Topologie II

Holger Kammeyer (holger.kammeyer@hhu.de)

Inhalte:

III Poincaré-Dualität

1. Das Cap-Produkt
2. Orientierungen
3. Der Abbildungsgrad für Mannigfaltigkeiten
4. Der Dualitätssatz
5. Folgerungen der Poincaré-Dualität
6. Wie geht es weiter?

Warm-Up: Lefschetz-Fixpunktsatz

Sei R ein Hauptidealring, V ein endl. erz. R-Modul und $f: V \to V$ ein Endomorphismus.

Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & V/\mathrm{tors}\,V & \xrightarrow{\cong} & R^n \\ f\big\downarrow & & \big\downarrow \bar f & & \big\downarrow \cdot A \\ V & \longrightarrow & V/\mathrm{tors}\,V & \xrightarrow{\cong} & R^n \end{array}$$

Def. W.1. Die Spur von f ist
$$\mathrm{tr}(f) := \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii} \in R.$$

Offensichtlich ist tr R-linear und $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{rk}_R V$.

Prop. W.2 (i) $\mathrm{tr}(f)$ ist wohldef.

(ii) Für $f, g \in \mathrm{End}\,V$ gilt $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$.

Bew. (ii) Seien $A, B \in M_n(R)$ darstellende Matrizen von $\bar f, \bar g$. Dann gilt
$$\mathrm{tr}(A \cdot B) = \sum_{i=1}^n (A \cdot B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot B_{ji} =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} \cdot A_{ij} = \mathrm{tr}(B \cdot A).$$

(i) Für eine andere Basiswahl erhalten wir $A' = U^{-1} \cdot A \cdot U$ mit $U \in GL_n(R)$, also
$$\mathrm{tr}\,A' = \mathrm{tr}(U^{-1}(A \cdot U)) \overset{(ii)}{=} \mathrm{tr}((A \cdot U) \cdot U^{-1}) = \mathrm{tr}\,A. \qquad \square$$

Prop. W.3 Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_0 & \xrightarrow{i} & V_1 & \xrightarrow{p} & V_2 & \to & 0 \\ & & f\big\downarrow & & g\big\downarrow & & h\big\downarrow & & \\ 0 & \to & V_0 & \xrightarrow{i} & V_1 & \xrightarrow{p} & V_2 & \to & 0 \end{array}$$

in f.g. R-Mod habe exakte Zeilen. Dann gilt
$$\mathrm{tr}\,g = \mathrm{tr}\,f + \mathrm{tr}\,h.$$

Bew. Seien zunächst V_0, V_1, V_2 frei. Dann gilt $V_1 \cong V_0 \oplus V_2$ nach Zerfällungslemma (T1. I.4.25) und sind f, h durch A, B dargestellt, ist g durch $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ dargestellt. Daher $\operatorname{tr} g = \operatorname{tr} f + \operatorname{tr} h$. Führe den allgemeinen Fall auf den freien Fall zurück und nutze angepasste Basen. □

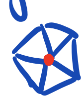
Def. Sei X ein top. Raum mit $H_*^{(sing)}(X;R)$ endl. erz., $H_n(X;R) = 0$ für $n \geq N$ und sei $f: X \to X$. Dann heißt

$$\tau_R(f) = \tau(f) := \sum_{n \geq 0} (-1)^n \operatorname{tr}(H_n(f)) \in R$$

die **Lefschetzzahl** von f.

Offensichtlich gilt $\tau(f) = \tau(g)$, falls $f \simeq g$ und es gilt $\tau_{\mathbb{Z}}(\mathrm{id}_X) = \chi(X)$.

Satz W.4 (Lefschetzscher Fixpunktsatz) Sei X ein endlicher Simplizialkomplex und $f: X \to X$ stetig mit $\tau_R(f) \neq 0$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Bew. Sei f fixpunktfrei. Wähle Metrik d auf X. Setze $\varepsilon := \inf_{x \in X} d(x, f(x)) > 0$. Sei L eine baryzentrische Unterteilung von X, s.d. jeder **Stern** ($\operatorname{st}(\sigma) =$ Vereinigung aller $\sigma' \supseteq \sigma$ ) Durchmesser $< \varepsilon/2$ hat. Lt. simpliziale Approximation [K., Thm. 3.22] gibt es bary. Unt. K von L

eine simpliziale Abb. $g : K \to L$ mit $g \simeq f$ und $\inf_{x \in X} d(g(x), f(x))$ beliebig klein. Es folgt $g(\sigma) \cap \sigma = \emptyset$ für alle Simplexe $\sigma \leq K$. Betrachte

$$0 \longrightarrow B_n^\Delta(K) \longrightarrow Z_n^\Delta(K) \longrightarrow H_n^\Delta(K) \to 0,$$

$$0 \longrightarrow Z_n^\Delta(K) \longrightarrow H_n(K^n, K^{n-1}) \longrightarrow B_{n-1}^\Delta(K) \to 0.$$

Es folgt $\operatorname{tr}(g_* : H_n(K^n, K^{n-1}) \to H_n(K^n, K^{n-1})) \overset{W.3}{=}$

$= \operatorname{tr}(g_* \, Z_n^\Delta(K) \to Z_n^\Delta(K)) + \operatorname{tr}(g_* : B_{n-1}^\Delta(K) \to B_{n-1}^\Delta(K))$

$= \operatorname{tr}(g_* B_n^\Delta(K) \circlearrowleft) + \operatorname{tr}(H_n^\Delta(g)) + \operatorname{tr}(g_* : B_{n-1}^\Delta(K) \circlearrowleft).$

Daher $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(g) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \operatorname{tr} H_n^\Delta(g) =$

$= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \operatorname{tr}(g_* : H_n(K^n, K^{n-1}) \to H_n(K^n, K^{n-1})) = 0,$

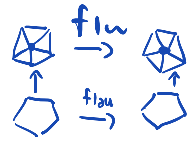
weil $g(\sigma) \cap \sigma = \emptyset$ für alle $\sigma \in K$. $\square$

<u>Kor. W.5</u> (Verallg. Brouwerscher Fixpunktsatz)
Sei X ein endlicher Simplizialkomplex mit $X \simeq \bullet$. Dann hat jedes $f : X \to X$ einen Fixpunkt.

<u>Bew.</u> Es gilt $\tau(f) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \operatorname{tr}(H_n(f)) = \operatorname{tr} H_0(f) =$
$= \operatorname{tr}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = 1.$ $\square$

<u>Bemerkung.</u> Es gilt allgemeiner

$$\tau(f) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(f)} \mathrm{ind}_x f$$

(

, $\mathrm{ind}_x f = \deg f|_{\partial U}$),

falls f nur endl. viele isolierte Fixpunkte hat.
($\Rightarrow$ Poincaré-Hopf-Satz aus Diff. Top!)

I Homologische Algebra

I.1 Projektive Moduln

Sei R ein (möglicherweise nicht-kommutativer) Ring mit 1. (<u>R-Mod</u> ist die Kategorie der R-Linksmoduln.)

<u>**Def. I.1.1**</u> Ein R-Modul P heißt projektiv, falls

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "\tilde{f}"] & \end{tikzcd}$$

(Für jeden Epimorphismus $p: M \to N$ und jedes $f: P \to N$ gibt es $\tilde{f}: P \to M$ mit $f = p \circ \tilde{f}$.)

<u>**Satz I.1.2**</u> Folgende Aussagen sind äquivalent.

(i) P ist projektiv.

(ii) Jede S.E.S. $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "p"] & P \arrow[l, dotted, bend left, "s"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$ zerfällt.

(Es gibt $s: P \to M$ mit $p \circ s = id_P$.)

(iii) Es gibt einen R-Modul Q, s.d. $P \oplus Q$ frei ist.

<u>**Bew.**</u> (i) $\Rightarrow$ (ii):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \\ & & & P \arrow[u, "id_P"'] \arrow[ul, dotted, "s"] & \end{tikzcd}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Wähle Epimorphismus $p: F \to P$ mit F frei. Nach (ii) zerfällt $0 \to \ker p \to F \to P \to 0$. Mit dem Zerfällungslemma (T1.I.4.25, gilt auch für nicht-kommutatives R) folgt $F \cong \ker p \oplus P$.

(iii) $\Rightarrow$ (i):

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "f"'] & \\ & P \oplus Q \arrow[u, "i"'] \arrow[uul, dotted, "g"] & \end{tikzcd}$$

Setze $\tilde{f} := g \circ i$. $\square$

<u>Beispiele</u> 1.) $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ist für $k \geq 2$ nicht projektiv, weil $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to 0$ nicht zerfällt.

2.) $R = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, $P = \mathbb{F}_2 \times \{0\}$ ist projektiv, denn $P \oplus (\{0\} \times \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ ist frei, aber P ist nicht frei, weil $|P| = 2 \neq 4^k$.

3.) $R = C(S^2) = \{ f : S^2 \to \mathbb{R} : f \text{ stetig} \}$. Betrachte $TS^2 = \bigcup_{p \in S^2} = \{ (s, v) : s \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3,\ v \in \mathbb{R}^3,\ s \perp v \} \subseteq \mathbb{R}^6$, $p : TS^2 \to S^2$, $(s, v) \mapsto s$.

$P = \Gamma(TS^2) = \{ s : S^2 \to TS^2 : p \circ s = id_{S^2} \}$.

Wegen des Isomorphismus'

$$\begin{aligned} P \oplus C(S^2) &\xrightarrow{\cong} C(S^2)^3 \cong C(S^2; \mathbb{R}^3) \\ (s, f) &\longmapsto (x \longmapsto s(x) + f(x) \cdot x) \end{aligned}$$

ist P projektiv. Aber P ist nicht frei, im Wesentlichen nach dem Satz vom Igel.
[Rosenberg: K-theory]

<u>I.2 Fundamentalsatz der homologischen Algebra</u>

<u>Def. I.2.1</u> Sei M ein R-Modul. Eine **Auflösung** von M ist eine exakte Folge

$$\cdots \to M_2 \to M_1 \to M_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

(d.h. M_* ist ein Kettenkomplex mit $H_0(M_*) \cong M$ und $H_k(M_*) = 0$ für $k \geq 1$.)

Eine projektive Auflösung von M ist eine Auflösung P_* mit P_k projektiv für alle $k \geq 0$.

<u>Satz I.2.2</u> (i) Jeder R-Modul hat eine projektive Auflösung.

(ii) Sei $P_{*\geq 0}$ ein Kettenkomplex projektiver Moduln. Sei $Q_{*\geq 0}$ ein Kettenkomplex mit $H_k(Q_*) = 0$ für $k > 0$. Sei $[P_*, Q_*]$ die abelsche Gruppe der Kettenhomotopieklassen von Kettenabbildungen $P_* \to Q_*$. Dann ist

$$[P_*, Q_*] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(H_0(P_*), H_0(Q_*))$$
$$[f_*] \longmapsto H_0(f_*)$$

ein Isomorphismus.

<u>Kor. I.2.3</u> Je zwei projektive Auflösungen P_*, Q_* des selben R-Moduls M sind kettenhomotopieäquiv.

<u>Bew.</u> Nach Surjektivität erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
 & & & & H_0(Q_*) \arrow[d, phantom, "\cong"] & \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[u, "f_2"] & P_1 \arrow[r] \arrow[u, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[u, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}_M"'] & 0 \\
 & & & & H_0(P_*) \arrow[u, phantom, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

Andersherum erhalten wir $g_* : Q_* \to P_*$. Es gilt $H_0(g_* \circ f_*) = H_0(g_*) \circ H_0(f_*) = \mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M$ und $H_0(f_* \circ g_*) = \mathrm{id}_M$. Aus der Injektivität folgt $g_* \circ f_* \simeq \mathrm{id}_{P_*}$ und $f_* \circ g_* \simeq \mathrm{id}_{Q_*}$. $\square$

<u>Bew.</u> (von Satz I.2.2) (i) Sei M ein R-Modul. Wähle P_0 (z.B. frei) mit $P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ und danach

$$\cdots \to \underbrace{P_2 \twoheadrightarrow \ker d_1 \to}_{:= d_2} P_1 \underbrace{\twoheadrightarrow \ker \varepsilon \to}_{:= d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

induktiv.

(ii) Surjektiv:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "q_2"] & Q_1 \arrow[r, "q_1"] & Q_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & H_0(Q_*) \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[u, dashed, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[u, dashed, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, dashed, "f_0"] & H_0(P_*) \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"] & 0
\end{tikzcd}$$

- Der Hom. f_0 hebt $\varphi \circ \delta$ entlang dem surj. ε hoch
- Für $x \in P_1$ gilt $p_1(x) \in \ker \delta$, daher $\varepsilon(f_0(p_1(x))) = \varphi(\delta(p_1(x))) = \varphi(0) = 0$, d.h. $\mathrm{Bild}(f_0 \circ p_1) \subseteq \ker \varepsilon = \mathrm{Bild}\, q_1$. Somit gibt es eine Hochhebung f_1 von $f_0 \circ p_1$ entlang $q_1 : Q_1 \to \mathrm{Bild}\, q_1$.
- Führe Verfahren induktiv fort.

Injektiv: Seien $f_*, g_* : P_* \to Q_*$ Kettenabb.en mit $H_0(f_*) = H_0(g_*) =: \varphi$. Zu konstruieren: $h_* : P_* \to Q_{*+1}$ mit $q_{*+1} \circ h_* + h_{*-1} \circ p_* = f_* - g_*$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "q_2"] & Q_1 \arrow[r, "q_1"] & Q_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & H_0(Q_*) \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[u, "f_2, g_2"] & P_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[u, "f_1, g_1"] \arrow[ul, dashed, "h_1"] & P_0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "f_0, g_0"] \arrow[ul, dashed, "h_0"] & H_0(P_*) \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"] & 0
\end{tikzcd}$$

- Es gilt $\varepsilon \circ (f_0 - g_0) = \varphi \circ \delta - \varphi \circ \delta = 0$, d.h. $\operatorname{Bild}(f_0 - g_0) \subseteq \operatorname{Ker} \varepsilon = \operatorname{Bild} q_1$. Erhalte

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[r, "q_1"] & Q_0 \\
 & P_0 \arrow[u, "f_0 - g_0"] \arrow[ul, dashed, "h_0"]
\end{tikzcd}.$$

- Es gilt $q_1 \circ (f_1 - g_1 - h_0 \circ p_1) = f_0 \circ p_1 - g_0 \circ p_1 - q_1 \circ h_0 \circ p_1 = (f_0 - g_0 - q_1 \circ h_0) \circ p_1 = 0$. Erhalte

$$\begin{tikzcd}
Q_2 \arrow[r, "q_2"] & Q_1 \\
 & P_1 \arrow[u, "f_1 - g_1 - h_0 \circ p_1"] \arrow[ul, dashed, "h_1"]
\end{tikzcd},$$

dann gilt $q_2 \circ h_1 + h_0 \circ p_1 = f_1 - g_1$.

- Führe Verfahren induktiv fort. □

I.3 Tensor-Hom-Adjunktion

(Für den Fall R = Körper siehe ET. Blatt 12. Aufg. 3)

Sei R ein Ring, M ein R-Rechtsmodul,
N ein R-Linksmodul und X eine abelsche Gruppe.

Eine Abb. $f: M \times N \to X$ heißt R-ausgeglichen, falls

- $f(m, n+n') = f(m,n) + f(m,n')$
- $f(m+m', n) = f(m,n) + f(m',n)$
- $f(m \cdot r, n) = f(m, r \cdot n)$

für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $r \in R$.

<u>Def. I.3.1</u> Das Tensorprodukt von M und N ist eine abelsche Gruppe $M \otimes_R N$ mit einer R-ausgeglichenen Abb. $\otimes: M \times N \to M \otimes_R N$, sodass die folgende universelle Eigenschaft gilt:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists ! \, \tilde{f}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

(Zu jeder R-ausgeglichenen Abb. $f: M \times N \to X$ gibt es einen eindeutigen Hom. abelscher Gruppen $\tilde{f}: M \otimes_R N \to X$ mit $f = \tilde{f} \circ \otimes$)

<u>Existenz</u>: Sei $\mathbb{Z}(\cdot): \underline{Set} \to \underline{Ab}$ linksadjungiert zum Vergissfunktor $\underline{Ab} \to \underline{Set}$ und sei $U \leq \mathbb{Z}(M \times N)$ erzeugt durch

$$\{ (m, n+n') - (m,n) - (m,n'), \dots, \dots, \; m, m' \in M, \; n, n' \in N, \; r \in R \}.$$

Setze $M \otimes_R N := \mathbb{Z}(M \times N)/U$, $\quad m \otimes n := [(m,n)]$.

Zu R-ausgeglichenem $f: M \times N \to X$ erhalte eindeutig

$$\tilde{f}(\underbrace{\textstyle\sum m \otimes n}_{\text{uneindeutig}}) := \underbrace{\textstyle\sum f(m,n)}_{\text{wohldefiniert}}.$$

Eindeutigkeit: allgemeiner Unsinn wie immer.

Notiz. Nach Konstruktion ist $M \times N \to M \otimes_R N$ funktoriell in M und N.

Def. I.3.2 Seien R, S Ringe. Ein R-S-Bimodul ist eine abelsche Gruppe M, die zugleich R-Links- und S-Rechtsmodul ist, sodass $(r \cdot m) \cdot s = r \cdot (m \cdot s)$ für alle $m \in M$, $r \in R$ und $s \in S$.

Beispiele
- R^n ist ein $M_n(R)$-R-Bimodul
- Ist R kommutativ und M ein R-Rechtsmodul, so ist M ein R-R-Bimodul mit $r \cdot m := m \cdot r$, denn $(r \cdot m) \cdot s = (m \cdot r) \cdot s = m \cdot (r \cdot s) = m (s \cdot r) = r \cdot (m \cdot s)$.
- Ist M ein R-Linksmodul, so ist M ein R-$\mathbb{Z}$-Bimodul, denn $r \cdot (m \cdot k) = r \cdot (m + \dots + m) = r \cdot m + \dots + r \cdot m = (r \cdot m) \cdot k$.

Sei B ein R-S-Bimodul, A ein R-Rechtsmodul und C ein S-Rechtsmodul. Dann wird
- $A \otimes_R B$ ein S-Rechtsmodul durch
$$(a \otimes b) \cdot s = a \otimes (b \cdot s)$$
- $\mathrm{Hom}_S(B, C)$ ein R-Rechtsmodul durch
$$(f \cdot r)(b) = f(r \cdot b).$$

Satz I.3.3 Der Funktor $(\cdot)\otimes_R B : \underline{\text{Mod-}R} \to \underline{\text{Mod-}S}$ ist linksadjungiert zu $\text{Hom}_S(B,\cdot) : \underline{\text{Mod-}S} \to \underline{\text{Mod-}R}$:

$$\text{Hom}_S(A\otimes_R B, C) \cong \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_S(B,C)),$$

natürlich in $A \in \text{Ob}(\underline{\text{Mod-}R})$ und $C \in \text{Ob}(\underline{\text{Mod-}S})$.

Bew. $f : A \to \text{Hom}_S(B,C)$ ist R-ausgeglichen als Abb. $f : A\times B \to C$. Nach universeller Eigenschaft gibt es genau ein $\tilde{f} : A\otimes_R B \to C$ mit $\tilde{f}(a\otimes b) = f(a,b)$ für $a\in A$, $b\in B$. Für $s\in S$ gilt $\tilde{f}((\Sigma a\otimes b)\cdot s) = \Sigma f(a, b\cdot s) = \Sigma f(a,b)\cdot s =$ $= (\Sigma f(a,b))\cdot s = \tilde{f}(\Sigma a\otimes b)\cdot s$. Natürlichkeit folgt ebenso nach Konstruktion von $A\otimes_R B$. $\square$

I.4 Exaktheit

Def. I.4.1 Ein (kovarianter) Funktor F von Links- oder Rechts-R-Moduln nach $\underline{Ab}$ heißt

- **linksexakt**, falls für jede S.E.S. $0\to M_1 \to M_2 \to M_3$ auch $0\to F(M_1)\to F(M_2)\to F(M_3)$ exakt ist.
- **rechtsexakt**, falls für jede S.E.S. $M_1\to M_2\to M_3\to 0$ auch $F(M_1)\to F(M_2)\to F(M_3)\to 0$ exakt ist.
- **exakt**, falls F links- und rechtsexakt ist.

Kontravariant linksexakt: $0 \leftarrow M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow M_3$
$\rightsquigarrow \; 0 \to F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3)$.

<u>Satz I.4.2</u> Sei M ein R-Linksmodul. Dann ist $\mathrm{Hom}_R(M, \cdot)$ linksexakt und $(\cdot) \otimes_R M$ rechtsexakt.

