **Schnittpunkte** von **Geraden und Geraden, Geraden und Kreisen**

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

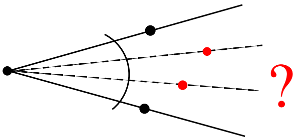


Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade ziehen, auf der zwei Punkte liegen.
- mit einem **Zirkel** einen Kreis um einen Punkt schlagen, dessen Radius der Abstand zweier Punkte ist.

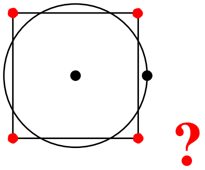
Entstehen dabei **Schnittpunkte** von **Geraden und Geraden, Geraden und Kreisen** oder **Kreisen und Kreisen,** gelten diese Punkte als **konstruiert** und dürfen für neue Konstruktionen verwendet werden.

Berühmte Konstruktionsaufgaben



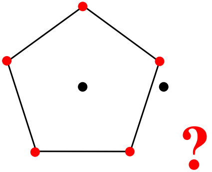
- Gegeben ein beliebiger Winkel. Teile ihn in drei gleiche Teile!

Berühmte Konstruktionsaufgaben



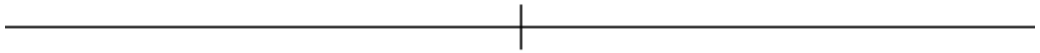
- Gegeben ein beliebiger Winkel. Teile ihn in drei gleiche Teile!
- Gegeben ein Kreis. Konstruiere ein flächengleiches Quadrat!

Berühmte Konstruktionsaufgaben



- Gegeben ein beliebiger Winkel. Teile ihn in drei gleiche Teile!
- Gegeben ein Kreis. Konstruiere ein flächengleiches Quadrat!
- Gegeben n und zwei Punkte. Konstruiere das regelmäßige n-Eck!

Die Konstruktion des Fünfecks



Konstruierbare n-Ecke

Schon die alten Griechen beschäftigten sich mit Konstruktionsproblemen. Diese Tabelle gibt eine Übersicht, welche n-Ecke sie konstruieren konnten.

n	3	4	5	6	7	8	9
n-Eck konstruierbar?	ja	ja	ja	ja	?	ja	?

10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\cdots$
ja	?	ja	?	?	ja	ja	?	?	$\cdots$

Danach gab es in dieser Frage etwa **2.000 Jahre** lang keinen Fortschritt.

Carl Friedrich Gauß

(* 30. April 1777 in Braunschweig, † 23. Februar 1855 in Göttingen)

Der Konstruierbarkeitssatz

Satz (Gauß, 1796)

Das regelmäßige **Siebzehneck** *ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.*

Satz (Gauß $\sim$1798, Wantzel 1837)

Sei $n \geq 3$. Das regelmäßige n-Eck ist dann und nur dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n = 2^k$ oder $n = 2^k p_1 \cdots p_l$ ist mit paarweise verschiedenen **Fermatschen Primzahlen** *$p_1, \ldots, p_l$.*

- Eine **Fermatsche Primzahl** ist eine Primzahl p der Form $p = 2^{2^m} + 1$.
- Für $m = 0, 1, 2, 3, 4$ erhält man die Primzahlen $3, 5, 17, 257, 65.537$.
- Es ist nicht bekannt, ob es noch weitere Fermatsche Primzahlen gibt.

Konstruierbare n-Ecke

Die Tabelle der alten Griechen können wir nun vervollständigen.

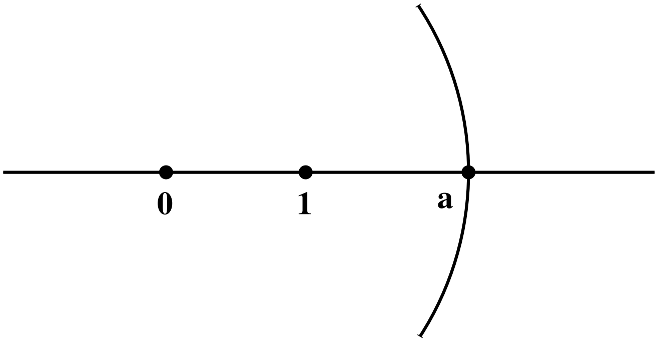
n	3	4	5	6	7	8	9
n-Eck konstruierbar?	ja	ja	ja	ja	nein	ja	nein

10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\cdots$
ja	nein	ja	nein	nein	ja	ja	ja	nein	$\cdots$

Was steckt hinter dem Konstruierbarkeitssatz?

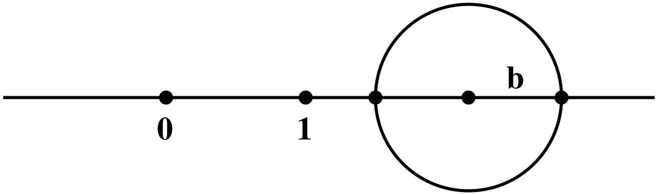
Rechnen mit Zirkel und Lineal

Man kann **addieren** und **subtrahieren**...



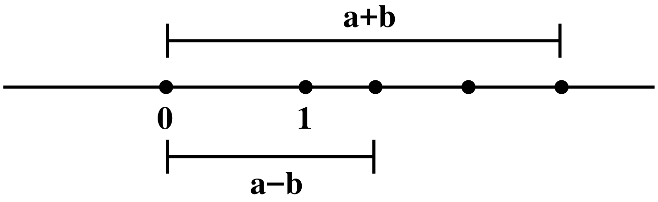
Rechnen mit Zirkel und Lineal

Man kann **addieren** und **subtrahieren**...



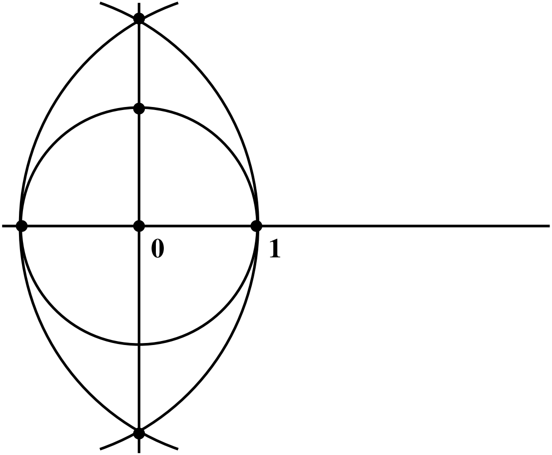
Rechnen mit Zirkel und Lineal

Man kann **addieren** und **subtrahieren**...



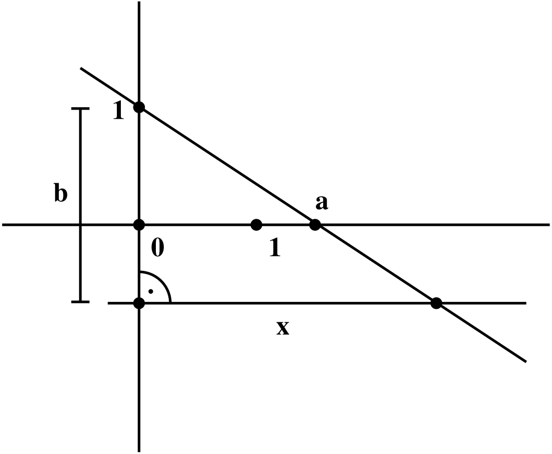
Rechnen mit Zirkel und Lineal

...**multiplizieren**, indem man zunächst ein Koordinatenkreuz konstruiert...



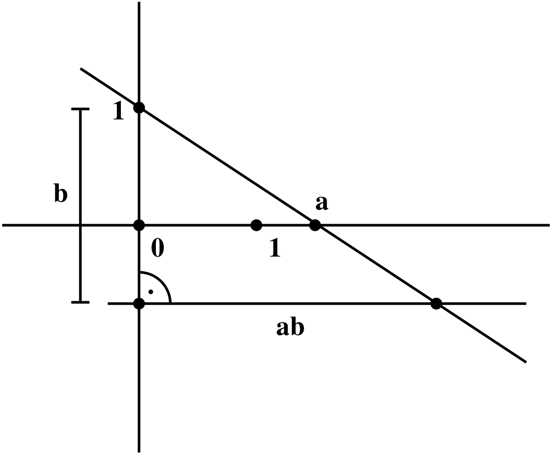
Rechnen mit Zirkel und Lineal

...dann aus den Längen *a* und *b* folgende Figur erstellt...