<u>Bew.</u> Wir beobachten

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \text{ exakt} \iff \begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\lrcorner", very near start] \\ 0 \arrow[r] & M_3 \end{tikzcd},$$

$$M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0 \text{ exakt} \iff \begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & M_2 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & M_3 \end{tikzcd}.$$

Nach Satz I.3.3 ist $\mathrm{Hom}_R(M, \cdot)$ rechtsadjungiert und $(\cdot) \otimes_R M$ linksadjungiert. Nach ET. Blatt 13, Aufg. 4 erhalten Rechtsadjungierte Limiten und Linksadjungierte Kolimiten. $\square$

<u>Prop. I.4.3</u> $\mathrm{Hom}_R(M, \cdot)$ ist exakt $\iff$ M projektiv.

<u>Bew.</u> $\mathrm{Hom}_R(M, \cdot)$ exakt

$$\iff \begin{cases} \text{Für } g: A \to B \text{ surjektiv ist} \\ g\circ : \mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, B) \text{ surj.} \end{cases}$$

$$\iff \begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dashed, "\exists h"] & \end{tikzcd}$$

$\square$

Dual gilt: Ein R-Modul M heißt injektiv, falls

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, hook', "g"'] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[l] \\ & I \arrow[from=1-1, dashed, "\exists h"'] & \end{tikzcd}$$

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Für } g: B \to A \text{ injektiv ist} \\ \circ g: \mathrm{Hom}_R(A, I) \to \mathrm{Hom}_R(B, I) \text{ surj.} \end{array} \right.$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_R(\cdot, I)$ ist exakt.

(Warnung: Für den Beweis muss geklärt werden, was Adjunktion für kontravariante Funktoren bedeutet...)

Beispiele: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$.

Gegenbeispiel: $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$

$n \geq 2$:
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \arrow[l, "\cdot n"'] \arrow[d, "id"] & 0 \arrow[l] \\ & \mathbb{Z} \arrow[from=1-1, dashed] & \end{tikzcd} \quad , \text{ aber } \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \arrow[l, "\cdot n"'] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[l] \\ & \mathbb{Q} \arrow[from=1-1, dashed, "\cdot \frac{1}{n}"'] & \end{tikzcd}.$$

Def. I.4.4 Ein R-Linksmodul M heißt flach, falls $(\cdot) \otimes_R M$ exakt ist.

Prop. I.4.5 Projektive Moduln sind flach.

Bew. Ein freier Modul $F = \bigoplus_{i \in I} R$ ist flach, denn für $f: N \to M$ injektiv ist auch

$$f \otimes_R F: N \otimes_R F \cong \bigoplus_{i \in I} N \xrightarrow{\oplus f} \bigoplus_{i \in I} M \cong M \otimes_R F$$

injektiv (siehe unten Satz I.5.1). Für einen projektiven Modul P sei $P \oplus Q = F$ frei, also ist

$$f \otimes_R F : (N \otimes P) \oplus (N \otimes Q) \xrightarrow{(f \otimes P) \oplus (f \otimes Q)} (M \otimes P) \oplus (M \otimes Q)$$

injektiv und somit ist auch $f \otimes_R P$ injektiv. $\square$

(Gegen-) Beispiele: · $\mathbb{Q}$ ist flach aber nicht projektiv über $\mathbb{Z}$ (Nutze $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ u. $\mathbb{Q} \leq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ $\lightning$.)

· Für $n \geq 2$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nicht flach über $\mathbb{Z}$ (Betrachte $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$.)

Bemerkung. Es gilt

Immer:	frei	$\Rightarrow$	projektiv	$\Rightarrow$	flach	$\Rightarrow$	torsionsfrei
R HIR:		$\Leftarrow$				$\Leftarrow$	
R HIR + M endl. erz.:		$\Leftarrow$		$\Leftarrow$		$\Leftarrow$	

I.5 Berechnung von Tensorprodukten

Satz I.5.1 (Rechenregeln für Tensorprodukte)

(i) $R \otimes_R N \cong N$ (Iso. von R-Linksmoduln)

(ii) $M \otimes_R R \cong M$ (" " R-Rechts " .)

(iii) $M \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} N_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} M \otimes_R N_i$.

(iv) $\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \otimes N \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_R N$.

Bew. (i) + (ii): $r \otimes n \mapsto r \cdot n$ wohldef., surjektiv, injektiv, denn $\sum_i r_i \cdot n_i = 0$ ergibt $\sum_i r_i \otimes n_i = \sum_i 1 \otimes r_i \cdot n_i$

$$= 1 \otimes \left(\sum_i r_i \cdot n_i\right) = 1 \otimes 0 = 1 \otimes \overset{\overset{R}{\in}}{0} \cdot \overset{\overset{N}{\in}}{0} = (1 \cdot 0) \otimes 0 = 0 \otimes 0 = 0.$$

(iii) + (iv): $\quad m \otimes \left(\sum_{i \in I} n_i\right) \mapsto \sum_{i \in I} (m \otimes n_i)$. $\square$

<u>Beispiele</u>: · In $M \otimes_R N$ gilt stets $m \otimes 0 = 0 \otimes n = 0$.

· Für eine endliche abelsche Gruppe G gilt $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$, denn für $g \otimes q \in G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ gilt $g \otimes q = g \otimes |G| \cdot \frac{q}{|G|} =$
$$= \underbrace{(g + \dots + g)}_{|G|\text{-mal}} \otimes \frac{q}{|G|} = 0 \otimes \frac{q}{|G|} = 0.$$

· Es gilt $\mathbb{Z}/_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/_m \cong \mathbb{Z}/_{ggT(n,m)}$.

Anwenden von $(\cdot) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/_m$ auf
$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \to 0 \quad \text{liefert}$$

$$\mathbb{Z}/_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}/_m \to \underset{\overset{\|}{\operatorname{coker}(\mathbb{Z}/_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}/_m)}}{\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}} \to 0, \quad \text{d.h. z.z.}$$

$$\mathbb{Z}/_m \xrightarrow{\cdot n} \underset{\in}{\mathbb{Z}/_m} \to \underset{\in}{\mathbb{Z}/_{d\mathbb{Z}}} \to 0 \quad \text{exakt für } d = ggT(n,m)$$

Dazu sei $[k] \longmapsto 0$, d.h. $k = l \cdot d = l(r \cdot n + s \cdot m) =$
$\equiv l \cdot r \cdot n \ (m)$, also $[l \cdot r] \cdot n = [k]$. $\square$

· $(\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/_6) \otimes (\mathbb{Z}/_9 \oplus \mathbb{Z}/_2) \cong (\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/_6) \otimes \mathbb{Z}/_{18} \cong$
$\cong (\mathbb{Z}/_{18})^3 \oplus \mathbb{Z}/_6 \cong (\mathbb{Z}/_9)^3 \oplus \mathbb{Z}/_3 \oplus (\mathbb{Z}/_2)^4$

(Invariante Faktoren) $\quad$ (Elementarteiler).

I.6 Der Tor-Funktor

<u>Def. I.6.1</u> Sei M ein R-Rechts-, N ein R-Linksmodul und $P_* \to M$ eine projektive Auflösung. Die i-te **Torgruppe** von M und N ist

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) := H_i(P_* \otimes_R N) \qquad \text{für } i \geq 0.$$

<u>Prop. I.6.2</u> $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)$ ist bis auf Iso. wohldefiniert.

<u>Bew.</u> Sei $Q_* \to M$ eine weitere projektive Auflösung. Nach Kor. I.2.3 gibt es $Q_* \xrightarrow{\simeq} P_*$, die nach I.2.2.(ii) bis auf Kettenhomotopie eindeutig ist. Weil $(\cdot)\otimes_R N$: <u>R-chain</u> $\to$ <u>$\mathbb{Z}$-chain</u> Kettenhomotopie erhält (wende $(\cdot)\otimes_R N$ an auf $\partial_{i+1}\circ h_i + h_{i-1}\circ\partial_i = f_i - g_i$), gibt es einen ausgezeichneten Iso.

$$f_{P_*,Q_*}: H_i(P_* \otimes_R N) \xrightarrow{\cong} H_i(Q_* \otimes_R N). \qquad (*) \qquad \square$$

Der ausgezeichnete Iso. f_{P_*,Q_*} erlaubt die funktorielle Definition

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,N) := \Big\{ x \in \prod_{P_* \to M} H_i(P_* \otimes N) : f_{P_*,Q_*}(pr_{P_*}(x)) = pr_{Q_*}(x) \Big\}$$

- $g: N \to N'$ induziert $id_* \otimes g: P_* \otimes_R N \to P_* \otimes_R N'$ und damit $\mathrm{Tor}_i^R(id, g): \mathrm{Tor}_i^R(M,N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M,N')$
- $f: M \to M'$ induziert

$$\begin{tikzcd}
P_2' \arrow[r] & P_1' \arrow[r] & P_0' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0 \\
P_2 \arrow[r] \arrow[u, "f_2"] & P_1 \arrow[r] \arrow[u, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[u, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[u, "f"] & 0
\end{tikzcd}$$

bis auf Kettenhomotopie eindeutig und bestimmt daher eine ausgezeichnete Kettenhomotopieklasse $f_* \otimes id_N : P_* \otimes_R N \to P'_* \otimes_R N$ und damit einen wohldefinierten Homomorphismus

$$\mathrm{Tor}_i^R(f, id) : \mathrm{Tor}_i^R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(M', N).$$

<u>Satz I.6.3</u> 1.) Für projektiv $Q_* \to N$ gilt

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) \cong H_i(M \otimes_R Q_*) \quad \text{für } i \geq 0.$$

2.) Ist R kommutativ, gibt es einen nat. Iso.

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_i^R(N, M) \text{ für } i \geq 0.$$

<u>Bew.</u> [Lück, „Alg. Top.", Lemma 6.12]. $\square$

<u>Prop. I.6.3</u> Wir haben einen nat. Iso.

$$\mathrm{Tor}_0^R(M, N) \cong M \otimes_R N.$$

<u>Bew.</u> Sei $P_* \to M$ projektiv. Dann ist

$$P_1 \otimes_R N \longrightarrow P_0 \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

exakt, also $M \otimes_R N \cong \mathrm{coker}(P_1 \otimes_R N \longrightarrow P_0 \otimes_R N)$
$\cong H_0(P_* \otimes_R N) = \mathrm{Tor}_0^R(M, N)$. $\square$

Die Tor-Funktoren beschreiben die Abweichung des Funktors $(\cdot) \otimes_R N$ davon, linksexakt zu sein ($\mathrm{Tor}_i^R(\cdot, N)$ sind die „Linksableitungen" des Funktors $(\cdot) \otimes_R N$.)

Satz I.6.4 (Tor-L.E.S.) (i) Sei $0 \to M_0 \to M_1 \to M_2 \to 0$ S.E.S. von R-Rechtsmoduln, N ein R-Linksmodul. Dann gibt es eine nat. L.E.S.

$$\begin{aligned}
\cdots &\to \operatorname{Tor}_2^R(M_0, N) \to \operatorname{Tor}_2^R(M_1, N) \to \operatorname{Tor}_2^R(M_2, N) \to \\
&\to \operatorname{Tor}_1^R(M_0, N) \to \operatorname{Tor}_1^R(M_1, N) \to \operatorname{Tor}_1^R(M_2, N) \to \\
&\to M_0 \otimes_R N \to M_1 \otimes_R N \to M_2 \otimes_R N \to 0
\end{aligned}$$

(ii) Sei $0 \to M_0 \to M_1 \to M_2 \to 0$ S.E.S. von R-Linksmoduln und N ein R-Rechtsmodul. Dann gibt es eine nat. L.E.S.

$$\begin{aligned}
\cdots &\to \operatorname{Tor}_2^R(N, M_0) \to \operatorname{Tor}_2^R(N, M_1) \to \operatorname{Tor}_2^R(N, M_2) \to \\
&\to \operatorname{Tor}_1^R(N, M_0) \to \operatorname{Tor}_1^R(N, M_1) \to \operatorname{Tor}_1^R(N, M_2) \to \\
&\to N \otimes_R M_0 \to N \otimes_R M_1 \to N \otimes_R M_2 \to 0
\end{aligned}$$

Lemma I.6.5 (Hufeisenlemma) Sei $0 \to M_0 \to M_1 \to M_2 \to 0$ S.E.S. von R-Rechtsmoduln, $P^0_* \to M_0$ und $P^2_* \to M_2$ projektiv

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
 & P^0_1 \arrow[d] & & P^2_1 \arrow[d] & \\
 & P^0_0 \arrow[d, "\varepsilon^0"'] & & P^2_0 \arrow[d, "\varepsilon^2"] & \\
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & M_1 \arrow[r, "\psi"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Dann gibt es eine proj. Auflösung $P^1_* \to M_1$ und Kettenabbildungen $i_*: P^0_* \to P^1_*$, $p_*: P^1_* \to P^2_*$, sd.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1^0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & P_1^1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d] & P_1^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0^0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon^0"'] & P_0^1 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "\varepsilon^1"'] & P_0^2 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & M_1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

kommutiert und exakte Zeilen (und Spalten) hat.

__Notiz.__ Wegen Satz I.1.2.(ii) zerfallen dann die Zeilen und es gilt $P^1_* \cong P^0_* \oplus P^2_*$ nach Zerfällungslemma (T1. I.4.25.)

__Bew.__ (von Lemma I.6.5) Setze $P_0^1 := P_0^0 \oplus P_0^2$, i_0 und p_0 die kanonische Inklusion und Projektion, $\varepsilon^1|_{P_0^0} := \varphi \circ \varepsilon^0$. Sei

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\psi"] & M_2 \arrow[r] & 0 \\
 & P_0^2 \arrow[u, "\varepsilon^2"'] \arrow[ul, dotted, "\chi"] &
\end{tikzcd}$$

und setze $\varepsilon^1|_{P_0^2} := \chi$. Dann kommutieren die unteren zwei Vierecke. Aus dem (Beweis des) 5er-Lemmas (T1. III.2.2) folgt ε^1 ist surjektiv. Nach dem Schlangenlemma (T1. II.2.1) ist die erste Zeile in

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker \varepsilon^0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker \varepsilon^1 \arrow[r] \arrow[d] & \ker \varepsilon^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0^0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon^0"'] & P_0^1 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "\varepsilon^1"'] & P_0^2 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r, "\varphi"] & M_1 \arrow[r, "\psi"] & M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

wieder exakt, denn $\operatorname{coker} \varepsilon^0 = 0$. Wir erhalten

$$
\begin{tikzcd}
 & P_1^0 \arrow[d] & & P_1^2 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker \varepsilon^0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker \varepsilon^1 \arrow[r] \arrow[d] & \ker \varepsilon^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0^0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon^0"'] & P_0^1 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "\varepsilon^1"'] & P_0^2 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r, "\varphi"] & M_1 \arrow[r, "\psi"] & M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

und daraus induktiv die Aussage des Lemmas. $\square$

<u>Bew.</u> (von Satz I.6.4) (i) Nach dem Hufeisenlemma haben wir eine S.E.S. von Kettenkomplexen

$$0 \to P_*^0 \to P_*^1 \to P_*^2 \to 0,$$

die projektive Auflösungen von M_0, M_1 und M_2 bilden. Wegen I.1.2.(ii) zerfällt die S.E.S. in jedem Grad. Daher ist

$$0 \to P_*^0 \otimes_R N \to P_*^1 \otimes_R N \to P_*^2 \otimes_R N \to 0$$

wieder exakt und wir erhalten die L.E.S. aus T1.II.2.2.

(ii) Sei $P_* \to N$ projektiv. Dann ist

$$0 \to P_* \otimes M_0 \to P_* \otimes M_1 \to P_* \otimes M_2 \to 0$$

exakt, weil laut Prop. I.4.5 projektive Moduln flach sind. Wir schließen wieder mit T1.II.2.2. $\square$

<u>Beispiele</u> 1.) Ist M (oder N) projektiv, ist $0 \to M \xrightarrow{id} M \to 0$ eine proj. Auflösung, also $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = 0$ für $i \geq 1$.

2.) Insbesondere gilt $\mathrm{Tor}_i^K(M, N) = 0$ für $i \geq 1$, falls K ein Körper ist, denn Vektorräume sind frei.

3.) Sei G eine Gruppe, dann wird $\mathbb{Z}G$ zum Gruppenring von G durch die Multiplikation

$$\Big(\sum_{g\in G} \lambda_g g\Big) \cdot \Big(\sum_{g'\in G} \mu_{g'} g'\Big) = \sum_{g\in G} \sum_{g'\in G} (\lambda_g \cdot \mu_{g'})(g \cdot g').$$

Betrachte $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}G$-Rechtsmodul mit

$$k \cdot \Big(\sum_{g\in G} \lambda_g g\Big) = \sum_{g\in G} k \cdot \lambda_g$$

(der „triviale $\mathbb{Z}G$-Modul $\mathbb{Z}$")

Für einen $\mathbb{Z}G$-Linksmodul M gilt

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \cong M / \langle g\cdot m - m : g \in G, m \in M\rangle =: M_G$$

„Koinvarianten"

$$k \otimes m \longmapsto [k \cdot m]$$

$$1 \otimes m \longleftarrow [m]$$ wohldef., weil $1 \otimes (gm - m)$

$$= 1 \otimes gm - 1 \otimes m = 1 \otimes m - 1 \otimes m = 0.$$

Die abelschen Gruppen $H_i(G;M) := \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$ bilden die Gruppenhomologie von G mit M-Koeff.

$$\text{Zu } 0 \to \underset{\text{„Augmentierungsideal"}}{I} \to \mathbb{Z}G \xrightarrow[\text{„Augmentierung"}]{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0, \quad g \mapsto 1$$

endet die Tor-L.E.S. in

$$0 \to H_1(G;M) \to I \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to M \to M_G \to 0,$$

d.h. $H_1(G;M) \cong \ker(I \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to M)$.

Ist M ein trivialer $\mathbb{Z}G$-Modul (d.h. jedes $g \in G$ wirkt identisch), folgt $M_G = M$, also

$$H_1(G;M) \cong I \otimes_{\mathbb{Z}G} M \cong I \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M) \cong$$
$$\cong (I \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}G} M \cong I_G \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

<u>Lemma I.6.6</u> Es gibt einen nat. Iso. $I_G \cong_{\mathbb{Z}} I/I^2$.

<u>Bew.</u> Es gilt $I_G = I \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \cong I/\langle g\cdot x - x : x \in I\rangle$ und I wird von den Elementen $x = g' - 1$ für $g' \in G$ erzeugt. Weil $gx - x = g(g'-1) - (g'-1) =$
$= gg' - g - g' + 1 = (g-1)(g'-1) \in I^2$ folgt die Beh. $\square$

<u>Lemma I.6.7</u> Es gibt einen nat. Iso. $I/I^2 \cong G_{ab}$.

<u>Bew.</u> Betrachte $\varphi: G \to I/I^2$

$$g \mapsto g - 1 + I^2.$$

Es gilt $\varphi(gh) = gh - 1 + I^2 = gh - 1 - (g-1)(h-1) + I^2$
$= (g-1) + (h-1) + I^2 = \varphi(g) + \varphi(h)$. Erhalten
$\bar{\varphi} : G_{ab} \to I/I^2$.

Betrachte
$$\begin{aligned} \psi : I &\longrightarrow G_{ab} \\ g-1 &\longmapsto g[G,G]. \end{aligned}$$
Es gilt $\psi((g-1)(h-1)) = \psi(gh - g - h + 1) =$
$= \psi((gh-1) - (g-1) - (h-1)) = ghg^{-1}h^{-1}[G,G] =$
$= [G,G]$. Erhalten $\bar{\psi} : I/I^2 \to G_{ab}$ und
$\bar{\psi} \circ \bar{\varphi} = \mathrm{id}_{G_{ab}}$, $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi} = \mathrm{id}_{I/I^2}$ nach Konstruktion. $\square$

Somit haben wir gezeigt:

<u>Satz I.6.8</u> Für einen trivialen $\mathbb{Z}G$-Modul M gilt
$$H_1(G;M) \cong G_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} M.$$

Setzt man noch wie üblich $H_i(G) := H_i(G;\mathbb{Z})$, gilt also $H_0(G) \cong \mathbb{Z}$ und $H_1(G) \cong G_{ab}$.

<u>Bemerkung</u>. Sei X wegzshgd, $G = \pi_1(X,\cdot)$. Wähle $\langle [S^n] \rangle \cong H_n^{sing}(S^n)$. Erhalte
$$\begin{aligned} \mathrm{Hur}_n : \pi_n(X,\cdot) &\longrightarrow H_n^{sing}(X) \\ [f : S^n \to X] &\longmapsto f_*[S^n]. \end{aligned}$$
Dann gilt
$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,\cdot) \arrow[r, "\mathrm{Hur}_1"] \arrow[d, equal] & H_1^{sing}(X) \arrow[d, "\cong"] \\ G \arrow[r] & G_{ab} \end{tikzcd}$$
(Hurewicz, Satz T1.II.5.4)

- $\pi_2(X,\cdot) \xrightarrow{Hur_2} H_2^{sing}(X) \to H_2 G \to 0$ (Hopf)

(Hurewicz: Hur_2 ist Iso., falls $G = 1$.)