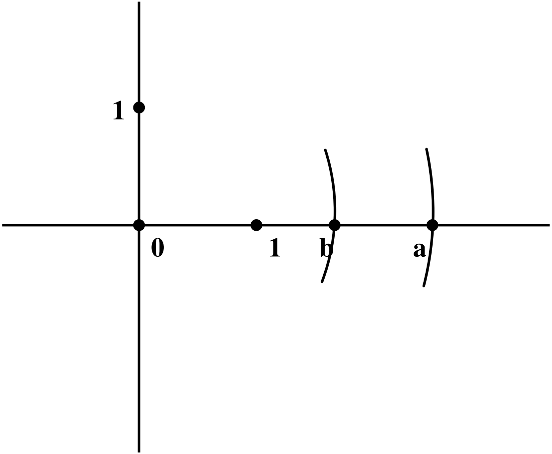
Rechnen mit Zirkel und Lineal

...um mit dem **Strahlensatz** zu schließen $\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$, also $x = a \cdot b$.



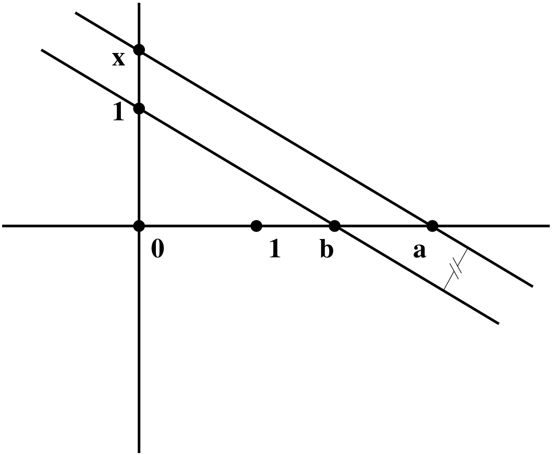
Rechnen mit Zirkel und Lineal

So ähnlich kann man auch **dividieren**.



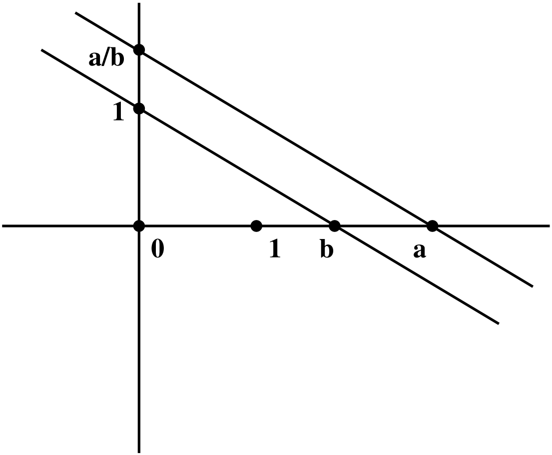
Rechnen mit Zirkel und Lineal

Man konstruiert die Parallele. Der **Strahlensatz** gibt $\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$,



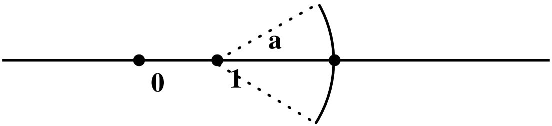
Rechnen mit Zirkel und Lineal

Man konstruiert die Parallele. Der **Strahlensatz** gibt $\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$, also $x = \frac{a}{b}$.



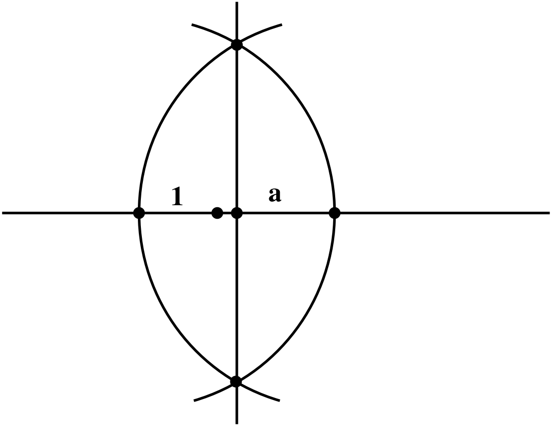
Rechnen mit Zirkel und Lineal

Letzte Konstruktion: **Wurzel ziehen**.



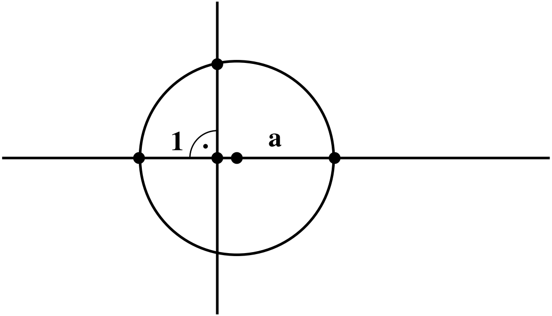
Rechnen mit Zirkel und Lineal

Letzte Konstruktion: **Wurzel ziehen**.



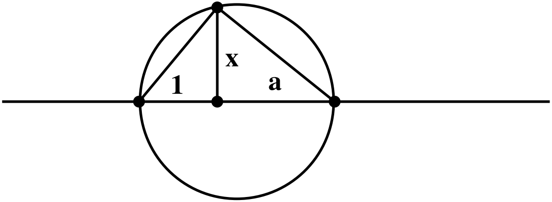
Rechnen mit Zirkel und Lineal

Letzte Konstruktion: **Wurzel ziehen**.



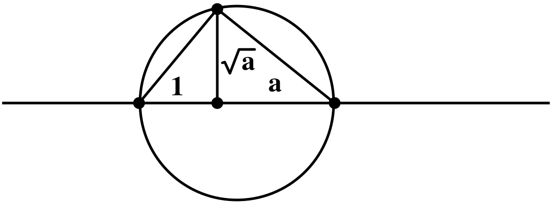
Rechnen mit Zirkel und Lineal

Nach dem **Satz des Thales** ist das Dreieck rechtwinklig.



Rechnen mit Zirkel und Lineal

Nach dem **Höhensatz des Euklid** gilt $x^2 = 1 \cdot a$, also $x = \sqrt{a}$.



Rechnen mit Zirkel und Lineal

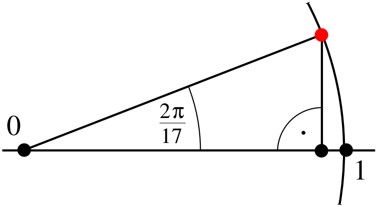
Damit haben wir nachfolgenden Satz bewiesen.

Konstruierbare Zahlen

Satz

Erhält man eine Zahl ausgehend von der 1 durch wiederholtes Anwenden von $+, -, \cdot, :, \sqrt{\ }$, so ist diese Zahl mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Um das 17-Eck zu konstruieren, müssen wir diesen Punkt konstruieren.



Dazu genügt es, die Zahl $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ zu konstruieren!

Konstruierbare Zahlen

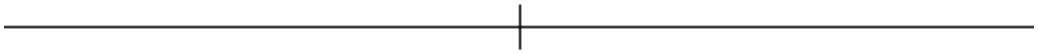
Hier gelang Gauß ein wahrer Geniestreich. Er wies nach, dass

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16}\Bigg(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+ \\ + 2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2(17-\sqrt{17})}-2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\Bigg).$$

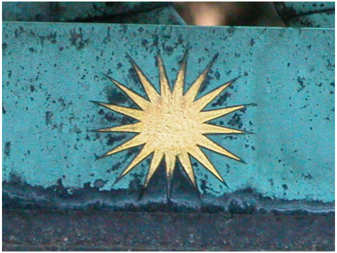
- Mit dem letzten Satz beweist dies die Konstruierbarkeit des 17-Ecks.
- Die Zahl gibt eine explizite Anleitung, die aber sehr aufwendig ist.

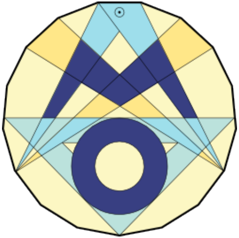
Eine erste **praktische Konstruktionsanleitung** wurde von *Johannes Erchinger* im Jahre 1825 veröffentlicht.