<u>Prop. I.6.9</u> (i) $\mathrm{Tor}_i^R(\bigoplus_{j\in I} M_j, N) \cong \bigoplus_{j\in I} \mathrm{Tor}_i^R(M_j, N)$

(ii) $\mathrm{Tor}_i^R(M, \bigoplus_{j\in I} N_j) \cong \bigoplus_{j\in I} \mathrm{Tor}_i^R(M, N_j)$.

<u>Bew.</u> Folgt aus $\left(\bigoplus_{j\in I} P_*^j\right) \otimes_R N \cong \bigoplus_{j\in I} (P_*^j \otimes_R N)$. $\square$

<u>Satz I.6.10</u> (Berechnung von Tor über HIRen)

Sei R ein Hauptidealring, M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul. Dann gilt:

(i) $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = 0$ für $i \geq 2$.

(ii) Sind M, N endlich erzeugt, induzieren die Inklusionen $\mathrm{Tors}(M) \subseteq M$, $\mathrm{Tors}(N) \subseteq N$ einen Iso.
$$\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tors}(M), \mathrm{Tors}(N)) \cong \mathrm{Tor}_1^R(M, N).$$

(iii) Für $r, s \in R\setminus\{0\}$ gilt
$$\mathrm{Tor}_1^R(R/(r), R/(s)) \cong R/(ggT(r,s)).$$

<u>Bew.</u> (i) über HIRen sind Untermoduln von freien Moduln frei. Also kann
$$0 \to \ker\pi \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} M \to 0$$
mit freiem F gewählt werden.

(ii) Weil $M \cong F \oplus \mathrm{Tors}(M)$, $N \cong F' \oplus \mathrm{Tors}(N)$ mit F, F' frei, folgt dies aus Prop. I.6.9 und (i) und Bsp. 1.).

(iii) Betrachte $0 \to R \xrightarrow{\cdot r} R \to R/(r) \to 0$,
also gilt $\mathrm{Tor}_1^R(R/(r), R/(s)) \cong \ker(R/(s) \xrightarrow{\cdot r} R/(s))$.
Setze $d := \mathrm{ggT}(r,s)$ und $r = r'd$, $s = s'd$.
Dann ist $r' \in (R/(s))^*$, also $\ker(R/(s) \xrightarrow{\cdot r} R/(s)) =$
$= \ker(R/(s) \xrightarrow{\cdot d} R/(s)) = \{x \cdot s' \in R/(s) : x \in R/(s)\} \cong R/(d)$. □
$x \cdot s' \leftarrow\!\shortmid x$

I.7 Der universelle Koeffizientensatz

Satz I.7.1 Sei R ein HIR und C_* ein Kettenkomplex projektiver R-Moduln mit $C_n = 0$ für $n < 0$. Dann gibt es zu jedem R-Modul M eine nat. S.E.S.

$$0 \to H_n(C_*) \otimes_R M \xrightarrow{\alpha_n} H_n(C_* \otimes_R M) \xrightarrow{\beta_n} \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(C_*), M) \to 0$$
$$[z] \otimes m \longmapsto [z \otimes m]$$

ist durch

für alle $n \geq 0$. Die S.E.S. zerfällt über

$$s_n : \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(C_*), M) \to H_n(C_* \otimes_R M)$$

und s_n ist natürlich in M, aber (i. A.) nicht in C_*.

Kor. I.7.2 $H_*(C_* \otimes_R M) \cong (H_n(C_*) \otimes_R M) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(C_*), M)$ ist durch $H_*(C_*)$ und M bis auf Isomorphie bestimmt. □

Bew. (von Satz I.7.1) Betrachte die S.E.S.en

(i) $0 \to Z_n \to C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0$, r_n

(ii) $0 \to B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \to H_n(C_*) \to 0$

Die S.E.S. (i) zerfällt, weil über HIRen projektive Moduln frei sind und Untermoduln von freien Moduln frei, also projektiv sind. Erhalten

$$0 \to Z_* \otimes_R M \to C_* \otimes_R M \to B_{*-1} \otimes_R M \to 0$$

und dies ist eine S.E.S. von Kettenkomplexen, wenn wir $Z_* \otimes_R M$ und $B_{*-1} \otimes_R M$ als Kettenkomplexe mit trivialen Differentialen auffassen.
Mit T1. II. 2.2 gibt es eine L.E.S.

$$\to B_* \otimes_R M \xrightarrow{\delta_{n+1}} Z_* \otimes_R M \to H_n(C_* \otimes_R M) \to B_{*-1} \otimes_R M \xrightarrow{\delta_n} Z_* \otimes_R M \to$$

Die Tor-L.E.S. zu (ii) endet in

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^R(H_n(C_*), M) \to B_n \otimes_R M \xrightarrow{i_n \otimes id_M} Z_n \otimes_R M \to H_n(C_*) \otimes_R M \to 0$$

Aus der Konstruktion der Randabbildung im Schlangenlemma folgt $\delta_{n+1} = i_n \otimes id_M$. Somit ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathrm{coker}\, \delta_{n+1} & \to & H_n(C_* \otimes_R M) & \to & \ker \delta_n & \to 0 \\ & \cong & & & & \cong & \\ & H_n(C_*) \otimes_R M & & & & \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(C_*), M) & \end{array}$$

exakt. Linksinverses zu α_n ist

$$\begin{aligned} H_n(C_* \otimes_R M) &\to H_n(C_*) \otimes_R M \\ [c \otimes m] &\mapsto [\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nicht natürlich}}}{r_n(c)}] \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ \text{natürlich}}}{m} . \end{aligned}$$

$\square$

Satz I.7.3 Sei R ein HIR, $H_* = H_*^{sing}(\cdot,\cdot;R)$, (X,A) ein Raumpaar, M ein R-Modul. Dann gibt es eine nat. S.E.S.
$0 \to H_n(X,A) \otimes_R M \to H_n(X,A;M) \to \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(X,A);M) \to 0$,
die (in (X,A) nicht natürlich) zerfällt. $\square$

Beispiel Erinnerung (T1.IV.3.3):

$$H_k(\mathbb{R}P^d;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0 \text{ oder } (k=d \text{ ungerade}) \\ \mathbb{Z}/2 & 0<k<d \text{ und } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir berechnen

- $H_n(\mathbb{R}P^d;\mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}/2 \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & n=0 \text{ oder } 0<n\leq d,\ n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$
- $\mathrm{Tor}_1^\mathbb{Z}(H_{n-1}(\mathbb{R}P^d;\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & 1<n\leq d,\ n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$

also folgt mit dem U.K.S.

$$H_n(\mathbb{R}P^d;\mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & 0\leq n\leq d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Tatsächlich ist $C_*^{CW}(\mathbb{R}P^d;\mathbb{Z}/2)$ für die Standard-CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^d$ gegeben durch

$$0 \to \underset{\substack{\uparrow \\ d}}{\mathbb{Z}/2} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{\mathbb{Z}/2} \to 0 \ .)$$

I.8 Der Ext-Funktor

Def. I.8.1 Ein Kokettenkomplex besteht aus einer Familie C^* von R-(Links- oder Rechts-)moduln und Homomorphismen $\delta^*: C^* \to C^{*+1}$ mit $\delta^{*+1} \circ \delta^* = 0$.

Beobachtung: Ist M ein R-Linksmodul, so ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R(\cdot, M): \underline{R\text{-chain}} &\longrightarrow \underline{\mathbb{Z}\text{-cochain}} \\
(C_*, \partial_*) &\longmapsto (\mathrm{Hom}_R(C_*, M), (\cdot)\circ\partial_{*+1}) \\
(f_*: C_* \to D_*) &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_R(D_*, M) \to \mathrm{Hom}_R(C_*, M) \\ g_* \mapsto g_* \circ f_* \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ein kontravarianter Funktor. Für kommutatives R und einen R-Modul M ergibt sich

$$\mathrm{Hom}_R(\cdot, M): \underline{R\text{-chain}} \longrightarrow \underline{R\text{-cochain}}.$$

Sei C^* ein Kokettenkomplex. Setze

$$
\begin{aligned}
Z^n &:= \ker(\delta^n: C^n \to C^{n+1}) \quad \text{„Kozykel"} \\
B^n &:= \mathrm{Bild}(\delta^{n-1}: C^{n-1} \to C^n) \quad \text{„Koränder'}
\end{aligned}
$$

Def. I.8.2 Die n-te Kohomologie von C^* ist der R-Modul $H^n(C^*) := Z^n / B^n$.

Def. I.8.3 Seien M, N R-Linksmoduln und $P_* \to M$ projektiv. Dann definieren wir die abelsche Gruppe

$$\mathrm{Ext}_R^i(M, N) := H^i(\mathrm{Hom}_R(P_*, N)).$$

Bemerkung. Wie für Tor zeigt man, dass $Ext_i^R(M,N)$ unabhängig von $P_* \to M$ und funktoriell in M und N ist.

- Es gilt $Ext_R^i(M,N) = H^i(\mathrm{Hom}_R(M, I^*))$ für jede injektive Auflösung $N \to I^*$.

Prop. I.8.4 Es gibt einen nat. Iso.

$$Ext_R^0(M,N) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N).$$

Bew. Sei $N \to I^*$ injektiv. Betrachte

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,I^0) \to \mathrm{Hom}_R(M,I^1),$$

also $\mathrm{Hom}_R(M,N) = \ker(\mathrm{Hom}_R(M,I^0) \to \mathrm{Hom}_R(M,I^1)) =$
$= H^0(\mathrm{Hom}_R(M,I^*)) \cong Ext_R^0(M,N)$. $\square$

Satz I.8.5 (Ext-L.E.S.) Zu einer S.E.S.
$0 \to M_0 \to M_1 \to M_2 \to 0$ von R-Linksmoduln und einem R-Linksmodul N gibt es nat. L.E.S.en

(i)
$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Hom}_R(N,M_0) \to \mathrm{Hom}_R(N,M_1) \to \mathrm{Hom}_R(N,M_2) \to \\ &\to Ext_R^1(N,M_0) \to Ext_R^1(N,M_1) \to Ext_R^1(N,M_2) \to \\ &\to Ext_R^2(N,M_0) \to \cdots \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Hom}_R(M_2,N) \to \mathrm{Hom}_R(M_1,N) \to \mathrm{Hom}_R(M_0,N) \to \\ &\to Ext_R^1(M_2,N) \to Ext_R^1(M_1,N) \to Ext_R^1(M_0,N) \to \\ &\to Ext_R^2(M_2,N) \to \cdots \end{aligned}$$

Bew. Dual zu Satz I.6.4 („injektives Hufeisenlemma.") $\square$

Prop I.8.6 P projektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ext}^i_R(P,N)=0$ für $i\geq 1$ und jeden R-Modul N.

Bew. "$\Rightarrow$": Nutze $P \xrightarrow{id} P \to 0$. "$\Leftarrow$": Nach I.8.5.(i) ist $\mathrm{Hom}_R(P,\cdot)$ exakt, d.h. P ist projektiv nach I.4.3. $\square$

Prop. I.8.7 (i) $\mathrm{Ext}^i_R(\bigoplus_{j\in I} M_j, N) \cong \prod_{j\in I} \mathrm{Ext}^i_R(M_j,N)$.
(ii) $\mathrm{Ext}^i_R(M, \prod_{j\in I} N_j) \cong \prod_{j\in I} \mathrm{Ext}^i_R(M,N_j)$.

Bew. (i) $P^j_* \to M_j \rightsquigarrow \bigoplus_{j\in I} P^j_* \to \bigoplus_{j\in I} M_j$,

$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j\in I} P^j_*, N) \cong \prod_{j\in I} \mathrm{Hom}_R(P^j_*, N) \rightsquigarrow H^i(\cdot)$. $\square$

Beispiel. Die abelschen Gruppen
$$H^i(G;M) := \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$$
bilden die Gruppenkohomologie von G mit M-Koeff.en.

Satz I.8.8 (U.K.S. für Kokettenkomplexe)
Sei R ein HIR, C_* ein Kettenkomplex projektiver R-Moduln mit $C_n=0$ für $n<0$ und M ein R-Modul. Dann gibt es eine nat. S.E.S.

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(C_*),M) \to H^n(\mathrm{Hom}_R(C_*,M)) \xrightarrow{\alpha_n} \mathrm{Hom}_R(H_n(C_*),M) \to 0$$
$$[f] \longmapsto ([z]\mapsto f(z))$$

s_n

für alle $n\geq 0$. Die S.E.S. zerfällt über s_n (natürlich in M aber i.A. nicht natürlich in C_*.) $\square$

Sei N ein $\mathbb{Z}G$-Linksmodul. Die Ext-L.E.S. zu

$$0 \to I \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0 \quad \text{endet in}$$

$$0 \to \overbrace{\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, N)}^{= N^G = \{n \in N :\ g \cdot n = n \text{ für alle } g \in G\} \text{ „Invarianten"}} \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, N) \xrightarrow{e} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I, N) \to$$
$$\to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, N) \to 0.$$

Es gilt $e = 0$, falls N trivialer $\mathbb{Z}G$-Modul ist, d.h.

$$H^1(G; M) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I, N)$$

<u>Satz I.8.9</u> Für einen trivialen $\mathbb{Z}G$-Modul N gilt

$$H^1(G; N) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_{ab}, N).$$

<u>Bew.</u> Betrachte

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathrm{Group}}(G, N) &\xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I, N) \\ f &\longmapsto (\varphi_f : g-1 \mapsto f(g)) \\ (f_\varphi : g \mapsto \varphi(g-1)) &\longleftarrow\!\shortmid \ \varphi. \end{aligned}$$

Nachweis der Homomorphieeigenschaften: Übung. $\square$

<u>Bemerkung.</u> Die Gruppe $H^2(G; N) = \operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, N)$ klassifiziert Erweiterungen

$$1 \to N \to E \xrightarrow{\varphi} G \to 1,$$

sodass die Konjugationswirkung von $G \cong E/N$ auf dem abelschen Normalteiler $N \trianglelefteq E$ durch die $\mathbb{Z}G$-Modulstruktur von N gegeben ist:

$$e^{-1} n e = \varphi(e) \cdot n \quad \text{für alle } e \in E,\ n \in N$$

und zwar bis auf Isomorphie:
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & E \arrow[dd, "\cong"] \arrow[dr] & & \\ 1 \arrow[r] & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \arrow[r] & 1. \\ & & E' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Namensgebung „Ext".

Ist N ein trivialer $\mathbb{Z}G$-Modul, klassifiziert $H^2(G;N)$ demnach zentrale Erweiterungen von G durch N.

I.9 Künneth-Sätze

Sei nun R kommutativ.

Def. I.9.1 Seien C_* und D_* Kettenkomplexe über R. Das Tensorprodukt $C_* \otimes_R D_*$ ist der Kettenkomplex $(C_* \otimes_R D_*)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_R D_q$ mit

$$\partial^{\otimes}(\underbrace{x \otimes y}_{\in C_p \otimes D_q}) = \partial_p^{C_*}(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial_q^{D_*}(y).$$

Notiz. $\partial^{\otimes}\partial^{\otimes}(x \otimes y) = \partial^{\otimes}(\partial_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial_q(y))$
$= (-1)^{p-1} \partial_p(x) \otimes \partial_q(y) + (-1)^p \partial_p(x) \otimes \partial_q(y) = 0.$

Def. I.9.2 Die Alexander-Whitney-Abbildung ist

$$AW_* : C_*^{sing}(X \times Y; R) \longrightarrow C_*^{sing}(X;R) \otimes_R C_*^{sing}(Y;R)$$
$$(\sigma \times \tau : \Delta_n \to X \times Y) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \sigma|_{[v_0,\dots,v_i]} \otimes \tau|_{[v_i,\dots,v_n]}$$

Satz I.9.3 (Eilenberg-Zilber) Die Kettenabb. AW_* hat ein Kettenhomotopieinverses EZ_*.

Kor. I.9.4 $H_*^{sing}(X \times Y; R) \cong H_*(C_*^{sing}(X;R) \otimes_R C_*^{sing}(Y;R))$. $\square$

Beweis von Satz I.9.3 im nächsten Abschnitt, aber (T1 . IV. 1.12):

Sind X und Y Zellkomplexe und ist X oder Y lokal kompakt, so ist $X \times Y$ ein Zellkomplex mit Filtrierung $(X \times Y)^n = \bigcup_{p+q=n} X^p \times X^q$ und daher

$$C_*^{CW}(X \times Y; R) \cong \bigoplus_{p+q=n} C_*^{CW}(X;R) \otimes_R C_*^{CW}(Y;R) = C_*^{CW}(X) \otimes_R C_*^{CW}(Y),$$

also $H_n^{CW}(X \times Y; R) \cong H_n(C_*^{CW}(X;R) \otimes_R C_*^{CW}(Y;R))$. $\square$

<u>Satz I.7.5</u> (Künneth-Satz für Kettenkomplexe)
Seien C_* und D_* Kettenkomplexe projektiver Moduln über einem HIR R mit $C_n = D_n = 0$ für $n < 0$. Dann gibt es eine nat. S.E.S.

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_n(C_*) \otimes_R H_n(D_*) \to H_n(C_* \otimes_R D_*) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(C_*), H_q(D_*)) \to 0,$$

die (nicht natürlich) zerfällt.

<u>Bew.</u> Betrachte zunächst den Spezialfall $\partial_n^{C_*} = 0$ für alle n. Dann folgt $\partial^{\otimes}(x \otimes y) = \pm x \otimes \partial(y)$, d.h. bis auf das Vorzeichen ist $C_* \otimes_R D_* \cong$
$\cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i \otimes_R D_{*-i}$ und daher

$$H_n(C_* \otimes_R D_*) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_n(C_i \otimes_R D_{*-i}) \overset{\text{u.K.S.}}{\underset{C_i \text{ proj.}}{\cong}} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i \otimes_R H_n(D_{*-i}) \cong$$

$\cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i(C_*) \otimes_R H_{n-i}(D_*)$ sowie $\mathrm{Tor}_1^R(H_p(C_*), H_q(D_*)) \cong$

$\cong \mathrm{Tor}_1^R(C_*, H_q(D_*)) \overset{C_* \text{ proj.}}{=} 0$, also gilt der Satz, falls $\partial_*^{C_*} = 0$. Im allgemeinen Fall betrachte wieder

$$0 \to Z_* \to C_* \xrightarrow{\partial_*} B_{*-1} \to 0,$$

wobei Z_* und B_* triviale Differentiale haben.

Weil R ein HIR ist und C_* projektiv (also frei) ist, sind Z_* und B_* ebenfalls projektiv. Daher

$$0 \to Z_* \otimes_R D_* \to C_* \otimes_R D_* \to B_{*-1} \otimes_R D_* \to 0$$

und wir erhalten

$$\xrightarrow{\delta_{n+1}} \bigoplus_{p+q=n} Z_p \otimes_R H_q(D_*) \to H_n(C_* \otimes_R D_*) \to \bigoplus_{p+q=n} B_{p-1} \otimes_R H_q(D_*) \xrightarrow{\delta_n},$$

wobei die Randabb.en δ_* wieder von den Inklusionen $i_*: B_* \subseteq Z_*$ induziert werden. Daher

$$0 \to \operatorname{coker} \delta_{n+1} \to H_n(C_* \otimes_R D_*) \to \ker \delta_n \to 0$$

und $\operatorname{coker} \delta_{n+1} = \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes_R H_q(D_*)$, denn

$\operatorname{coker}(i_p \otimes \mathrm{id}_{H_q(D_*)}) = (\operatorname{coker} i_p) \otimes H_q(D_*)$, weil $(\cdot) \otimes H_q(D_*)$ rechtsexakt ist. Außerdem $\ker \delta_n \cong \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R(H_p(C_*), H_q(D_*))$, durch Summieren von

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^R(H_p(C_*), H_q(D_*)) \to Z_p \otimes H_q(D_*) \xrightarrow{i_p \otimes \mathrm{id}_{H_q(D_*)}} B_p \otimes H_q(D_*)$$

laut Tor-L.E.S. (I.6.4). Zerfällungs- und Natürlichkeitsdiskussion ähnlich wie bei U.K.S. $\square$

Satz I.9.6 (Künneth-Satz für Räume) Sei R ein HIR, X und Y top. Räume und $H_* = H_*^{sing}(\cdot\,; R)$. Dann gibt es eine nat. S.E.S.

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes_R H_q(Y) \to H_n(X \times Y) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(X), H_q(Y)) \to 0,$$

die (nicht. nat.) zerfällt.

Bew. Sätze I.9.3 und I.9.5. $\square$

Kor. I.9.6 Ist $R = K$ ein Körper, so gilt

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes_R H_q(Y) \cong H_n(X \times Y). \qquad \square$$

Für $K = \mathbb{Q}$ folgt $b_n(X \times Y) = \sum_{p+q=n} b_p(X) \cdot b_q(Y)$, falls X und Y endlich-dim. Homologie haben und nicht-verschwindende Homologie nur in endlich vielen Graden.

Satz I.9.6 (Künneth-Satz für Paare) Sei R ein HIR, (X, A) und (Y, B) abg. Kofaserungen und $H_* = H_*^{sing}(\cdot, \cdot\,; R)$. Dann gibt es eine nat. S.E.S.