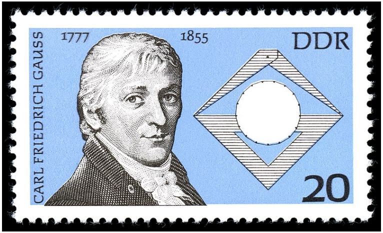
Konstruktion des Siebzehnecks



Konstruktion des Siebzehnecks







Wie ist Gauß darauf gekommen?

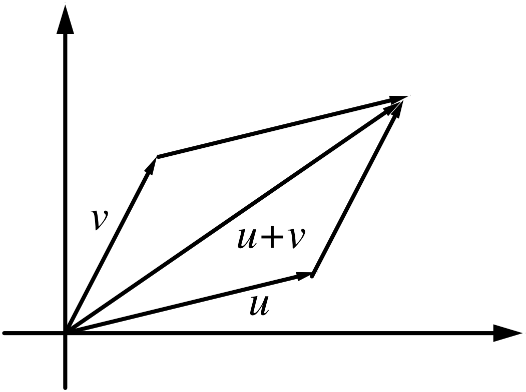
Karlsruher Institut für Technologie

“Der Tag war der 29. März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Anteil daran. [...] Durch angestrengtes Nachdenken über den Zusammenhang aller Wurzeln untereinander nach arithmetischen Gründen glückte es mir, bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so daß ich die spezielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte.”

aus einem Brief an Christian Ludwig Gerling (1788–1864) aus dem Jahr 1819

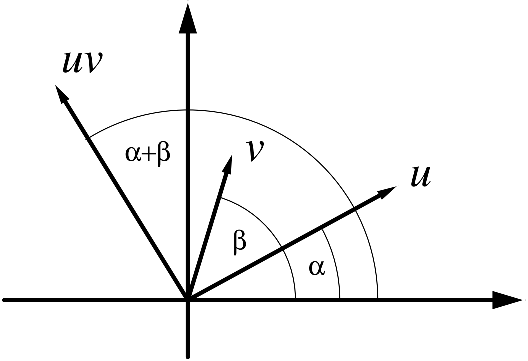
Die Gaußsche Zahlenebene

Punkte *u*, *v* in der Ebene kann man nicht nur als Vektoren *addieren*...



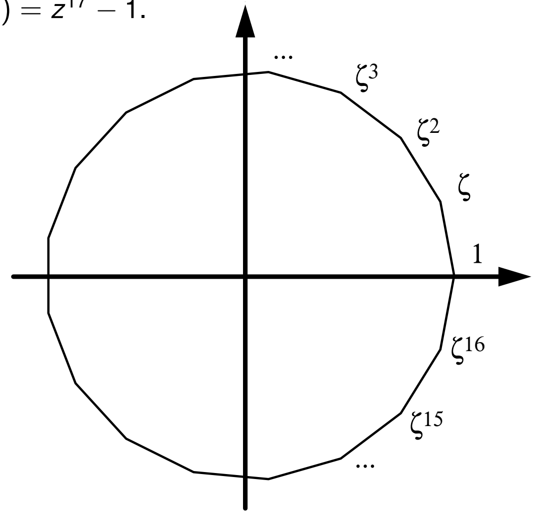
Die Gaußsche Zahlenebene

...sondern auch *multiplizieren*, indem man die Längen *multipliziert* und die Winkel *addiert*.



Die Gaußsche Zahlenebene

Das Siebzehneck besteht somit aus den Nullstellen (den „Wurzeln“) des Polynoms $p(z) = z^{17} - 1$.



Die „Arithmetik der Wurzeln“

Es gilt

$$\zeta^1+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4+\zeta^5+\zeta^6+\zeta^7+\zeta^8+\zeta^9+\zeta^{10}+\zeta^{11}+\zeta^{12}+\zeta^{13}+\zeta^{14}+\zeta^{15}+\zeta^{16}=-1.$$

Alle Zahlen von 1 bis 16 erhält man auch als Reste von $3^0, 3^1, 3^2, \ldots, 3^{15}$ nach Division durch 17. Seien nun

$$\eta_0=\zeta^1+\zeta^9+\zeta^{13}+\zeta^{15}+\zeta^{16}+\zeta^8+\zeta^4+\zeta^2, \quad \eta_1=\zeta^3+\zeta^{10}+\zeta^5+\zeta^{11}+\zeta^{14}+\zeta^7+\zeta^{12}+\zeta^6$$

die Teilsummen mit Exponenten 3^{2k} bzw. 3^{2k+1}. Dann gilt

$$\begin{aligned} \eta_0+\eta_1 &= -1 \\ \eta_0\cdot\eta_1 &= -4. \end{aligned}$$

Nach dem *Satz von Vieta* sind η_0 und η_1 die zwei Nullstellen von

$$x^2-(\eta_0+\eta_1)x+\eta_0\cdot\eta_1 = x^2+x-4.$$

Die „Arithmetik der Wurzeln“

Damit erhalten wir

$$\eta_0 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad \text{und} \quad \eta_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2},$$

für die *Gaußschen Perioden* erster Stufe η_0 und η_1.

- Teilt man η_0 und η_1 erneut auf, erhält man die Perioden zweiter Stufe.
- Dabei kann man für jede Periode zweiter Stufe einen Wurzelausdruck in den Perioden der ersten Stufe bestimmen.
- Iteriert man dieses Verfahren erneut, entsteht als Periode dritter Stufe

$$\zeta^1 + \zeta^{16} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$$

$$= \tfrac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2(17-\sqrt{17})}-2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\right).$$

Beweis Konstruierbarkeitssatz (für Experten)

Satz

$z \in \mathbb{C}$ konstruierbar $\quad\Leftrightarrow\quad$ $z \in L$ mit $L/\mathbb{Q}$ Galoissch und $[L:\mathbb{Q}] = 2^k$.

Lemma

1. $[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}] = \varphi(n)$,
2. $\varphi(n) = 2^k \quad\Leftrightarrow\quad n = 2^r p_1 \cdots p_s$.

Beweis (des Konstruierbarkeitssatzes).

$$
\begin{aligned}
& \zeta_n \text{ konstruierbar} \\
\overset{\text{Satz}}{\Leftrightarrow}\; & [\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}] = 2^k \\
\overset{\text{Lemma}}{\Leftrightarrow}\; & n = 2^r p_1 \cdots p_s.
\end{aligned}
$$

□

Konstruktion des 257-Ecks

```
FunctionExpand[Cos[2*π/257]]
```

$$\frac{1}{4} \Bigl(\frac{1}{2} \Bigl(\frac{1}{2} \Bigl(\frac{1}{2} \Bigl(\frac{1}{2} \Bigl(\frac{1}{2} \Bigl(\frac{1}{2} (-1+\sqrt{257}) + \sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})} \Bigr) + \sqrt{64+\frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) - 4\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)} \Bigr) +$$

$$\surd\Bigl(32+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257}) + \sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})} + \frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(1-\sqrt{257}) - \sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257}) - \sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr) + \frac{1}{2}$$

$$\Bigl(\frac{1}{2}(1+\sqrt{257}) - \sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr) + \sqrt{64+\frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) - 4\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)} +$$

$$\sqrt{64-4\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)} - \sqrt{64-4\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)} +$$

$$\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \sqrt{64+\frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) - 4\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)}\Bigr) + 2$$

$$\Bigl(\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr) - \sqrt{64-4\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)}\Bigr)\Bigr)\Bigr)\Bigr) +$$

$$\surd\Bigl(16+\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \sqrt{64+\frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) - 4\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)}\Bigr) +$$

$$\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr) + \sqrt{64-4\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)}\Bigr) +$$

$$\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) - \sqrt{64+\frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) - 4\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)}\Bigr) +$$

$$\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr) - \sqrt{64-4\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)}\Bigr) +$$

$$\surd\Bigl(32+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257}) - \sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})} + \frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(1-\sqrt{257}) - \sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257}) - \sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \frac{1}{2}$$