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(X, A) \otimes_R H_q(Y, B) \to$$

$$\to H_n(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \to$$

$$\to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(X, A), H_q(Y, B)) \to 0$$

die (nicht. nat.) zerfällt.

Bew.: Zeige $H_n(C_*^{sing}(X, A; R) \otimes_R C_*^{sing}(Y, B; R)) \cong$

$\cong H_n(C_*^{sing}(X\times Y, X\times B \cup A\times Y; R))$ u.a. mit Hilfe von Ausschneidung. $\square$

I.10 Azyklische Modelle

Sei $\mathcal{C}$ eine lokal kleine Kategorie und R ein komm. Ring.

Def. I.10.1 Ein $R\mathcal{C}$-Modul ist ein (kovarianter) Funktor $\mathcal{C} \to \underline{R\text{-Mod}}$. Homomorphismen von $R\mathcal{C}$-Moduln sind nat. Trafo.en. $\rightsquigarrow$ Kategorie $\underline{R\mathcal{C}\text{-Mod}}$.

Bsp. · Ist $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{id}$, so ist ein $R\mathcal{C}$-Modul M ein R-Modul und $\mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M(\cdot), N(\cdot))$.

· Ist $\mathcal{C} = \underline{G}$ für eine Gruppe G, so ist ein $R\mathcal{C}$-Modul ein R-Modul M mit einem Homomorphismus $G \to \mathrm{Aut}_R M$, d.h. ein RG-Modul und $\mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(M, N) = \mathrm{Hom}_{RG}(M(\cdot), N(\cdot))$:

$$\begin{array}{ccc} M(\cdot) & \xrightarrow{g} & M(\cdot) \\ {\scriptstyle \eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ N(\cdot) & \xrightarrow{g} & N(\cdot) \end{array}.$$

Eine Folge von $R\mathcal{C}$-Moduln $0 \to M_0 \to M_1 \to M_2 \to 0$ heißt exakt, falls $0 \to M_0(x) \to M_1(x) \to M_2(x) \to 0$ für alle $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ exakt ist.

Def. I.10.2 Ein $R\mathcal{C}$-Modul P heißt projektiv, falls

$$\begin{array}{ccccc} M & \to & N & \to & 0 \\ {\scriptstyle \exists}\nwarrow & & \uparrow & & \\ & & P & & \end{array}$$

Für einen projektiven $R\mathcal{C}$-Modul P ist jedes $P(x)$ für $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein projektiver R-Modul (Setze $N(y) = \begin{cases} N_0 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}, \ldots$). <u>Warnung:</u> Die Umkehrung gilt nicht!

<u>Def. I.10.3</u> Ein $R\mathcal{C}$-Modul F heißt frei, falls es Objekte $(x_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{C}$ gibt, sodass F (nat.) isomorph ist zu

$$\bigoplus_{i \in I} R[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_i, \cdot)].$$

Die Objekte x_i heißen Modelle von F.

<u>Prop. I.10.4</u> Freie $R\mathcal{C}$-Moduln sind projektiv.

<u>Bew.</u> O.B.d.A. $F = R[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \cdot)]$ für ein $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Z.z.:
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "e"] & N \arrow[r] & 0 \\ & F \arrow[u, "\eta"'] \arrow[ul, dotted, "\bar\eta"] & \end{tikzcd}$$

Betrachte insbesondere
$$\begin{tikzcd} M(x) \arrow[r, "e(x)"] & N(x) \arrow[r] & 0 \\ & R[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x)] \arrow[u, "\eta(x)"'] & \end{tikzcd}$$

Sei $m \in M(x)$ ein Urbild von $\eta(x)(\mathrm{id}_x)$ unter $e(x)$ und setze $\bar\eta(x)(\mathrm{id}_x) := m$. Für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$ ist somit durch die Natürlichkeitsforderung an $\bar\eta$ vorgegeben:

$$\bar\eta(y)(f) = \bar\eta(y)(f \circ \mathrm{id}_x) = M(f)(\bar\eta(x)(\mathrm{id}_x)) = M(f)(m).$$

Nach Konstruktion gilt

$$e(y)(\bar\eta(y)(f)) = e(y)(M(f)(m)) = N(f)(e(x)(m)) =$$
$$= N(f)(\eta(x)(\mathrm{id}_x)) = \eta(y)(F(f)(\mathrm{id}_x)) = \eta(y)(f \circ \mathrm{id}_x)$$
$$= \eta(y)(f), \quad \text{d.h. } e \circ \bar\eta = \eta. \qquad \square$$

__Beispiel.__ $C_n^{sing}(\cdot\,;R) : \underline{Top} \longrightarrow R\text{-}Mod$ ist ein freier $R\underline{Top}$-Modul mit Modell Δ_n:

$$C_n^{sing}(\cdot\,;R) = R[\mathrm{Hom}_{\underline{Top}}(\Delta_n, \cdot)].$$

Somit ist $C_*^{sing}(\cdot\,;R)$ ein Kettenkomplex projektiver $R\underline{Top}$-Moduln. Der gleiche Beweis wie von Satz I.2.2 liefert:

__Satz I.10.5__ Sei $P_{*\geq 0}$ ein Kettenkomplex projektiver $R\mathcal{C}$-Moduln. Sei $Q_{*\geq 0}$ ein Kettenkomplex mit $H_k(Q_*)=0$ für $k>0$ (objektweise). Dann gibt es einen Iso.

$$[P_*, Q_*] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(H_0 \circ P_*, H_0 \circ Q_*). \qquad \square$$

__Satz I.10.6__ (über azyklische Modelle)
Sei $F_{*\geq 0}$ ein Kettenkomplex freier $R\mathcal{C}$-Moduln und M_* die Mengen der Modelle. Sei G_* ein $R\mathcal{C}$-Kettenkomplex mit $H_k(G_*(x)) = 0$ für alle $x \in M_k \cup M_{k+1}$ und $k \geq 1$. Dann gilt $[F_*, G_*] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(H_0 \circ F_*, H_0 \circ G_*)$.

__Bew.__ So wie Satz I.2.2, wobei die nat. Trafo.n ähnlich wie in Prop. I.10.4 durch ihre Komponenten an den Modellen bereits festgelegt sind. $\square$

__Beweis von Satz I.9.3:__ Setze $\mathcal{C} = \underline{Top} \times \underline{Top}$, $F_* = C_*^{sing}(\cdot \times \cdot\,;R)$, $G_* = C_*^{sing}(\ ;R) \otimes_R C_*^{sing}(\ ;R)$

Es gilt

$$F_n = R[\mathrm{Hom}_{\underline{Top}}(\Delta_n, \cdot \times \cdot)] \cong R[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Delta_n \times \Delta_n, \cdot \times \cdot)],$$

d.h. F_n ist ein freier $R\mathcal{C}$-Modul mit Modell $\Delta_n \times \Delta_n$.

Ähnlich erhalten wir

$$
\begin{aligned}
G_n &= \bigoplus_{n=p+q} C_p^{\mathrm{sing}}(\,\cdot\,;R) \otimes_R C_q^{\mathrm{sing}}(\,\cdot\,;R) \\
&= \bigoplus_{n=p+q} R[\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(\Delta_p, \cdot)] \otimes_R R[\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(\Delta_q, \cdot)] \\
&\cong \bigoplus_{n=p+q} R[\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(\Delta_p, \cdot) \times \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(\Delta_q, \cdot)] \\
&\cong \bigoplus_{n=p+q} R[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Delta_p \times \Delta_q, \, \cdot \times \cdot \,)],
\end{aligned}
$$

d.h. G_n ist freier $R\mathcal{C}$-Modul mit Modellen $\Delta_p \times \Delta_q$ für $p+q=n$. Für alle p,q gilt $\Delta_p \times \Delta_q \simeq \bullet$, daher $H_k(F_*(\Delta_p \times \Delta_q)) = H_k(G_*(\Delta_p \times \Delta_q)) = 0$ für alle p,q und $k \geq 1$.

Betrachte

$$
\begin{array}{ccc}
\Psi(X\times Y) : H_0(G_*(X \times Y)) & \longrightarrow & H_0(F_*(X\times Y)) \\
\| & & \| \\
H_0(C_*^{\mathrm{sing}}(X;R) \otimes C_*^{\mathrm{sing}}(Y;R)) & \longrightarrow & H_0^{\mathrm{sing}}(X \times Y; R) \\
{[x \otimes y]} & \longmapsto & [(x,y)]
\end{array}
$$

Die nat. Trafo. Ψ ist wohldefiniert, weil $\partial_1^{\otimes} = \partial_1^X \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \partial_1^Y$, woraus folgt, dass Ψ Ränder in Ränder überführt.

Nach Satz I.10.6 bestimmt Ψ bis auf Kettenhomotopie die Kettenabb. $EZ_* : G_* \to F_*$ mit $H_0(EZ_*) = \Psi$. Weil $H_0(EZ_*) \circ H_0(AW_*) = \mathrm{id}$ und $H_0(AW_*) \circ H_0(EZ_*) = \mathrm{id}$, folgt $EZ_* \circ AW_* \simeq \mathrm{id}_*$ und $AW_* \circ EZ_* \simeq \mathrm{id}_*$. $\square$

II Kohomologie

II.1 Eilenberg-Steenrod-Kohomologietheorien

Sei R ein kommutativer Ring.

Def. II.1.1 Eine Kohomologietheorie mit Werten in $\underline{R\text{-Mod}}$ besteht aus kontravarianten Funktoren
$$H^n : \underline{\mathrm{Top}}^{(2)} \longrightarrow \underline{R\text{-Mod}} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$
und natürlichen Transformationen
$$\delta^n : H^n \circ \partial \longrightarrow H^{n+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$
mit $\partial : \underline{\mathrm{Top}}^{(2)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Top}}^{(2)}$, $(X,A) \mapsto (A, \emptyset)$, sodass Homotopieinvarianz, LES und Ausschneidung wie in T1.I.5.1 mit umgekehrten Pfeilen gilt.

Def. II.1.2 Der singuläre Kokettenkomplex von (X,A) mit R-Koeff. ist $C^*_{\mathrm{sing}}(X,A;R) := \mathrm{Hom}_R(C^{\mathrm{sing}}_*(X,A;R), R)$.
Die n-te singuläre Kohomologie ist
$$H^n_{\mathrm{sing}}(X,A;R) := H^n(C^*_{\mathrm{sing}}(X,A;R)).$$

Beobachtung. $C^*_{\mathrm{sing}}(X,A;R) \cong \mathrm{Hom}_R(C^{\mathrm{sing}}_*(X,A;R), R)) \cong$
$\cong \mathrm{Hom}_R(R \otimes_{\mathbb{Z}} C^{\mathrm{sing}}_*(X,A;\mathbb{Z}), R)) \cong$
$\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C^{\mathrm{sing}}_*(X,A;\mathbb{Z}), R))$. Ist $A = \emptyset$, folgt
$\ldots \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(\Delta^*, X)), R) \cong$
$\cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Set}}}(\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(\Delta^*, X), R)$

Satz II.13 Singuläre Kohomologie ist eine Kohomologietheorie.

Bew. 1.) Homotopieinvarianz: $f \simeq g \Rightarrow$ $C_*^{sing}(f) \simeq_{P_*} C_*^{sing}(g)$ und $(\cdot) \circ P_*$ ist eine (Ko-) Kettenhomotopie von $(\cdot) \circ C_*^{sing}(f)$ zu $(\cdot) \circ C_*^{sing}(g)$.

2.) L.E.S.: Die S.E.S.

$$0 \to C_*^{sing}(A;R) \to C_*^{sing}(X;R) \rightleftarrows C_*^{sing}(X,A;R) \to 0$$

zerfällt, weil $\{\sigma : \Delta^* \to X : \operatorname{Bild} \sigma \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$ eine Basis von $C_*^{sing}(X,A;R)$ ist. Es folgt, dass

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(C_*^{sing}(X,A;R),R) \to \operatorname{Hom}_R(C_*^{sing}(X;R),R)$$
$$\to \operatorname{Hom}_R(C_*^{sing}(A;R),R) \to 0$$

exakt ist. (Der duale zu) Satz T1.II.2.2 liefert die geforderte nat. L.E.S.

3.) In Beweis von Satz T1.II.4.2 hatten wir für $A \subseteq Y \subseteq X$ mit $\bar{A} \subseteq \mathring{Y}$ gezeigt, dass die Inklusion eine Kettenhom.äquiv.

$$C_*^{sing}(X \setminus A, Y \setminus A; R) \simeq C_*^{sing}(X,Y;R)$$

induziert. Wie in 1.) erhalten wir dual

$$C^*_{sing}(X,Y;R) \simeq C^*_{sing}(X \setminus A, Y \setminus A; R). \qquad \square$$

Bemerkung. Wie zuvor ist für einen R-Modul M auch $H^*_{sing}(\cdot,\cdot;M) := H^*(C^*_{sing}(\cdot,\cdot;R) \otimes_R M)$

eine Kohomologietheorie mit Werten in R-Mod.

Satz II.1.4 (H^*_{sing}, δ^*) erfüllt das Dimensionsaxiom

$$H^n_{sing}(\cdot; M) = 0 \quad \text{für } n \neq 0$$

und das Additivitätsaxiom (Multiplikativitätsaxiom?)

$$H^*_{sing}\Big(\coprod_{i\in I} X_i; M\Big) \cong \prod_{i \in I} H^*_{sing}(X_i; M).$$

Bew. Dim.: $C^*_{sing}(\cdot; M) = 0 \to \underset{0}{M} \xrightarrow{0} \underset{1}{M} \xrightarrow{id} \underset{2}{M} \xrightarrow{0} \underset{3}{M} \xrightarrow{id}$

Add.: wie in Prop. I.8.7. $\square$

Satz II.1.5 (U.K.S. für sing. Kohomologie)

Sei R ein HIR. Dann gibt es eine nat. S.E.S.

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(X, A; R), R) \to$$
$$\to H^n(X, A; R) \to \mathrm{Hom}_R(H_n(X, A; R), R) \to 0,$$

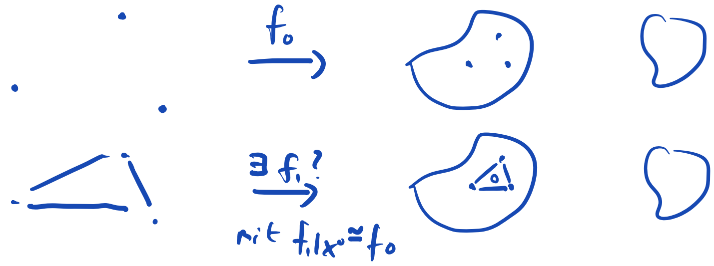
die (nicht nat.) zerfällt.

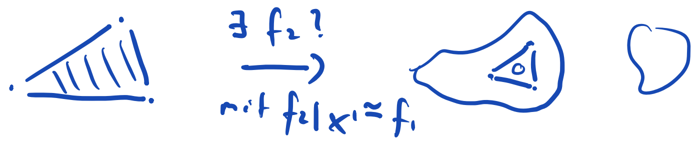
Bew. Anwenden von Satz I.8.8 auf $C^{sing}_*(X, A; R)$. $\square$

$\to$ Kohomologie ist durch Homologie festgelegt.

II.2 Motivation

1.) Wird häufig(er) in homotopietheoretischen Kontexten relevant, z.B. Obstruktionstheorie:





$n \geq 3$:

$a : \sigma_n \longmapsto [f_{n-1}|_{\partial\sigma_n}] \in \pi_{n-1}(X)$, $\delta a(\sigma_{n+1}) = a(\partial\sigma_{n+1}) = 0$

$\rightsquigarrow [a] \in H^n(X; \pi_{n-1}(X))$ „Fortsetzungsobstruktion".

Weiteres Bsp.: Charakteristische Klassen:

Sei G eine top. Gruppe, $b_G : \underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{Set}}$

$b_G(X) = \{$„G-Hauptfaserbündel" über $X\}/_{\cong}$

Eine char. Klasse ist eine nat. Trafo. $b_G \to H^*$.

$$f : X \to Y \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} b_G(Y) & \xrightarrow{f^*} & b_G(X) \\ c\downarrow & & \downarrow c \\ H^*(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^*(X) \end{array}, \text{ d.h. } c(f^*P) = f^*c(P).$$

Es gilt $b_G \cong [\cdot, BG]$. „Yoneda-Lemma":

Char. Klassen bzgl. $H^* = \mathrm{Nat}(b_G, H^*) = H^*(BG)$.

2.) <u>Bezug zur globalen Analysis:</u>

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $\Omega^* M$ der Kokettenkomplex der Differentialformen auf M. Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^* M & \xrightarrow{I_*} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*^{\text{glatt}}(M); \mathbb{R}) & \underset{(\text{nicht triv.})}{\xrightarrow{\cong}} & C^*_{\text{sing}}(M; \mathbb{R}) \\ \omega & \longmapsto & (\sigma \longmapsto \int \sigma^*\omega). & & \end{array}$$

Dann folgt aus dem Satz von Stokes

$$I^{*+1}(d\omega)(\sigma : \Delta^{*+1} \to M) = \int_{\Delta^{*+1}} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta^{*+1}} d(\sigma^*\omega) =$$

$$= \int_{\partial\Delta^{*+1}} i^*\sigma^*\omega = \int_{\partial\Delta^{*+1}} (\sigma \circ i)^*\omega = \delta^*(I^*(\omega))(\sigma),$$

mit $i : \partial\Delta^{*+1} \subseteq \Delta^*$, d.h. I_* ist eine Kokettenabbildung.

<u>Satz (de Rham)</u>. $H^n(I_*) : H^n_{dR}(M) \xrightarrow{\cong} H^n_{sing}(M; \mathbb{R})$. □

3.) <u>Produktstruktur</u>: Setze $C^*_{cw}(X) \equiv H^*_{sing}(X^*, X^{*-1}) \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C^{cw}_* X, \mathbb{R})$,

$C^*_{cw}(X) \otimes C^*_{cw}(X) \xrightarrow{\cong} C^*_{cw}(X \times X)$, $e^*_p \otimes e^*_q \longmapsto (e_p \times e_q)^*$

induziert $H^p_{cw}(X) \times H^q_{cw}(X) \to H^{p+q}_{cw}(X \times X)$

Wir erhalten mit $\Delta : X \to X \times X$, $x \mapsto (x,x)$ das Produkt

$\cup : H^p_{cw}(X) \times H^q_{cw}(X) \to H^{p+q}_{cw}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}_{cw}(X)$

„Cup-Produkt“ $\rightsquigarrow$ $H^*_{cw}(X) := \bigoplus_{n \geq 0} H^n_{cw}(X)$ ist

ein graduierter Ring. (Achtung: Δ ist nicht zellulär! Wähle zelluläre Approx. der Diag. $\Delta' \simeq \Delta$.)

<u>II.3 Multiplikative Strukturen und graduierte Algebren</u>

<u>Def. II.3.1</u> Sei (H^*, δ^*) eine Kohomologietheorie mit Koeff. in R. Eine multiplikative Struktur ordnet jedem Raum X ein Element $1_X \in H^0(X)$ und Teilräumen $A, B \subseteq X$ eine Familie R-bilinearer Abb.en

$\cup : H^p(X, A) \times H^q(X, B) \longrightarrow H^{p+q}(X, A \cup B)$ zu, sd.

1.) $\cup$ natürlich ist für $f: (X; A, B) \to (Y; A', B')$

2.) $\cup$ graduiert kommutativ ist:

Für $u \in H^p(X, A)$ und $v \in H^q(Y, B)$ gilt

$u \cup v = (-1)^{p \cdot q} v \cup u$

3.) $\cup$ assoziativ ist: $u \cup (v \cup w) = (u \cup v) \cup w$.

4.) Für $u \in H^p(X, A)$ gilt $1_X \cup u = u \cup 1_X = u$.

5.) Ist $j: A \hookrightarrow X$ eine Teilrauminklusion, $u \in H^p(A)$ und $v \in H^q(X)$, gilt

$$\delta^p(u) \cup v = \delta^{p+q}(u \cup H^q(j)(v)).$$

Bemerkungen. Wir sprechen auch dann noch von einer mult. Struktur, wenn sie nur für bestimmte Tripel $(X; A, B)$ erklärt ist (z.B. $(A \cup B; A, B)$ schnittig).

Def. II.3.2 Eine R-Algebra ist ein R-Modul A mit einer R-bilinearen Abb. $m: A \times A \to A$ (äquivalent einem R-Hom. $A \otimes_R A \to A$), sd. $(A, +, m)$ ein Ring ist.

Eine graduierte R-Algebra ist eine R-Algebra A mit einer Zerlegung $A = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A^p$, sd. $m(A^p \times A^q) \subseteq A^{p+q}$.

Elemente in A^p heißen (p-)homogen. Eine graduierte R-Algebra $A = \bigoplus_p A^p$ heißt graduiert kommutativ, falls $m(u,v) = (-1)^{pq} m(v,u)$ für $u \in A^p$ und $v \in A^q$ gilt. Für $a \in A^p$ schreiben wir $|a| = \deg a = p$.