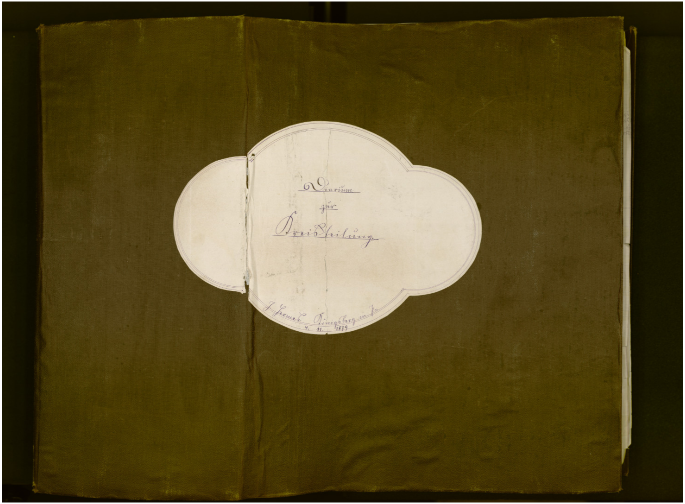
$$\Bigl(\frac{1}{2}(1+\sqrt{257}) + \sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr) + \sqrt{64+\frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) - 4\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)} +$$

$$\sqrt{64-4\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)} - \sqrt{64+\frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) - 4\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)} + 2$$

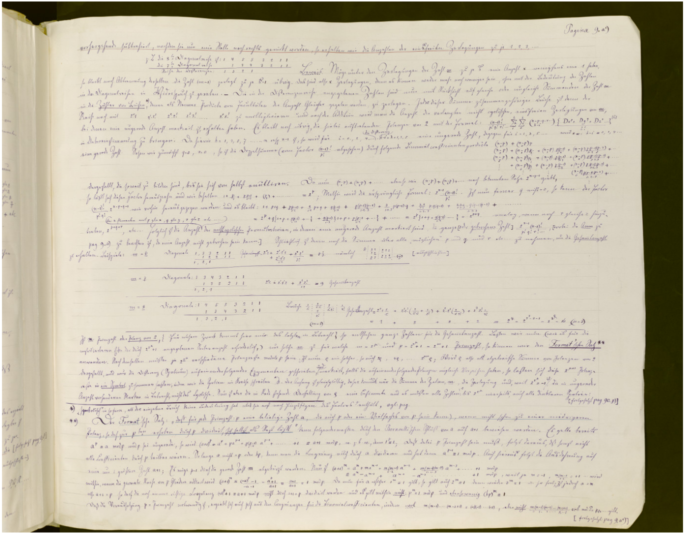
$$\Bigl(\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) + \sqrt{64+\frac{7}{2}\Bigl(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{257})+\sqrt{128+\frac{1}{2}(1-\sqrt{257})}\Bigr) - 4\Bigl(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{257})-\sqrt{128+\frac{1}{2}(1+\sqrt{257})}\Bigr)}\Bigr) + \frac{1}{2}$$

Und das ist nur Seite 1 von 36.