<u>Beispiele</u> 1.) Ist H^* eine Kohomologietheorie mit multiplikativer Struktur, so ist

$$H^*(X) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^p(X)$$

eine graduiert kommutative graduierte R-Algebra.

2.) Der Polynomring $Q = R[x_1, \dots, x_n]$ ist eine R-Algebra. Den Erzeugern (= Variablen) seien feste Grade $\deg x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zugeordnet. Dann ist $Q = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} Q^p$ mit $Q_p = \langle x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} : \sum_{j=1}^{n} i_j \cdot \deg x_j = p \rangle_R$ eine graduierte R-Algebra. Sie ist graduiert kommutativ, falls $\deg x_i \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ für alle $i = 1, \dots, n$ und/oder falls $\operatorname{char} R = 2$. (Sie ist immer kommutativ)

3.) Die äußere Algebra $\Lambda_R[x_1, \dots, x_n]$ ist der freie R-Modul $R[x_{i_1} \cdots x_{i_k} : i_1 < \dots < i_k]$ mit festgelegten ungeraden $\deg x_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ und

$$\Lambda_R[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_p \Lambda_R^p[x_1, \dots, x_n], \text{ wobei}$$

$$\Lambda_R^p[x_1, \dots, x_n] = R[x_{i_1} \cdots x_{i_k} : i_1 < \dots < i_k, \sum_j \deg x_{i_j} = p]$$

Die Multiplikation ergibt sich aus den Regeln $x_i x_j = -x_j x_i$ und $x_i x_i = 0$ und ist grad. komm.

Def. II.3.3 Sind $A^* = \bigoplus_p A^p$, $B^* = \bigoplus_p B^p$ graduierte R-Algebren, so ist das Tensorprodukt die graduierte R-Algebra

$$A^* \otimes_R B^* := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{p+q=n} A^p \otimes_R B^q$$

mit $(a\otimes b)(a'\otimes b') = (-1)^{|a'|\cdot|b|} aa' \otimes bb'$

für $a \in A^p$, $a' \in A^{p'}$, $b \in B^q$, $b' \in B^{q'}$.

Sind A^* und B^* graduiert kommutativ, so auch $A^* \otimes_R B^*$.

Beispiel.

$\Lambda_R[x_1,\dots,x_n] \otimes \Lambda_R[y_1,\dots,y_m] = \Lambda_R[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$.

II.4 Multiplikative Strukturen auf singulärer Kohomologie

Setze $C_* := C_*^{sing}(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ und betrachte die nat. Kokettenabbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*X,R) \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*Y,R) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*X \otimes_R C_*Y, R\otimes_{\mathbb{Z}} R) \\ f\otimes g &\mapsto (x\otimes y \mapsto f(x)\otimes g(x)) \end{aligned}$$

Komposition mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(AW_*, R\otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{\cdot} R)$ ergibt

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*X,R) \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*Y,R) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X\times Y), R)$$

In Kohomologie erhalten wir daraus

$$H^p(\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_*X,R)) \otimes_R H^q(\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_*Y,R)) \xrightarrow{\alpha}$$
$$\to H^{p+q}(\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_*X,R) \otimes_R \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_*Y,R)) -$$
$$\longrightarrow H^{p+q}(X\times Y;R)$$

mit $\alpha([f]\otimes[g]) = [f\otimes g]$, also insgesamt

$$\times : \quad H^p(X;R)\otimes_R H^q(Y;R) \longrightarrow H^{p+q}(X\times Y;R),$$

das (kohomologische) Kreuzprodukt.

Def II.4.1 Das (singuläre) Cup-Produkt

$$\smile : \quad H^p(X;R)\otimes_R H^q(X;R) \longrightarrow H^{p+q}(X;R)$$

ist die Komposition

$$H^p(X;R)\otimes_R H^q(X;R) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X\times X;R) \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(X;R)$$

mit $\Delta : X \to X\times X$, $x \mapsto (x,x)$.

Bemerkung Wie am Ende von II.2 gesehen, haben wir für einen Zellkomplex X auf der zellulären Kohomologie

$$H^*_{cw}(X;R) := H^*(\mathrm{Hom}_R(C^{cw}_*(X;R),R))$$

auch ein zelluläres Cup-Produkt.

Aus der Def. von AW_* folgt die explizite Beschreibung des singulären Cup-Produkts für einen p-Kozykel φ und einen q-Kozykel ψ:

$$\varphi \cup \psi = \left(\sigma \mapsto \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_p]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_p,\dots,v_{p+q}]}) \right).$$

Seien

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X,A), R) = \{ \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p X, R) : \chi|_{C_p A} = 0 \},$$

$$\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X,B), R) = \{ \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p X, R) : \chi|_{C_p B} = 0 \}.$$

Es folgt

$$\varphi \cup \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(C_*X / C_*A + C_*B, R \right).$$

Falls $(A \cup B; A, B)$ schnittig ist, gilt

$$H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*X / C_*A + C_*B, R)) \cong H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X, A\cup B), R))$$

und wir erhalten

$$\cup : H^p(X,A;R) \otimes_R H^q(X,B;R) \longrightarrow H^{p+q}(X, A\cup B; R)$$

<u>Satz II.4.2</u> Das Cup-Produkt ist eine multiplikative Struktur in singulärer Kohomologie.

<u>Bew.</u> Zur Vereinfachung nur der Fall $A = B = \emptyset$. Sei $1_X \in H^0(X)$ durch den konstanten Kozykel $C^0(X) \to R$, $\sigma^0 \mapsto 1$ repräsentiert. Dann ist 4.) klar. 1.), 3.) und 5.) zeigt man leicht durch Nachrechnen.

2.) (Graduierte Kommutativität) Betrachte die nat. Kettenabb. $\rho_* : C_* X \to C_* X$

(Involution) $\quad \sigma^n \mapsto (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \sigma|_{[v_n, \dots, v_0]}$

Die nat. Trafo.'s $\rho_* : C_*(\cdot) \to C_*(\cdot)$ bilden eine Kettenabb. von $\mathbb{Z}\mathrm{Top}$-Kettenkomplexen mit $\rho_0 = \mathrm{id}_{C_0(\cdot)}$. Aus Satz I.10.6 folgt $\rho_* \simeq \mathrm{id}_*$.

Außerdem gilt

$$\rho^*\varphi \cup \rho^*\psi = (-1)^{|\varphi|\cdot|\psi|} \cdot \rho^*(\psi \cup \varphi), \quad \text{denn}$$

$$\rho^*\varphi \cup \rho^*\psi(\sigma^{p+q}) = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \varphi(\sigma|_{[v_p, \dots, v_0]}) \cdot (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \psi(\sigma|_{[v_{p+q}, \dots, v_p]})$$

$$= (-1)^{\frac{p^2+q^2+p+q+(p+q)(p+q+1)}{2}} \rho^*(\psi \cup \varphi) \quad \text{und}$$

$$\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+p+q+(p+q)(p+q+1)) = \tfrac{1}{2}(2p^2+2q^2+2p+2q+2pq)$$
$$= p^2+p+q^2+q+pq \equiv pq \ (2). \qquad \square$$

<u>Prop. II. 4.3</u> Für $\varphi \in H^p(X;R)$ und $\psi \in H^q(Y;R)$ gilt

$$\varphi \times \psi = pr_X^*\varphi \cup pr_Y^*\psi .$$

<u>Bemerkung.</u> Gilt auch für $\varphi \in H^p(X,A;R)$ und $\psi \in H^q(Y,B;R)$.

Bew.

$$\begin{tikzcd}
& H^*(X;R)\otimes_R H^*(Y;R) \arrow[dl, "pr_X^*\otimes pr_Y^*"'] \arrow[dr, "\times"] \arrow[dd, phantom, "\circlearrowleft\ \text{Nat. von „}\times\text{“}"] & \\
H^*(X\times Y;R)\otimes_R H^*(X\times Y;R) \arrow[dr, "\times"] \arrow[ddr, bend right, "\cup"'] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowleft\ \text{Def. von „}\cup\text{“}"] & & H^*(X\times Y;R) \arrow[dl, "(pr_X\times pr_Y)^*"'] \arrow[ddl, bend left, "id"] \arrow[ddl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& H^*((X\times Y)\times(X\times Y);R) \arrow[d, "\Delta^*"] & \\
& H^*(X\times Y;R) &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Prop. II.4.4 Das Kreuzprodukt

$$H^*(X;R)\otimes_R H^*(Y;R) \xrightarrow{\times} H^*(X\times Y;R)$$

ist ein Homomorphismus graduierter R-Algebren.

Bew. z.z.: $\times\big((a\otimes b)\cdot(a'\otimes b')\big) = \times(a\otimes b)\cup\times(a'\otimes b')$.

$$\text{L.S.} = (-1)^{|b||a'|}(a\cup a')\times(b\cup b')$$

$$\text{R.S.} = a\times b \cup a'\times b' \overset{\text{II.4.3}}{=} (pr_X^*a\cup pr_Y^*b)\cup(pr_X^*a'\cup pr_Y^*b')$$

$$= (-1)^{|b||a'|}(pr_X^*a\cup pr_X^*a')\cup(pr_Y^*b\cup pr_Y^*b')$$

$$= (-1)^{|b||a'|}pr_X^*(a\cup a')\cup pr_Y^*(b\cup b')$$

$$\overset{\text{II.4.3}}{=} (-1)^{|b||a'|}(a\cup a')\times(b\cup b').$$

$\square$

<u>Satz II.4.5</u> (Kohomologischer Künneth-Satz für Räume)
Sei R ein HIR und seien (X,A) und (Y,B) abg. Kofaserungen, sodass $H_p(X,A)$ für alle p endlich erzeugt ist. Dann gibt es für jedes $n \geq 0$ eine nat. S.E.S.

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H^p(X,A;R) \otimes_R H^q(Y,B;R) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\times} H^n(X\times Y, X\times B \cup A\times Y; R) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R\big(H^p(X,A;R), H^q(Y,B;R)\big) \to 0,$$

die (nicht nat.) zerfällt.

<u>Bew.</u> Allgemeiner Fall ähnlich wie in Homologie (Satz I.9.6). Für einen Körper R folgt der kohomologische aus dem homologischen Satz:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{p+q=n} H^p(X;R) \otimes_R H^q(Y;R) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\cong", "\text{u.K.S.}"'] & H^*(X\times Y;R) \arrow[ddd, "\cong", "\text{u.K.S.}"'] \\
\bigoplus_{p+q=n} \operatorname{Hom}_R(H_p(X;R),R) \otimes_R \operatorname{Hom}_R(H_q(Y;R),R) \arrow[d, "\alpha", "\cong"'] & \\
\bigoplus_{p+q=n} \operatorname{Hom}_R(H_p(X;R) \otimes_R H_q(Y;R), R) \arrow[d, "\cong"'] & \\
\operatorname{Hom}_R\Big(\bigoplus_{p+q=n} H_p(X;R) \otimes_R H_q(Y;R), R\Big) & \operatorname{Hom}_R(H_n(X\times Y;R),R) \arrow[l, "\cong"', "\text{u.K.}"]
\end{tikzcd}$$

mit $\alpha(\varphi\otimes\psi)(x\otimes y)=\varphi(x)\cdot\psi(y)$. Weil $\dim_{\mathbb{R}} H_p(X;\mathbb{R})<\infty$, ist α ein Iso. $\square$

II.5 Berechnung von Cup-Produkten

Sei $H^* = H^*_{sing}(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$.

<u>Beobachtung.</u> Gilt $H^k(X) \cong \begin{cases}\mathbb{Z} & k=0,1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$, folgt $H^*(X)\cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[\alpha]$ mit $|\alpha|=1$, denn

$1_X\cup\alpha = \alpha\cup 1_X = \alpha$ und $\alpha\cup\alpha\in H^2(X)=0$.

<u>Bsp.</u> Nach U.K.S. (II.1.5) gilt

$$H^*(S^1)\cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_*(S^1),\mathbb{Z})\cong \begin{cases}\mathbb{Z} & k=0,1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases},$$

denn $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_n(S^1),\mathbb{Z})=0$ für alle $n\geq 1$, weil $H_n(S^1)$ stets projektiv ist. Also folgt

$$H^*(S^1)\cong\Lambda[\alpha] \text{ mit } |\alpha|=1.$$

<u>Satz II.5.1</u> Es gilt $H^*(T^n)\cong\Lambda[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$, $|\alpha_i|=1$.

<u>Bew.</u> Induktion über n. Anfang: ✓. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$H^*(T^n)\cong H^*(T^{n-1}\times S^1)\xleftarrow[\cong\,(\text{II.4.5})]{\times} H^*(T^{n-1})\otimes_{\mathbb{Z}} H^*(S^1)\cong$$
$$\cong\Lambda[\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}]\otimes_{\mathbb{Z}}\Lambda[\alpha_n]\cong\Lambda[\alpha_1,\dots,\alpha_n]. \quad\square$$

<u>Kor. II.5.2</u> Für $T^2=U_1\cup U_2$ ist U_1 oder U_2 nicht zus.z.bar.

<u>Bew.</u> Andernfalls wäre $\alpha_1\cup\alpha_2=0$ lt. Blatt 8, Aufg. 2. $\square$

Wie wir bereits wissen, folgt

$$b_k(\mathbb{T}^n) = \mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}} H_k(\mathbb{T}^n) \cong \mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}} H^k(\mathbb{T}^n) =$$
$$= \mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}} \Lambda^k[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \binom{n}{k}.$$

<u>Beispiel:</u> Konstruiere einen Raum X mit

$$H^*(X) \cong \Lambda[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]/(\alpha_1 \cdot \alpha_2), \quad |\alpha_i| = 1.$$

Insbesondere soll also gelten

$$H^0(X) \cong \mathbb{Z} \cdot 1_X, \quad H^1(X) \cong \mathbb{Z}[\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}],$$
$$H^2(X) \cong \mathbb{Z}[\{\alpha_1\alpha_3, \alpha_2\alpha_3\}], \quad H^3(X) \cong 0.$$

Betrachte $\mathbb{T}^3$ mit der Standard-Zellstruktur.
Für einen Teilkomplex $i: X \hookrightarrow \mathbb{T}^3$ ist

$$H^*(i): H^*(\mathbb{T}^3) \longrightarrow H^*(X) \text{ surjektiv},$$

denn $C_*^{cw}(X) \xrightarrow{i_*} C_*^{cw}(\mathbb{T}^3)$ ist split-injektiv, also ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*^{cw}(\mathbb{T}^3), \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*^{cw}(X), \mathbb{Z})$ split-surj.
und $C_*^{cw}(\mathbb{T}^3)$, also auch $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*^{cw}(\mathbb{T}^3), \mathbb{Z})$ hat triviale Differentiale.
Es gilt also $H^*(X) \cong H^*(\mathbb{T}^3)/\ker H^*(i)$.
Aus dem Beweis von Satz II.5.1 folgt, dass unter $H^*(\mathbb{T}^3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nutze u.K.S. und} \\ \text{5er-Lemma}}}{\cong} H^*_{cw}(\mathbb{T}^3)$ die Ringerzeuger α_i den „dualen 1-Zellen" e_i^* entsprechen und

das Cup-Produkt $\alpha_i \cdot \alpha_j$ dem Zellenprodukt $(e_i \times e_j)^*$.
Also hat der Teilkomplex $X \subseteq T^3$, der durch Entfernen der Zellen $e_1 \times e_2$ und $e_1 \times e_2 \times e_3$ entsteht, die gewünschte Eigenschaft.

<u>Warnung</u>: Solche Realisierungsprobleme sind i. A. schwer!

Seien X und Y wegzshgd. Betrachte $X \vee Y$ mit $p_X : X \vee Y \to X$ und $p_Y : X \vee Y \to Y$. Es gilt

$$H^q(X \vee Y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ H^q(X) \oplus H^q(Y) & q \geq 1. \end{cases}$$

<u>Prop. II.5.3</u> Seien $\alpha \in H^q(X)$ und $\beta \in H^l(Y)$, $q, l \geq 1$. Dann gilt $p_X^* \alpha \cup p_Y^* \beta = 0$.

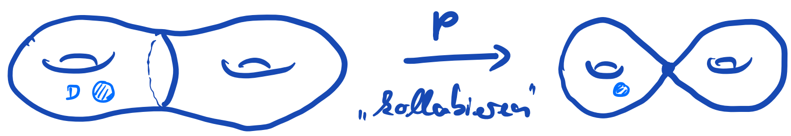
<u>Bew.</u> Seien $i_X : X \to X \vee Y$ und $i_Y : Y \to X \vee Y$ die Inklusionen. Dann gilt

$$i_X^* (p_X^* \alpha \cup p_Y^* \beta) = (p_X \circ i_X)^* \alpha \cup (p_Y \circ i_X)^* \beta = \\ = \alpha \cup 0 = 0, \quad \text{denn}$$

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[rr, "p_Y \circ i_X"'] & & X \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} & H^*(\cdot) \arrow[dl] & \\ H^*(X) & & H^*(X) \arrow[ul] \arrow[ll, "(p_Y \circ i_X)^*"'] \end{tikzcd}, \quad H^*(\cdot) = 0 \text{ für } * \geq 1.$$

Genauso $i_Y^*(p_X^* \alpha \cup p_Y^* \beta) = 0 \cup \beta = 0$. Weil $i_X^* \oplus i_Y^* : H^q(X \vee Y) \xrightarrow{\cong} H^q(X) \oplus H^q(Y)$, folgt die Beh. $\square$

Beispiel. die Räume $X = T^2$ und $Y = S^1 \vee S^1 \vee S^2$ haben isomorphe Homologie- und Kohomologiemoduln, aber verschiedene Kohomologieringe.

Beispiel. $\Sigma_2 =$ 

$= T^2 \vee T^2$

Offensichtlich sind $H_0(p)$ und $H_1(p)$ Isomorphismen.
$H_2(p): H_2(\Sigma_2) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong H_2(T^2 \vee T^2)$ ist die Diagonale $x \longmapsto x \oplus x$, denn seien $p_1, p_2 : T^2 \vee T^2 \to T^2$ die zwei Projektionen, dann gilt

$$\begin{array}{ccc}
H_2(\Sigma_2) & \xrightarrow{(p_1 \circ p)} & H_2(T^2) \\
\cong \downarrow \text{ L.E.S. } (*) & & \text{L.E.S. } \downarrow \cong \\
H_2(\Sigma_2, \Sigma_2 \setminus D) & \longrightarrow & H_2(T^2, T^2 \setminus D) \\
\cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
\tilde{H}_2(\Sigma_2 / \Sigma_2 \setminus D) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_2(T^2 / T^2 \setminus D)
\end{array} \qquad \text{(genauso)}$$

(*) $H_2(\Sigma_2) \xrightarrow{\cong} H_2(\Sigma_2, \Sigma_2 \setminus D) \xrightarrow{0} H_1(\Sigma_2 \setminus D) \xrightarrow{\cong} H_1(\Sigma_2) \to 0$,
denn $0 \longrightarrow \ker f \to \mathbb{Z}^n \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^n \longrightarrow 0$, $\ker f$ frei $\Rightarrow \ker f = 0$.

Mit U.K.S. folgt

$$\begin{array}{ccc}
H^2(T^2 \vee T^2) & \xrightarrow{p^*} & H^2(\Sigma_2) \\
\text{II}\!\text{S} & & \text{II}\!\text{S} \\
\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(T^2 \vee T^2), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{H_2(p)^*} & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(\Sigma_2), \mathbb{Z}) \\
\text{II}\!\text{S} & & \text{II}\!\text{S} \\
\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow[\text{„}+\text{"}]{} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Wir betrachten

$$\begin{tikzcd}
H^1(\Sigma_2) \otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\Sigma_2) \arrow[r, "\smile"] & H^2(\Sigma_2) \\
H^1(T^2 \vee T^2) \otimes_{\mathbb{Z}} H^1(T^2 \vee T^2) \arrow[u, "p^* \otimes p^*", "\cong"'] \arrow[r, "\smile"] & H^2(T^2 \vee T^2) \arrow[u, "p^*"', "\text{,,}+\text{``}"] \\
H^1(T^2) \otimes_{\mathbb{Z}} H^1(T^2) \arrow[u, hook, "pr_i^* \otimes pr_i^*"] \arrow[r, "\smile"] & H^2(T^2) . \arrow[u, hook, "pr_i^*"']
\end{tikzcd}$$

Setzen wir (u.k.s.)

$$H^0(\Sigma_2) \cong \mathbb{Z} \cdot 1_{\Sigma_2}$$
$$H^1(\Sigma_2) \cong \mathbb{Z} \cdot \alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \mathbb{Z}\beta_1 \oplus \mathbb{Z}\beta_2$$
$$H^2(\Sigma_2) \cong \mathbb{Z}\gamma ,$$

folgt also

$$\alpha_1 \cup \alpha_2 = \gamma , \quad \beta_1 \cup \beta_2 = \gamma , \quad \alpha_i \cup \beta_j = 0 , \quad \alpha_i^2 = \beta_i^2 = 0 .$$

<u>Bemerkung.</u> Die Verallgemeinerung zu Σ_g ist klar.

<u>Satz II.5.4</u> $H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[\alpha] / (\alpha^{n+1})$, $|\alpha| = 1$.

<u>Bew.</u> Setze $H^*(\cdot) = H^*(\cdot\,; \mathbb{Z}/2)$, $P^n = \mathbb{RP}^n$, $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}/2}$

laut T1. IV.3.3.3 gilt $C_*^{cw}(P^n; \mathbb{Z}/2) =$

$$\cdots \to 0 \to \underset{n}{\mathbb{Z}/2} \xrightarrow{0} \underset{n-1}{\mathbb{Z}/2} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} \underset{0}{\mathbb{Z}/2} \to 0 , \text{ daher}$$

$$C^*_{cw}(P^n; \mathbb{Z}/2) = \cdots \leftarrow 0 \leftarrow \underset{n}{\mathbb{Z}/2} \xleftarrow{0} \underset{n-1}{\mathbb{Z}/2} \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{0} \underset{0}{\mathbb{Z}/2} \leftarrow 0 ,$$

d.h. $H^k(P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & 0 \le k \le n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Außerdem gilt für das k-Gerüst $(P^n)^k = P^k$ und deshalb ist $H^k(P^{n-1} \hookrightarrow P^n)$ für $k \le n-1$ ein Iso.

Bleibt z.z.: Für $\langle \alpha_k \rangle \cong H^k(P^n)$ gilt $\alpha_1 \cup \alpha_{n-1} = \alpha_n$.

Setze $l = n-k$. Zeigen allgemeiner $\alpha_k \cup \alpha_l = \alpha_n$.

Haben Einbettungen $P^k \subseteq P^n$, $[x_0 : \dots : x_k] \mapsto [x_0 : \dots : x_k : 0 : \dots : 0]$, $P^l \subseteq P^n$, $[x_0 : \dots : x_l] \mapsto [0 : \dots : 0 : x_0 : \dots : x_l]$, d.h. $P^k \cap P^l = \{[\underset{0}{0} : \dots : \underset{k-1}{0} : \underset{k}{1} : \underset{k+1}{0} : \dots : \underset{n}{0}]\}$. Betrachte die affine Karte

$$\varphi : U = \{[x_0 : \dots : x_n] : x_k \neq 0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$$
$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_k}, \dots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, \frac{x_{k+1}}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k}\right)$$

Sei $p := [0 : \dots : 0 : 1 : 0 \dots 0] = \varphi^{-1}(0)$. Erhalte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^k(P^n) \otimes H^l(P^n) \arrow[r, "\cup"] & H^n(P^n) \\
H^k(P^n, P^n \setminus P^l) \otimes H^l(P^n, P^n \setminus P^k) \arrow[r, "\cup"] \arrow[u] \arrow[d, "(\varphi^{-1})^*"] & H^n(P^n, P^n \setminus \{p\}) \arrow[u] \arrow[d, "(\varphi^{-1})^*"] \\
H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^l) \otimes H^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k) \arrow[r, "\cup"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft \text{II.4.3 (rel.)}"] & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\
H^k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \otimes H^l(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^l \setminus \{0\}) \arrow[u, "\cong\ (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k)^* \otimes (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l)^*"] \arrow[ur, "\times"'] &
\end{tikzcd}$$

Außerdem gilt

$$
\begin{tikzcd}
H^k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \otimes H^\ell(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\cong"] & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \arrow[d, "\cong"] \\
H^k(I^k, \partial I^k) \otimes H^\ell(I^\ell, \partial I^\ell) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\cong"] & H^n(I^n, \partial I^n) \arrow[d, "\cong"] \\
H^k(\mathbb{T}^k, \mathbb{T}^k \setminus D^k) \otimes H^\ell(\mathbb{T}^\ell, \mathbb{T}^\ell \setminus D^\ell) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\text{L.E.S.}", "\cong"'] & H^n(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n \setminus D^n) \arrow[d, "\text{L.E.S.}", "\cong"'] \\
H^k(\mathbb{T}^k) \otimes H^\ell(\mathbb{T}^\ell) \arrow[r, "\times", "\cong\ (\mathrm{II}.4.5)"'] & H^n(\mathbb{T}^n)
\end{tikzcd}
$$

Um noch zu zeigen, dass die markierten Pfeile Iso.s sind, betrachte

$$
\begin{tikzcd}
H^k(P^n) \arrow[d, "\cong"'] & H^k(P^n, P^{k-1}) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"] & H^k(P^n, P^n \setminus P^\ell) \arrow[l, "(*)"'] \arrow[r] \arrow[d] & H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^\ell) \arrow[d, "\cong"] \\
H^k(P^k) & H^k(P^k, P^{k-1}) \arrow[l, "\cong"] & H^k(P^k, P^k \setminus \{p\}) \arrow[l, "\cong", "\text{Def.retr.}"'] \arrow[r, "\cong", "\text{Aussch.}"'] & H^k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\})
\end{tikzcd}
$$

Der Pfeil $(*)$ (und damit alle Pfeile) ist ein Iso, weil $P^n \setminus P^\ell$ ein Def.retr. von P^{k-1} ist:

$[x_0 : \dots : x_{k-1} : (1-t)\cdot x_k : \dots : (1-t)\cdot x_n]$. □

Satz II 5.5

- $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$, $|\alpha| = 2$.
- $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2\,[\alpha]$, $|\alpha| = 1$.
- $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]$, $|\alpha| = 2$.

Bew. $H^*(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z})$ ähnlich wie oben.

$$H^*(\mathbb{RP}^\infty,\mathbb{Z}/2)=\bigoplus_{k\geq 0} H^k(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}/2)\cong \mathbb{Z}/2[\alpha]$$

als graduierte $\mathbb{Z}/2$-Vektorräume klar. Für $\alpha,\beta\in H^*(\mathbb{RP}^\infty,\mathbb{Z}/2)$ gilt $\alpha,\beta,\alpha\cup\beta\in\bigoplus_{k=0}^N H^k(\mathbb{RP}^\infty,\mathbb{Z}/2)\cong\bigoplus_{k=0}^N H^k(\mathbb{RP}^N;\mathbb{Z}/2)$ mit $N\gg 0$. $H^*(\mathbb{CP}^\infty,\mathbb{Z})$ genauso. $\square$

Wir berechnen noch $H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z})$ und wenden den kovar. Funktor $H^*(\mathbb{RP}^\infty;\cdot):\underline{\text{Ringe}}\longrightarrow\underline{\mathbb{Z}\text{-Alg.}}$ auf $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/2$ an. Auf Kokettenkomplexebene:

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \mathbb{Z} \arrow[l, "\cdot 2"'] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[l, "0"'] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[l, "\cdot 2"'] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[l, "0"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
\cdots & \mathbb{Z}/2 \arrow[l, "0"'] & \mathbb{Z}/2 \arrow[l, "0"'] & \mathbb{Z}/2 \arrow[l, "0"'] & \mathbb{Z}/2 \arrow[l, "0"'] & 0 \arrow[l, "0"']
\end{tikzcd}.$$

Es folgt $H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z})\longrightarrow H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}/2)$ ist injektiv mit Bild $\bigoplus_{k\geq 0} H^{2k}(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}/2)$, d.h.

$$H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[\alpha]/(2\alpha)\quad\text{mit } |\alpha|=2.$$

Weil $H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z})\xrightarrow{\cong}H^*(\mathbb{RP}^{2n};\mathbb{Z})$ für $*\leq 2n$, folgt

$$H^*(\mathbb{RP}^{2n};\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[\alpha]/(2\alpha,\alpha^{n+1}),\quad |\alpha|=2.$$

Für $\mathbb{RP}^{2n+1}$ endet der zelluläre Kokettenkomplex in

$$\begin{tikzcd}
0 & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[l, "0"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, "\cdot 2"'] & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
0 & \underset{2n+1}{\mathbb{Z}/2} \arrow[l, "0"'] & \mathbb{Z}/2 \arrow[l, "0"'] & \cdots \arrow[l] & \mathbb{Z}/2 \arrow[l, "0"'] & 0 \arrow[l, "0"']
\end{tikzcd}.$$

Daher

$$H^*(\mathbb{RP}^{2n+1};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha,\beta]/(2\alpha,\alpha^{n+1},\alpha\beta,\beta^2), \quad |\alpha|=2,\ |\beta|=2n+1.$$

<u>Beobachtung</u>. $H^*(\mathbb{RP}^{2n+1};\mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{RP}^{2n}\vee S^{2n+1};\mathbb{Z})$ als $\mathbb{Z}$-Algebren, aber $\mathbb{RP}^{2n+1} \not\simeq \mathbb{RP}^{2n}\vee S^{n+1}$, z.B. weil $H^*(\mathbb{RP}^{2n+1};\mathbb{Z}/2) \not\cong H^*(\mathbb{RP}^{2n}\vee S^{2n+1};\mathbb{Z}/2)$, denn für $\langle\alpha\rangle \cong H^1(\dots;\mathbb{R})$ gilt $\alpha^{2n+1}\neq 0$ links und $=0$ rechts.

II.6 Anwendungen des Cup-Produkts

<u>Erinnerung</u>. Die Hopfabbildung ist

$$\begin{array}{cccc} \eta: & S^3 & \longrightarrow & S^2 \\ & \cap & & \parallel \\ & \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\cup\infty \\ & (z_1,z_2) & \longmapsto & \frac{z_1}{z_2} \end{array} \quad \text{(stereograf. Proj.)}$$

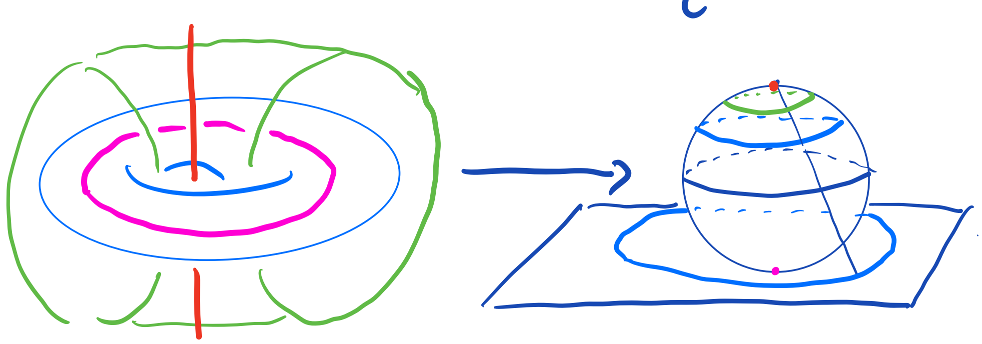
Nutze Polarkoordinaten zur Visualisierung:

$$\eta(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2}) = \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

d.h. $\eta^{-1}(r\cdot S^1) = \left\{(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2}) : r_1^2+r_2^2=1,\ \frac{r_1}{r_2}=r\right\}$,

also sind r_1, r_2 festgelegt und φ_1,φ_2 beliebig

$\rightsquigarrow$ Urbilder von Kreisen unter η sind Tori.



Beachte: Die Fasern von η sind Kreise ($\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2$ ist festgelegt. Weil $\eta^{-1}(\text{Nordpol})$ und $\eta^{-1}(\text{Südpol})$ verschlungen sind, gilt dies auch für je zwei andere Fasern! (Beweis: Verschiebe die Basispunkte stetig zu Nord- und Südpol.)

<u>Satz II.6.1</u> Die Hopfabbildung ist nicht nullhomotop.

<u>Lemma II.6.2</u> Ist $f: X \to Y$ nullhomotop, so ist $j: Y \to C_f$ ein Retrakt.

$$\left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "j"] \\ CX \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & C_f \arrow[u, bend right, dotted, "r"'] \end{tikzcd}\right).$$

<u>Bew.</u> Sei $h: X \times I \to Y$ mit $h_0 = f$ und $h_1 = y_0$ konstant. Definiere $r: C_f \to Y$, $z \mapsto \begin{cases} z, & z \in j(Y) \\ h(x,t), & z = \bar{f}(x,t) \in \bar{f}(CX) \end{cases}$

stetig und $r \circ j = \mathrm{id}_Y$. $\square$

<u>Bew.</u> (von Satz II.6.1) Es gilt

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & \mathbb{C}P^1 \cong S^2 \arrow[d, "j"] \\ C(S^3) \cong D^4 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & \mathbb{C}P^2 \cong C_\eta \end{tikzcd}.$$

Bleibt z.z. $\mathbb{C}P^1 \xrightarrow{j} \mathbb{C}P^2$ ist kein Retrakt.

Angenommen, es gäbe eine Retraktion $r: \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^1$, sodass $r \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{C}P^1}$. Dann ist $r^*: \underset{\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2)}{\underset{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}}}{H^*(\mathbb{C}P^1;\mathbb{Z})}} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}[\beta]/(\beta^3)}{\underset{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}}}{H^*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})}}$

mit $|\alpha|=|\beta|=2$ injektiv und daher $r^*(\alpha) = k\cdot\beta$ mit $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, denn r^* ist gradeerhaltend. Somit folgt

$$0 = r^*(0) = r^*(\alpha^2) = (r^*(\alpha))^2 = k^2\cdot\beta^2 \neq 0, \text{ Widerspruch. } \square$$

Auf ähnliche Weise entstehen Hopfabbildungen $\nu : S^7 \longrightarrow S^4$ und $\sigma : S^{15} \longrightarrow S^8$ aus Quaternionen- und Oktavenalgebren:

Broome-Bridge, Dublin

Die Quaternionenalgebra ist

$$\mathbb{H} = \langle 1, i, j, k \rangle_{\mathbb{R}} \text{ mit } \boxed{i^2=j^2=k^2=ijk=-1.}$$

(Es folgt $ij = -ijk^2 = k$, $jk = -i^2jk = i$,
$ki = k(k(-j)) = j$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$.)
mit quaternionischer Konjugation

$$a + bi + cj + dk \longmapsto a - bi - cj - dk.$$

Die Oktavenalgebra (auch Cayleyzahlen) ist
$\mathbb{O} = \mathbb{H}\times\mathbb{H}$ mit Multiplikation (nicht assoziativ!)

$$\mathbb{O}\times\mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$$

$$(v_1, v_2)\cdot(w_1, w_2) = (v_1\cdot w_1 - \overline{w_2}\cdot v_2,\ v_2\cdot\overline{w_1} + w_2\cdot v_1).$$

In folgendem Sinne sind $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ Divisionsalgebren.

Def. II.6.3 Eine (endl. dim. reelle) Divisionsalgebra ist ein Paar $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, wobei für $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt

1.) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$, $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$, $a,b,c \in \mathbb{R}^n$
2.) $r\cdot(a\cdot b) = (r\cdot a)\cdot b = a\cdot(r\cdot b)$, $a,b\in\mathbb{R}^n$, $r\in\mathbb{R}$
3.) es gibt $e\in\mathbb{R}^n$ mit $a\cdot e = e\cdot a = a$, $a\in\mathbb{R}^n$
4.) $x\mapsto a\cdot x$, $x\mapsto x\cdot a$ definieren Bijektionen $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ für alle $a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

(1.)+2.) bedeuten, dass „$\cdot$" $\mathbb{R}$-bilinear ist.)

Def. II.6.4 Die quaternionischen und oktavischen Hopfabbildungen sind

$$\begin{array}{ccccccc} \nu: S^7 & \longrightarrow & S^4 & \quad\text{und}\quad & \sigma: S^{15} & \longrightarrow & S^8 \\ \cap & & \| & & \cap & & \| \\ \mathbb{H}\times\mathbb{H} & & \mathbb{H}\cup\infty & & \mathbb{O}\times\mathbb{O} & & \mathbb{O}\cup\infty \end{array}$$

definiert durch $(z_1, z_2)\longmapsto z_1\cdot z_2^{-1}$.

(Beachte: $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ sind normiert mit $\|x\|^2 = x\cdot\bar{x} = \bar{x}\cdot x$ also folgt für $x^{-1} := \frac{\bar{x}}{\|x\|^2}$, dass $x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = 1$.
Alternativ: Für alle $a,b\in\mathbb{O}$ ist $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{O}$ assoziativ und $a^{-1}\cdot a = 1$ impliziert $a\cdot a^{-1} = a\,a^{-1} a\,a^{-1}$, somit mit 1.) $a\cdot a^{-1}\cdot(1 - a\cdot a^{-1}) = 0$, also folgt aus 4.), dass $a\cdot a^{-1} = 1$.)

Ähnlich wie zuvor folgt, dass ν und σ nicht $\simeq 1$ sind:

$$\begin{tikzcd} S^7 \arrow[r, "\nu"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathbb{H}P^1 \cong S^4 \arrow[d] \\ D^8 \arrow[r] & \mathbb{H}P^2 \cong C_\nu \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^{15} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathbb{O}P^1 \cong S^8 \arrow[d] \\ D^{16} \arrow[r] & \mathbb{O}P^2 \cong C_\sigma \end{tikzcd},$$

$$H^*(\mathbb{H}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^3), \quad |\alpha| = 4,$$

$$H^*(\mathbb{O}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^3), \quad |\alpha| = 8.$$

<u>Kor. II.6.5</u> Die Homotopiegruppen $\pi_3(S^2, \cdot)$, $\pi_7(S^4, \cdot)$ und $\pi_{15}(S^8, \cdot)$ sind nicht trivial.

<u>Bemerkung.</u> $\langle \Sigma\eta \rangle = \pi^1 = \operatorname{colim}_{k\to\infty} \pi_{k+1}(S^k) \cong \mathbb{Z}/2$
$\langle \Sigma\nu \rangle = \pi^3 = \operatorname{colim}_{k\to\infty} \pi_{k+3}(S^k) \cong \mathbb{Z}/24$
$\langle \Sigma\sigma \rangle = \pi^7 = \operatorname{colim}_{k\to\infty} \pi_{k+7}(S^k) \cong \mathbb{Z}/240$ (Schwer).

<u>Warnung.</u> Man kann $\mathbb{O}P^n$ nicht für $n > 2$ definieren, denn zum Nachweis, dass $(z_1, \dots, z_n) \sim \lambda(z_1, \dots, z_n)$ für $\lambda \in \mathbb{O}^*$ eine Äquivalenzrelation definiert, benötigt man Assoziativität.

<u>Satz II.6.6.</u> (Hopf) Ist $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ eine Divisionsalgebra, so ist n eine Potenz von 2.

Bew. Definiere $g: S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, $(x,y) \mapsto \frac{x \cdot y}{\|x \cdot y\|}$.
Es gilt $g(-x,y) = g(x,-y) = -g(x,y)$, also erhalten wir $\bar{g}: \mathbb{RP}^{n-1} \times \mathbb{RP}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ und damit

$$\bar{g}^*: \underset{\mathbb{Z}/2[\gamma]/(\gamma^n)}{\underset{\cong}{H^*(\mathbb{RP}^{n-1}; \mathbb{Z}/2)}} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}/2[\alpha,\beta]/(\alpha^n,\beta^n)}{\underset{\cong}{H^*(\mathbb{RP}^{n-1} \times \mathbb{RP}^{n-1}; \mathbb{Z}/2)}}$$

mit $\alpha, \beta \in H^*(\mathbb{RP}^{n-1} \times \mathbb{RP}^{n-1}; \mathbb{Z}/2)$ gegeben durch $\alpha = pr_1^*(\gamma)$, $\beta = pr_2^*(\gamma)$ für $pr_i: \mathbb{RP}^{n-1} \times \mathbb{RP}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$.
Setze $\bar{g}^*(\gamma) = k \cdot \alpha + l \cdot \beta$. Sei $j_i: \mathbb{RP}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1} \times \mathbb{RP}^{n-1}$, $x \mapsto (x,e), (e,x)$
$(e \in (\mathbb{R}^n, \cdot))$
Dann gilt $\bar{g} \circ j_i = id_{\mathbb{RP}^{n-1}}$, also

$$\gamma = j_i^* \circ \bar{g}^*(\gamma) = k \cdot j_i^*(\alpha) + l \cdot j_i^*(\beta) = k \cdot j_i^*(pr_1^*(\gamma)) + l \cdot j_i^*(pr_2^*(\gamma)) = \begin{cases} k \cdot \gamma & i=1 \\ l \cdot \gamma & i=2 \end{cases},$$

d.h. $k = l = 1$, somit $\bar{g}^*(\gamma) = \alpha + \beta$. Es folgt

$$0 = \bar{g}^*(0) = \bar{g}^*(\gamma^n) = (\bar{g}^*(\gamma))^n = (\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$$

Es muss also gelten $\binom{n}{k} \equiv 0 \ (2)$ für $k = 1, \dots, n-1$ oder äquivalent $(1+x)^n = 1 + x^n$ in $\mathbb{Z}/2[x]$.
Schreibe $n = n_1 + \dots + n_r$ mit jedem n_i eine Potenz von 2 und $n_1 < \dots < n_r$. Dann gilt $(1+x)^n = (1+x)^{n_1} \cdots (1+x)^{n_r} = (1+x^{n_1}) \cdots (1+x^{n_r})$. Betrachtet man die n_i in Binär-

darstellung, erkennt man, dass $(1+x^{n_1})\cdots(1+x^{n_r})$ tatsächlich aus 2^r Summanden besteht. Also folgt aus $(1+x)^n = 1+x^n$, dass $r=1$. $\square$

III Poincaré-Dualität

(R kommutativ, $H_* = H_*^{sing}$, $H^* = H^*_{sing}$)

Einfachster Fall: Für eine geschlossene n-dim. Mfk. M gilt $H^{d-k}(M; \mathbb{Z}/2) \cong H_k(M; \mathbb{Z}/2)$.