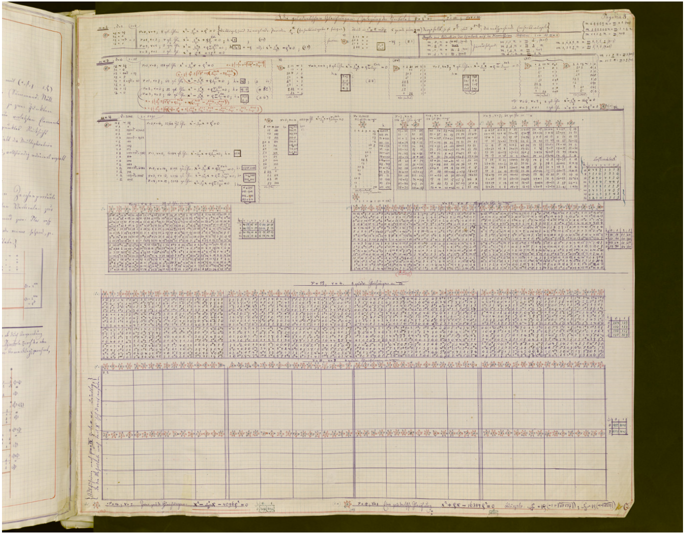
Konstruktion des 65.537-Ecks



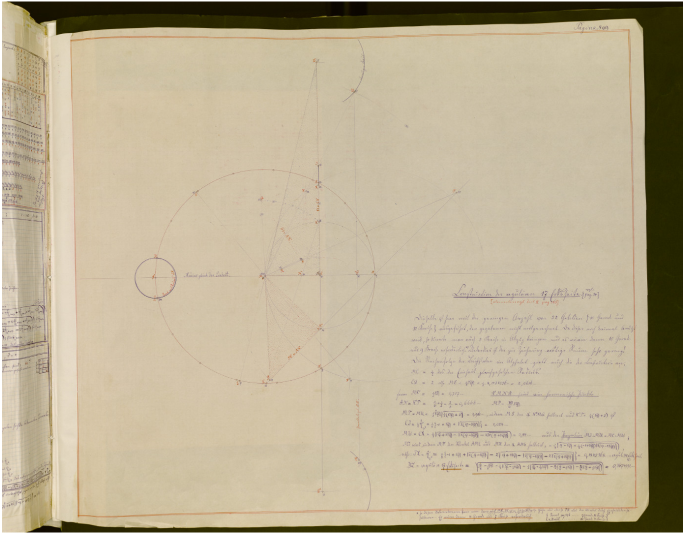
Konstruktion des 65.537-Ecks


Pagina 9. a)

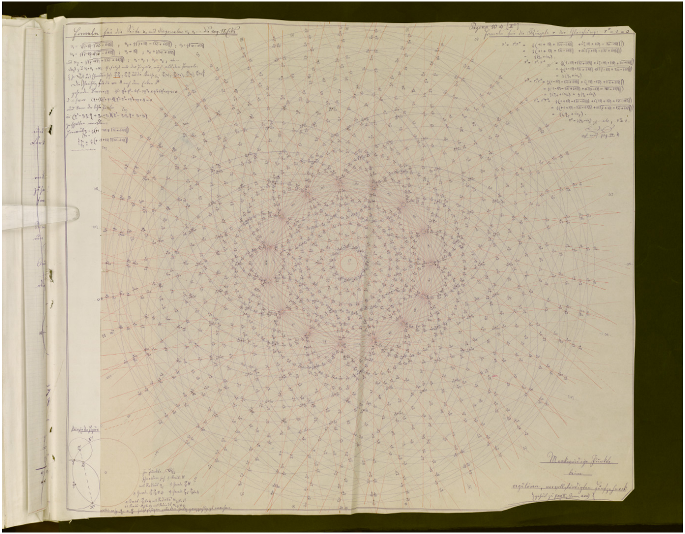
Konstruktion des 65.537-Ecks



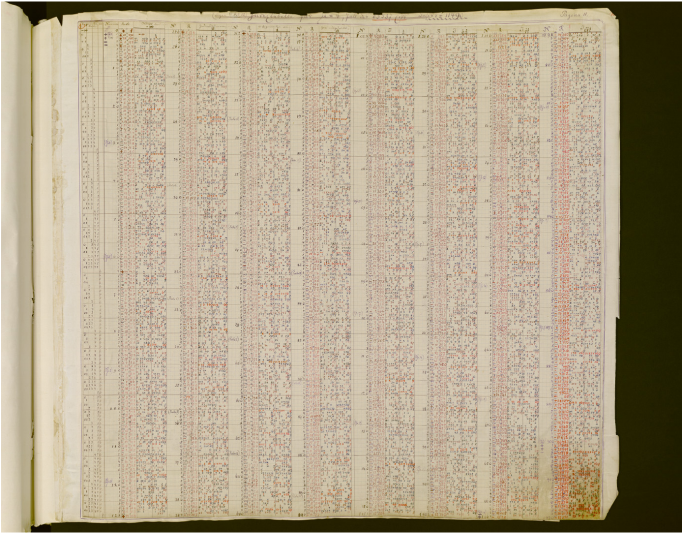
Konstruktion des 65.537-Ecks



Konstruktion des 65.537-Ecks



Konstruktion des 65.537-Ecks



Bildnachweise

- *Gauß-Portrait*: Gottlieb Biermann, 1887, gemeinfrei
- *Zirkel-und-Lineal-Animationen*: Wikipedia-User Aldoaldoz, Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported license
- *Tortenfoto*: Wikipedia-User PlayMistyForMe, Creative Commons-Lizenz Namensnennung 3.0 Unported
- *17-zackiger Stern*: Wikipedia-User Brunswyk, Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported license
- *Logo Mathematik-Olympiade*: Mathematik-Olympiaden e.V.
- *DDR-Briefmarke*, 1977, Deutsche Post der DDR, gemeinfrei
- *Diarium zur Kreisteilung*, Johann Gustav Hermes, 1879, gemeinfrei