(z. B. $M = T^n$: $\dim_{\mathbb{Z}/2} H^{d-k}(M; \mathbb{Z}/2) = \dim_{\mathbb{Z}/2} H_k(M; \mathbb{Z}/2)$ $\Leftrightarrow$ $\binom{d}{d-k} = \binom{d}{k}$.) „Lokale Eigenschaft $\Rightarrow$ globale Konsequenz"

III.1 Das Cap-Produkt

Sei X ein top. Raum und R ein kommutativer Ring. Wir definieren

$$\frown : C^{sing}_{k+\ell}(X; R) \otimes_R C^{\ell}_{sing}(X; R) \longrightarrow C^{sing}_{k}(X; R)$$
$$\sigma \otimes \varphi \longmapsto \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_\ell]}) \cdot \sigma|_{[v_\ell, \dots, v_{k+\ell}]}$$

__Lemma III.1.1.__ Es gilt $\partial\sigma \frown \varphi = \sigma \frown \delta\varphi + (-1)^\ell \partial(\sigma \frown \varphi)$.

__Bew.__ $\partial \sigma \frown \varphi = \sum_{r=0}^{k+\ell} (-1)^r \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_r, \dots, v_{k+\ell}]} \frown \varphi =$

$$= \sum_{r=0}^{\ell+1} (-1)^r \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_r, \dots, v_{\ell+1}]}) \cdot \sigma|_{[v_{\ell+1}, \dots, v_{k+\ell}]}$$

$- (-1)^{\ell+1} \cdot \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_\ell]}) \cdot \sigma|_{[v_{\ell+1}, \dots, v_{k+\ell}]}$

$$+ \sum_{r=\ell+1}^{\ell+k} (-1)^r \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_\ell]}) \cdot \sigma|_{[v_\ell, \dots, \hat{v}_r, \dots, v_{k+\ell}]}$$

$$= \sigma \frown \delta\varphi + \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_\ell]}) \sum_{r=\ell}^{\ell+k} (-1)^r \sigma|_{[v_\ell, \dots, \hat{v}_r, \dots, v_{k+\ell}]}$$

$$= \sigma \frown \delta\varphi + (-1)^\ell \partial(\sigma \frown \varphi). \qquad \square$$

Es folgt Zykel $\frown$ Kozykel = Zykel,

Rand $\frown$ Kozykel = Rand,

Zykel $\frown$ Korand = Rand.

Def. III.1.2 Der induzierte Homomorphismus

$$\frown : H_{k+l}(X;R) \otimes_R H^l(X;R) \longrightarrow H_k(X;R)$$

heißt das Cap-Produkt. Es hat die relativen Versionen

$$\frown : H_{k+l}(X,A;R) \otimes_R H^l(X;R) \longrightarrow H_k(X,A;R),$$

$$\frown : H_{k+l}(X,A;R) \otimes_R H^l(X,A;R) \to H_k(X;R),$$

$$\frown : H_{k+l}(X, A\cup B;R) \otimes_R H^l(X,A;R) \longrightarrow H_k(X,B;R),$$

letzteres für $(A\cup B; A, B)$ schnittig. Distributiv erhalten wir

$$H_*(X,A;R) \otimes H^*(X;R) \to H_*(X,A;R)$$

mit $H_* = \bigoplus_{p\geq 0} H_p$, $H^* = \bigoplus_{p\geq 0} H^p$.

Prop. III.1.3 Durch das Cap-Produkt wird $H_*(X,A;R)$ zu einem $H^*(X;R)$-Rechtsmodul.

Funktorialität: Zu gegebenem $f:(X,A)\to(Y,B)$ ist $H_*(X,A)\longrightarrow H_*(Y,B)$ ein $H^*(Y)$-Homomorphismus, wobei wir für $\alpha\in H^*(Y)$ und $x\in H_*(X,A)$ definieren $x\cdot\alpha := x\frown f^*\alpha$.

Für $x\in H_*(X,A)$ und $\alpha\in H^*(Y)$ gilt demnach

$$f_*(x\frown f^*\alpha) = f_*x\frown\alpha.$$

Bew. Distributivität und $x\frown 1_X = x$ sind klar.

z.z.: Für $\sigma \in C^{sing}_{k+l}(X, A)$, $\alpha \in C^p_{sing}(X)$, $\beta \in C^q_{sing}(X)$, $p+q=l$ gilt $(\sigma \cap \alpha) \cap \beta = \sigma \cap (\alpha \cup \beta)$.

$$\sigma \cap \alpha = \alpha(\sigma_{|[v_0,\dots,v_p]}) \cdot \sigma_{|[v_p,\dots,k+l]}$$
$$(\sigma \cap \alpha) \cap \beta = \alpha(\sigma_{|[v_0,\dots,v_p]}) \cdot \beta(\sigma_{|[v_p,\dots,v_l]}) \cdot \sigma_{|[v_l,\dots,v_{k+l}]}$$
$$\sigma \cap (\alpha \cup \beta) = (\alpha \cup \beta)(\sigma_{|[v_0,\dots,v_l]}) \cdot \sigma_{|[v_l,\dots,v_{k+l}]}.$$

Zeigen Funktorialität auf Kettenebene:
Für $\sigma \in C^{sing}_{k+l}(X, A)$, $\alpha \in C^l_{sing}(Y)$ gilt

$$\begin{aligned} f_\#(\sigma \cap f^\#\alpha) &= f_\#(\alpha(f_\#(\sigma_{|[v_0,\dots,v_l]})) \cdot \sigma_{|[v_l,\dots,v_{k+l}]}) \\ &= \alpha(f_\# \sigma_{|[v_0,\dots,v_l]}) \cdot f_\# \sigma_{|[v_l,\dots,v_{k+l}]} \\ &= f_\# \sigma \cap \alpha. \end{aligned}$$

$\square$

Laut Tensor-Hom-Adjunktion liefert der nat. Hom.
$$H^k(X, A; R) \to \mathrm{Hom}_R(H_k(X, A; R), R)$$
den Homomorphismus
$$H^k(X, A; R) \otimes_R H_k(X, A; R) \to R.$$

<u>Def. III.1.4</u>. Die zugehörige Bilinearform
$$\langle \cdot, \cdot \rangle \; H^k(X, A; R) \times H_k(X, A; R) \to R$$
heißt das Kronecker-Produkt.

<u>Prop. III.1.5</u> Für $\alpha \in H^k(X, A)$, $\beta \in H^l(X, A)$, $x \in H_{k+l}(X, A)$ gilt $\langle \alpha \cup \beta, x \rangle = \langle \beta, x \cap \alpha \rangle$.

Bew. Auf Kettenebene nachrechnen (Hausaufgabe!) $\square$

III.2 Orientierungen

Sei M eine d-dim. Mannigfaltigkeit.

Lemma III.2.1 Für $x \in M$ gilt

$$H_k(M, M \setminus \{x\}; R) \cong \begin{cases} R & k=d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Bew. Wähle eine Umgebung $U \subseteq M$ von x mit $U \cong \mathbb{R}^d$.

Dann gilt $H_k(M, M \setminus \{x\}; R) \overset{\text{Ausschn.}}{\cong} H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong$
$\cong H_k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \cong H_k(D^d; S^{d-1})$. $\to$ T1.III.1.10 $\square$

Def. III.2.2 Eine R-Orientierung von M ist eine Familie von Erzeugern $\mu_x \in H_d(M, M \setminus \{x\}; R)$, $x \in M$, sodass $(\mu_x)_{x \in M}$ folgender Kompatibilitätsbed. genügt:
Zu jedem $x \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq M$ von x und $\mu_U \in H_d(M, M \setminus U; R)$, sodass für alle $y \in U$ gilt $i_* \mu_U = \mu_y$ mit $i: (M, M \setminus U) \to (M, M \setminus \{y\})$.
Die μ_x heißen lokale R-Orientierungen, M heißt R-orientierbar, falls M eine R-Orientierung besitzt und M heißt R-orientiert, falls eine R-Orientierung gewählt ist. Unterdrücken wir R in der Notation, ist $R = \mathbb{Z}$ gemeint.

Prop. III.2.3 Jede Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{Z}/2$-orientierbar.

Bew. Folgt aus $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2) = 1$. $\square$

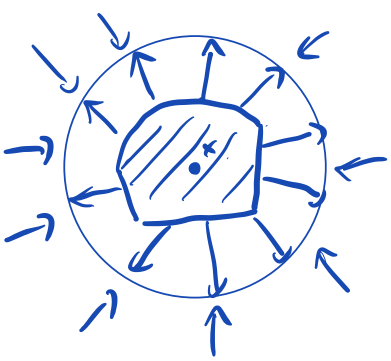
Prop. III.2.4 Sei $K \subseteq M$ kompakt. Dann gilt

(i) $H_i(M, M \setminus K; R) = 0$ für $i > d$.

(ii) Ist $u \in H_d(M, M \setminus K; R)$ trivial in $H_d(M, M \setminus \{x\}; R)$ für alle $x \in K$, so ist $u = 0$.

(iii) Ist $(\mu_x)_{x \in M}$ eine R-Orientierung von M, so gibt es ein eindeutiges Element $\mu_K \in H_d(M, M \setminus K; R)$, das sich für alle $x \in K$ zu μ_x einschränkt.

Bew. Schritt 1. $M = \mathbb{R}^d$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ konvex.



Wähle Sphäre $S \subset M \setminus K$, $x \in K$. Weil K konvex, sind $S \subset M \setminus K$ und $S \subset M \setminus \{x\}$ Deformationsretrakte. Mit 5er-Lemma folgt

$H_i(M, M \setminus K) \cong H_i(M, M \setminus \{x\})$. (i), (ii), (iii) folgen somit aus Lemma III.2.1.

Schritt 2. Gilt die Prop. für K_1, K_2 und $K_1 \cap K_2$, so auch für $K_1 \cup K_2$:

Mit T1.II.4.1 und 5er-Lemma erhält man eine S.E.S. von Kettenkomplexen

$$0 \to C_*^{sing}(M \mid K_1 \cup K_2) \to C_*^{sing}(M \mid K_1) \oplus C_*^{sing}(M \mid K_2) \to C_*^{sing}(M \mid K_1 \cap K_2) \to 0,$$

die die folgende lange exakte Mayer-Vietoris-F. induziert:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & u_1 \oplus u_2 & \mapsto & u_1 - u_2 \\ H_{k+1}(M \mid K_1 \cap K_2) & \to & H_k(M \mid K_1 \cup K_2) & \to & H_k(M \mid K_1) \oplus H_k(M \mid K_2) & \to & H_k(M \mid K_1 \cap K_2) \\ \overset{\|}{0} \text{ für } k > d(-1) & & \overset{\|}{0} \text{ für } k > d & & \overset{\|}{0} & & \Rightarrow (i). \end{array}$$

Für $k = d$ ergibt sich, dass der Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} H_d(M \mid K_1 \cup K_2) & \to & H_d(M \mid K_1) \oplus H_d(M \mid K_2) \\ u & \mapsto & (u_1, u_2) \end{array}$$

injektiv ist. Ist u trivial in $H_d(M \mid \{x\})$ für alle $x \in K_1 \cup K_2$, so ist u_i trivial in $H_d(M \mid \{x\})$ für alle $x \in K_i$ $(i = 1, 2)$. Nach Voraussetzung folgt $u_i = 0$ und mit der Injektivität somit $u = 0$. $\Rightarrow$ (ii)

Wegen der Eindeutigkeit ist $\mu_{K_1 \cap K_2}$ das Bild von μ_{K_i} unter $H_d(M \mid K_i) \to H_d(M \mid K_1 \cap K_2)$. Also liegt $\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2}$ in der M.V.F im Kern, hat also ein Urbild $\mu_{K_1 \cup K_2} \in H_d(M \mid K_1 \cup K_2)$ und dieses ist eindeutig, weil $H_{d+1}(M \mid K_1 \cap K_2) = 0$. $\Rightarrow$ (iii)

<u>Schritt 3.</u> Die Prop. gilt für $M = \mathbb{R}^d$ und $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ mit K_i konvex.

Induktion nach n: $n = 1$ laut Schritt 1.

Schreibe $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i = K_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i$.

Es gilt $K_n \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i = \bigcup_{i=1}^{n-1} \underbrace{K_n \cap K_i}_{\text{konvex}}$. Also folgt die Aussage aus der Induktionsvoraussetzung und Schritt 2.

<u>Schritt 4.</u> Die Prop. gilt für $M = \mathbb{R}^d$ und $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt.

Für $[z] \in H_q(\mathbb{R}^d | K)$ sei $K_0 \subseteq \mathbb{R}^d \setminus K$ die Vereinigung der Simplexe des Randes ∂z. Weil K_0, K_1 kompakt, also abg. sind und $\mathbb{R}^d$ normal ist, gibt es $\delta > 0$ mit $d(K_0, K_1) > \delta$. Weil K kompakt, gibt es $W = \bigcup_{i=1}^{n} B_\delta(x_i) \supseteq K$ mit $x_i \in K$, also gilt $W \cap K_0 = \emptyset$ und daher

$$[z] \in \operatorname{Bild}\left(H_i(\mathbb{R}^d | W) \to H_i(\mathbb{R}^d | K) \right).$$

Laut Schritt 3 gilt aber $H_i(\mathbb{R}^d | W) = 0$ für $i > d$ $\Rightarrow$ (i).

Für (ii) bleibt wegen Schritt 3 noch zu zeigen: Verschwindet $[z]$ in $H_d(\mathbb{R}^d | \{x\})$ für alle $x \in K$, so verschwindet $[z]$ auch in $H_d(\mathbb{R}^d | \{x\})$ für alle $x \in W$.

Sei also $y \in B_\delta(x_i) =: B$. Dann haben wir

$$\begin{array}{ccccc} H_d(\mathbb{R}^d | W) & \longrightarrow & H_d(\mathbb{R}^d | B) & \xrightarrow{\cong} & H_d(\mathbb{R}^d | \{x_i\}) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha_B & \longmapsto & \alpha_{x_i} \end{array}$$

und aus $\alpha_{x_i} = 0$ folgt $\alpha_B = 0$ und damit auch $\alpha_y = 0$.

Für (iii) wähle $R \gg 0$, sodass $B := B_R(0) \supseteq K$.
Dann ist für jedes $x \in B$ die Abb. $H_d(\mathbb{R}^d | B) \xrightarrow{\cong} H_d(\mathbb{R}^d | \{x\})$ ein Iso. Für jeden Erzeuger $\alpha \in H_d(\mathbb{R}^d | B)$ sei

$$P_\alpha := \{ x \in B : \alpha \text{ bildet ab auf } \mu_x \}.$$

Es gilt also $\bigcup_{\alpha \text{ Erz.}} P_\alpha = B$ disjunkt. Aber wegen der lokalen Kompatibilität von $(\mu_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ ist jedes $P_\alpha \subseteq B$ offen, denn für $x \in P_\alpha$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\mu_U \in H^d(\mathbb{R}^d | U)$ mit $\mu_U \mapsto \mu_y$ für alle $y \in U$. Weil $\alpha \mapsto \mu_x$, folgt $\alpha \mapsto \mu_U \mapsto \mu_y$ für alle $y \in U$, also $U \subseteq P_\alpha$. Weil B zshgd ist, gibt es also einen einzigen Erzeuger $\alpha \in H_d(\mathbb{R}^d | B)$ mit $\alpha \mapsto \mu_x$ für alle $x \in B \supseteq K$.

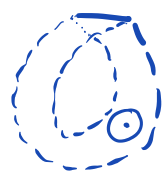
<u>Schritt 5.</u> Die Prop. gilt, wenn $K \subseteq U \subseteq M$ mit $U \cong \mathbb{R}^d$.
Nach Ausschneidung gilt $H_k(M|K) \cong H_k(U|K)$ $\rightsquigarrow$ Schritt 4.

<u>Schritt 6.</u> Der allgemeine Fall.
Wähle für jedes $x \in K$ eine Umgebung $U_x \subseteq M$ mit $\varphi_x : U_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^d$. Weil K kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_k \in K$ mit $\bigcup_{i=1}^n \varphi_{x_i}^{-1}(\mathring{D}^d) \supseteq K$. Wegen Schritt 5 gilt die Prop. für $\varphi_{x_i}^{-1}(D^d) \cap K$ und alle Schnitte dieser Mengen. Wegen Schritt 2 folgt die Prop. für K. $\square$

__Bemerkung.__ Zu jedem $x \in M$ haben wir $\begin{array}{ccccccc} x & \in & B & \subseteq & U & \subseteq & M \\ \updownarrow & & \cong & & \cong_d & & \\ 0 & \in & D^d & \subseteq & \mathbb{R}^d & & \end{array}$
und damit

$$\begin{array}{ccc} H_d(M \mid B) & \longrightarrow & H_d(M \mid \{x\}) \\ \cong & & \cong \\ H_d(U \mid B) & & H_d(U \mid \{x\}) \\ \cong & & \cong \\ H_d(\mathbb{R}^d \mid D^d) & \equiv & H_d(\mathbb{R}^d \mid \{0\}), \end{array}$$

d.h. lokale Orientierungen können in Umgebungen von Punkten kompatibel gewählt werden, aber generell nicht global:



Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit entsprechen die zwei Erzeuger von $H_d(M \mid \{x\}; \mathbb{Z}) \equiv \mathbb{Z}$ den zwei „Orientierungen" des $\mathbb{R}$-Vektorraums $T_x M$ $\left(\{\text{Basen}\}/_\sim \right.$ mit $B \sim B' :\Leftrightarrow \det M_{BB'} > 0)$

__Satz III.2.5__ Sei M eine geschlossene (d.h. randlos und kompakte) zusammenhängende d-Mannigfaltigkeit. Dann gilt

1.) Ist M R-orientierbar, so ist

$$H_d(M; R) \xrightarrow{\cong} H_d(M \mid \{x\}; R), \quad \mu \longmapsto \mu_x$$

für jedes $x \in M$ ein Iso.

2.) Ist M nicht R-orientierbar, so ist $\mu \mapsto \mu_x$ injektiv mit Bild isomorph zu $\{r \in R : 2r = 0\}$

3.) $H_i(M;R) = 0$ für $i > d$.

<u>Bew.</u> Zu 1.) Die Surjektivität folgt aus Prop. III.2.4.(iii). mit $K = M$. Es gilt

$$\ker(H_d(M;R) \to H_d(M|\{x\};R)) =$$
$$= \ker(H_d(M;R) \to H_d(M|\{x\};R) \xrightarrow{\cong} H_d(M|U;R))$$

mit U wie in der letzten Bemerkung. Gilt für $\mu \in H_d(M;R)$ also $\mu \mapsto \mu_x = 0$, so gilt $\mu \mapsto \mu_y = 0$ für alle $y \in U$. Weil M zusammenhängend ist, folgt $\mu \mapsto \mu_y = 0$ für alle $y \in M$. Mit Prop. III.2.4.(ii) folgt $\mu = 0$.

Zu 2.) Injektivität gilt wie eben gezeigt. Für die zweite Aussage nutze die zweiblättrige „Orientierungs-überlagerung" (z.B. $S^2 \to \mathbb{RP}^2$, $T^2 \to K$) [Hatcher, S. 234-236]

Zu 3.) Prop III.2.4.(i) mit $K = M$. $\square$

<u>Def. III.2.6</u> Sei M wie in III.2.5 und R-orientierbar. Dann heißt jeder Erzeuger $[M] \in H_d(M;R)$ eine **Fundamentalklasse** von M.

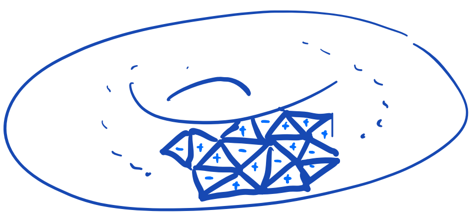
Beobachtung: · Laut Satz III.2.5.(i) entsprechen sich Orientierungen und Fundamentalklassen 1 : 1 und es gibt $|R^*|$ verschiedene Fundamentalklassen.

· Ist M trianguliert und $[M] = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sigma_i\right]$ eine simpliziale Fundamentalklasse unter dem Iso. T1.III.2.3, so gilt für $x \in \sigma_i(\mathring{\Delta}^d)$

$$H_d(M;R) \xrightarrow{\cong} H_d(M\,|\,\{x\};R) \cong R$$
$$[M] \longmapsto a_i[\sigma_i] \leftarrow \text{Erzeuger},$$

also $a_i \in R^*$. Außerdem gilt $\bigcup_{i=1}^{k} \sigma_i(\Delta^d) = M$, denn $[M] \mapsto 0 \in H_d(M|\{x\})$, falls $x \notin \bigcup_{i=1}^{k} \sigma_i(\Delta^d)$.

$R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{T}^2$, $[\mathbb{T}^2]$:



III.3 Der Abbildungsgrad für Mannigfaltigkeiten

Def. III.3.1 Seien M, N zshgde, orientierte, geschlossene, d-dim. Mfken und $f: M \to N$. Dann ist der **Abbildungsgrad** von f die eindeutige ganze Zahl $\deg f \in \mathbb{Z}$ mit $H_d(f;\mathbb{Z})([M]) = (\deg f) \cdot [N]$

Offensichtlich stimmt diese Def. im Fall $[M] = [N] = S^d$ mit Def. T1.III.4.1 überein.

<u>Beobachtungen</u>: · Ist f nicht surjektiv, gilt $\deg f = 0$.

· $\deg(f \circ g) = (\deg f) \cdot (\deg g)$

· $\deg(f : M \to N) = -\deg(f : M^- \to N)$, wenn M^- die andere Orientierung trägt.

<u>Bemerkung</u>. Für glatte Abb. en glatter Mfken stimmt $\deg f$ mit der differentialtopologischen Invariante überein [Seminar Diff. Top., T1.III.4]

Insbesondere gilt die Formel

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} \det D_x f$$

für jeden regulären Wert $y \in N$.

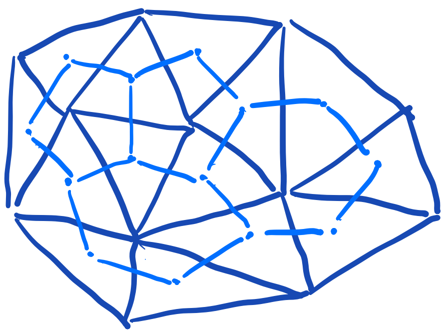
III.4 Der Dualitätsatz

<u>Satz III.4.1</u> (Poincaré-Dualität). Sei M eine zusammenhängende, geschlossene, R-orientierte, d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$P = [M] \frown (\cdot) : H^{d-k}(M; R) \xrightarrow{\cong} H_k(M; R)$$

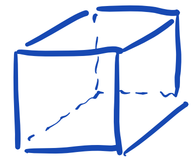
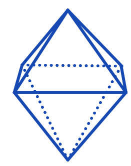
für jedes k ein Isomorphismus.

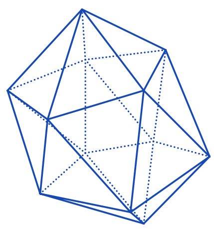
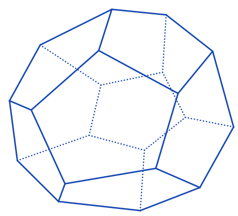
Idee [Poincaré]:

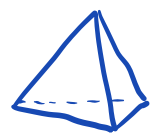
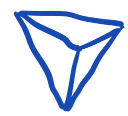


- Jede Zellstruktur von M liefert eine duale Zellstruktur:
$$\{k\text{-Zellen}\} \longleftrightarrow \{(d-k)\text{-Zellen}\}$$

- Beispiel $M = S^2$:

∘  $\longleftrightarrow$ 

∘  $\longleftrightarrow$ 

∘  $\longleftrightarrow$ 

$\rightarrow$ Erhalten <u>nicht-ausgeartete</u> „Schnittpaarung"
$$C_*(M) \otimes C_{d-*}(M) \longrightarrow R$$

$\rightsquigarrow$ Adjungiert einen <u>Iso</u> $\quad C_{d-*}(M) \xrightarrow{\cong} C^*(M)$

$\rightsquigarrow$ $H_{d-k}(M) \cong H^k(M)$. $\square$

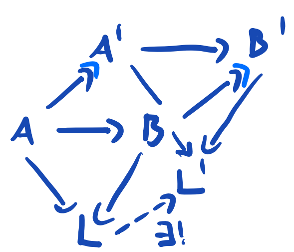
<u>Vorbetrachtungen zu Kolimites von R-Moduln:</u>

Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge, d.h. „$\leq$" ist eine Halbordnung auf I und zu $x, y \in I$ gibt es stets $z \in I$ mit $x \leq z$, $y \leq z$. Setzen wir $\mathrm{Hom}_I(x,y) = \begin{cases} * & x \leq y \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$, wird I zu einer kleinen Kategorie.

Ein Diagramm $F : I \to \mathcal{C}$ nennen wir **gerichtetes System** in $\mathcal{C}$ und colim F (falls existent) heißt **gerichteter Limes** oder **direkter Limes** von F
(Notation colim $F = \varinjlim_{i \in I} F(i)$.)

Sei nun $\mathcal{C} = \underline{R\text{-Mod}}$. Wir beobachten

- Direkter Limes ist exakt: Sind $F_1 \to F_2 \to F_3$ nat. Trafos mit
$$0 \to F_1(i) \to F_2(i) \to F_3(i) \to 0$$
exakt für alle $i \in I$, so ist
$$0 \to \varinjlim_i F_1(i) \to \varinjlim_i F_2(i) \to \varinjlim_i F_3(i) \to 0$$
exakt. (Kolimes ist i. A. nur rechts-exakt



$$\begin{tikzcd} A \amalg B \arrow[r] \arrow[d, two heads] & A' \amalg B' \arrow[d, two heads] \\ L \arrow[r, two heads] & L' \end{tikzcd},$$

über gerichteten System auch linksexakt.)

- Ist $\mathcal{C}$ die Kategorie der Untermoduln eines R-Moduls N und $F(i \leq j) : F(i) \subseteq F(j)$, gilt
$\varinjlim_i F(i) = \bigcup_{i \in I} F(i)$ (folgt aus univ. Eig.)
- Ist $J \subseteq I$ **kofinal** (d.h. $\forall\, i \in I\ \exists\, j \in J : i \leq j$), gilt $\varinjlim_{j \in J} F(j) \cong \varinjlim_{i \in I} F(i)$.

Def. III.4.2 Sei X ein top. Raum und $C^*_c(X;R) \subseteq C^*_{sing}(X;R)$ der Teilkomplex aller $\alpha : C_*^{sing}(X;R) \to R$, für die es ein Kompaktum $K_\alpha \subseteq X$ gibt, sodass $\alpha(\sigma) = 0$ für alle $\sigma : \Delta^* \to X$ mit $\sigma(\Delta^*) \cap K_\alpha = \emptyset$. Wir nennen

$$H^*_c(X;R) := H^*(C^*_c(X;R))$$

die singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger von X.

Notiz. Ist X kompakt, gilt $H^*_c(X;R) = H^*(X;R)$. $\square$

Der Kokegel $C^*(X, X\setminus K; R) \to C^*_c(X;R)$, $K \subseteq X$ komp. induziert einen Iso.

$$\varinjlim_{K \subseteq X} C^*(X, X\setminus K; R) \xrightarrow{\cong} C^*_c(X;R)$$

$$\| $$

$$\bigcup_{K \subseteq X \text{ komp.}} C^*(X, X\setminus K; R).$$

Somit erhalten wir

$$H^*(\varinjlim_{K \subseteq X} C^*(X; X\setminus K; R)) \xrightarrow{\cong} H^*_c(X;R).$$

Prop. III.4.3 $H^* : \underline{R\text{-cochain}} \to \underline{R\text{-Mod}}$ ist kostetig für $\varinjlim$.

Bew.

$$0 \to \varinjlim Z^n \to \varinjlim C^n \to \varinjlim C^{n+1}$$

$$0 \to \varinjlim Z^{n-1} \to \varinjlim C^{n-1} \to \varinjlim B^n \to 0$$

$$0 \to \varinjlim B^n \to \varinjlim Z^n \to \varinjlim H^n \to 0$$

Somit $\varinjlim Z^n = Z^n(\varinjlim C^*)$,

$\varinjlim B^n = \varinjlim C^{n-1} / \varinjlim Z^{n-1} = \varinjlim C^{n-1}/Z^{n-1}(\varinjlim C^*) = B^n(\varinjlim C^*)$,

$\varinjlim H^n(C_*) = Z^n(\varinjlim C^*) / B^n(\varinjlim C^*) = H^n(\varinjlim C^*)$. $\square$

Wir haben also einen Isomorphismus

$$H^*_c(X;R) \cong \varinjlim_{K\subseteq X} H^*(X|K;R).$$

Sei nun M eine d-dim. Mannigfaltigkeit mit R-Orientierung $(\mu_x)_{x\in M}$. Laut Prop. III.2.4. (iii) gibt es zu jedem $K \subseteq M$ kompakt ein eindeutiges $\mu_K \in H_d(M|K;R)$ mit $\mu_K \mapsto \mu_x$ für alle $x \in K$. Aus der Eindeutigkeit folgt $\mu_L \mapsto \mu_K$ für $K \subseteq L$ und daher ist

$$\begin{tikzcd}
H^{d-k}(M|K;R) \arrow[dr, "\mu_K \cap (\cdot)"] \arrow[d, "i^*"'] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "\circlearrowleft"] & \\
& H_k(M;R) \\
H^{d-k}(M|L;R) \arrow[ur, "\mu_L \cap (\cdot)"'] &
\end{tikzcd},$$

$\big(i_*(\mu_L \cap i^*(\alpha)) = i_*\mu_L \cap \alpha = \mu_K \cap \alpha\big)$.

ein Kokegel über dem gerichteten System $H^{d-k}(M|K;R)$, $K \subseteq M$ kompakt. Wir erhalten

$$P_k(M) : H_c^{d-k}(M;R) \cong \varinjlim_{K\subseteq M} H^{d-k}(M|K;R) \longrightarrow H_k(M;R)$$

Satz III.4.4 (Poincaré-Dualität, nicht-kompakte Version)
Sei M eine d-dim. R-orientierte Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$P_k(M): H_c^{d-k}(M;R) \longrightarrow H_k(M;R)$$

für jedes k ein Isomorphismus.

Aus obiger Notiz folgt III.4.4 $\Rightarrow$ III.4.1.

Sei nun $M = U \cup V$ mit U, V offen. Für jedes kompakte $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ erhalten wir aus der dualen S.E.S. von Kettenkomplexen in Schritt 2 des Beweises von Prop. III.2.4

$$0 \to C_*^{sing}(M|K_1 \cup K_2) \to C_*^{sing}(M|K_1) \oplus C_*^{sing}(M|K_2) \to C_*^{sing}(M|K_1 \cap K_2) \to 0$$

die M.V.-Folge

$$\to H^k(M|K\cap L) \to H^k(M|K) \oplus H^k(M|L) \to H^k(M|K\cup L) \to H^k(M|K\cap L) \to.$$

Mit Ausschneidung bekommen wir

$$\to H^k(U\cap V|K\cap L) \to H^k(U|K) \oplus H^k(V|L) \to H^k(M|K\cup L) \to H^{k+1}(U\cap V|K\cap L) \to.$$

Wähle $K_n \subseteq U$, $L_n \subseteq V$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = V$.
Dann gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} (K_n \cup L_n) = M$. Anwenden von $\varinjlim_n$ ergibt

$$\cdots \to H_c^k(U\cap V) \to H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \to H_c^k(M) \to H_c^{k+1}(U\cap V) \to \cdots$$

Prop. III.4.5 Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_c^k(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "P(U\cap V)"] & H_c^k(U)\oplus H_c^k(V) \arrow[r] \arrow[d, "P(U)-P(V)"] & H_c^k(M) \arrow[r] \arrow[d, "P(M)"] & H_c^{k+1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "P(U\cap V)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{d-k}(U\cap V) \arrow[r] & H_{d-k}(U)\oplus H_{d-k}(V) \arrow[r] & H_{d-k}(M) \arrow[r] & H_{d-k-1}(U\cap V) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

kommutiert bis auf das Vorzeichen.

Bew. Für die ersten zwei Quadrate folgt dies aus der Kozykelbeschreibung der involvierten Abbildungen. Für das dritte Quadrat muss die Konstruktion der Randabb. aus dem Schlangenlemma herangezogen werden [Hatcher, Lemma 3.36, S. 246]. □

Bew. (von Satz III.4.4): Zwei Induktionsschritte:

I) Gilt $M = U \cup V$ mit $U, V \subseteq M$ offen und sind $P(U)$, $P(V)$ und $P(U\cap V)$ Iso., so auch $P(M)$:

Folgt unmittelbar aus Prop. III.4.5 und dem 5er-Lemma.

II) Für $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq M$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = M$ und $P(U_i)$ ein Iso. für alle i ist auch $P(M)$ ein Iso:

Nach Ausschneidung gilt

$$H_c^*(U_i) \cong \varinjlim_{K\subseteq U_i} H^*(U_i \mid K) \cong \varinjlim_{K\subseteq U_i} H^*(M\mid K)$$

und daher

$$\lim_{i\to\infty} H_c^*(U_i) \cong \lim_{i\to\infty} \varinjlim_{K\subseteq U_i} H^*(M\mid K) \cong H_c^*(M).$$

Andererseits gilt auch
$$\lim_{i\to\infty} H_*(U_i) = H_*(M),$$
weil jede singuläre Kette kompakt getragen ist und damit in einer Menge U_i liegt.
Nach Vorraussetzung sind

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
H_c^*(U_i) \arrow[r, "\cong"', "P(U_i)"] \arrow[d] & H_*(U_i) \arrow[d] \\
H_c^*(U_{i+1}) \arrow[r, "\cong"', "P(U_i)"] \arrow[d] & H_*(U_{i+1}) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

isomorphe gerichtete Systeme und damit
$$P(M): H_c^*(M) \cong \lim_{i\to\infty} H_c^*(U_i) \xrightarrow{\cong} \lim_{i\to\infty} H_*(U_i) \cong H_*(M).$$

Nun der eigentliche Beweis:

<u>Schritt 1</u>. Der Fall $M = \mathbb{R}^d$. Es gilt
$$H_c^*(\mathbb{R}^d) \cong \varinjlim_{K\subseteq \mathbb{R}^d} H^*(\mathbb{R}^d | K) \cong \lim_{n\to\infty} H^*(\mathbb{R}^d | B_n(0)),$$
weil $\{B_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ kofinal in $\{K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ komp.}\}$ ist.
Das System $H^*(\mathbb{R}^d | B_n(0))$ ist offensichtlich konstant und daher
$$H_c^*(\mathbb{R}^d) \cong H^*(\mathbb{R}^d | B_1(0)) \cong H^*(D^d, S^{d-1}) \cong \begin{cases} R & * = d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Genauso gilt
$$H_{d-*}(\mathbb{R}^d) \cong H_{d-*}(\cdot) \cong \begin{cases} R & *=d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir müssen also nur zeigen, dass
$$P_d(\mathbb{R}^d) : H^d_c(\mathbb{R}^d) \longrightarrow H_d(\mathbb{R}^d)$$

ein Iso. ist. Wie oben gesehen genügt es dazu zu zeigen, dass
$$\mu_{B_1(0)} \cap (\cdot) : H^d(\mathbb{R}^d | B_1(0)) \longrightarrow H_d(\mathbb{R}^d)$$

ein Iso. ist. Weil $H_{d-1}(\mathbb{R}^d | B_1(0))$ projektiv ist, folgt aus dem U.K.S., dass
$$H^d(\mathbb{R}^d | B_1(0)) \xrightarrow{\cong} R$$
$$\alpha \longmapsto \langle \alpha, \mu_{B_1(0)} \rangle$$

ein Iso. ist. Ebenso ist
$$H_0(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\cong} R$$
$$v \longmapsto \langle 1_{H_0(\mathbb{R}^d)}, v \rangle$$

ein Iso. (Erzeuger trifft Erzeuger). Also ist $\alpha \mapsto \mu_{B_1(0)} \cap \alpha$ ein Iso. genau dann, wenn

$$\alpha \longmapsto \langle 1_{H_0(\mathbb{R}^d)}, \mu_{B_1(0)} \cap \alpha \rangle$$
ein Iso ist. Letzteres gilt, weil

$$\langle 1_{H_\bullet(\mathbb{R}^d)}, \mu_{B_1(0)} \cap \alpha \rangle = \langle \alpha \cup 1_{H_\bullet(\mathbb{R}^d)}, \mu_{B_1(0)} \rangle =$$

$$= \langle \alpha, \mu_{B_1(0)} \rangle.$$

<u>Schritt 2</u>. Der Fall $M \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Wir zeigen zunächst, für jede endliche Vereinigung $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ offener, beschränkter, konvexer Mengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^d$ ist $P_*(V)$ ein Iso. durch Induktion nach r. Anfang: Für $V = V_1$ gilt $V \cong \mathbb{R}^d$, also ist $P_*(V)$ ein Iso. nach Schritt 1. Induktionsschritt: Nach Ind.vor. ist $P(V_1 \cup \ldots \cup V_{r-1})$ und $P_*((V_1 \cap V_r) \cup \ldots \cup (V_{r-1} \cap V_r))$ ein Iso. Außerdem ist $P_*(V_r)$ ein Iso. nach Schritt 1. Also ist $P_*(V)$ ein Iso. laut I.

Nun ist $\mathbb{R}^d \supseteq M = \bigcup_{i=0}^\infty U_i$ abzählbare Vereinigung offener Bälle. Setzen wir $V_j := \bigcup_{i \leq j} U_i$, so ist wie gerade gesehen $P_*(V_j)$ ein Iso. für alle j. Nach II ist somit auch $P_*(M)$ ein Iso.

<u>Schritt 3</u>. Der allgemeine Fall.

Wir zeigen zunächst, für jede endliche Vereinigung $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ von offenen

Mengen $V_i \subseteq M$ mit $V_i \cong U_i \subseteq \mathbb{R}^d$ offen ist $P_*(V)$ ein Iso. durch Induktion nach r: Genau wie eben (ersetze nur „Schritt 1" mit „Schritt 2")

Nun ist M zweitabzählbar und deshalb $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ mit $\mathbb{R}^d \cong U_i \subseteq M$ offen. Setzen wir $V_j := \bigcup_{i<j} U_i$, so ist wie gerade gesehen $P_*(V_j)$ ein Iso. für alle j. Nach II ist somit auch $P_*(M)$ ein Iso. $\square$

III.5 Folgerungen der Poincaré-Dualität

Satz III.5.1 Sei M eine geschlossene ungerade-dim. Mannigfaltigkeit. Dann gilt $\chi(M) = 0$.

Bew. Sei K ein Körper. Wie in Satz T1.IV.2.8 sieht man für einen endlichen Kettenkomplex endl.-dimensionaler K-Vektorräume C_*, dass

$$\sum_k (-1)^k \dim_K C_k = \sum_k (-1)^k \dim_K H_k(C_*).$$

Weil M $\mathbb{Z}/2$-orientierbar ist, zeigt Poincaré-Dualität mit $d = \dim M$, dass $\dim_{\mathbb{Z}/2} H_{d-k}(M;\mathbb{Z}/2) \overset{\text{U.K.S.}}{=} \dim_{\mathbb{Z}/2} H^{d-k}(M;\mathbb{Z}/2) \overset{\text{P.D.}}{=} \dim_{\mathbb{Z}/2} H_k(M;\mathbb{Z}/2)$

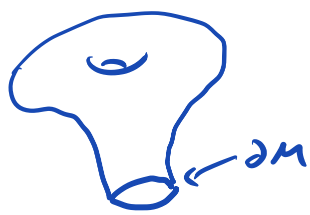
Für jede Zellstruktur von M (falls existent) gilt deshalb

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \left| \{ k\text{-Zellen} \} \right| = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \dim_{\mathbb{Z}/2} C_k^{cw}(M; \mathbb{Z}/2)$$

$$= \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \dim_{\mathbb{Z}/2} H_k^{cw}(M; \mathbb{Z}/2) = 0. \qquad \square$$

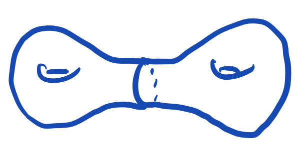
Def. III.5.2 Eine d-dim. Mannigfaltigkeit mit Rand ist ein zweitabzählbarer Hausdorffraum M, sodass jedes $x \in M$ eine Umgebung $U \subseteq M$ hat mit $U \cong \mathbb{R}^d$ oder $U \cong \{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d \geq 0 \}$.

Die Punkte, die keine Umgebung $U \cong \mathbb{R}^d$ haben, bilden den Rand $\partial M \subseteq M$. Offensichtlich ist ∂M eine randlose $(d-1)$-dim. Mannigfaltigkeit.



Def. III.5.3 Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Dann ist das Doppel von M die randlose Mannigfaltigkeit definiert durch

$$\begin{tikzcd} \partial M \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & M \arrow[d] \\ M \arrow[r] & DM. \end{tikzcd}$$



<u>Satz III.5.4</u> Ist M eine ungerade-dim. Mannigfaltigkeit mit Rand, so gilt $\chi(M) = \frac{\chi(\partial M)}{2}$.

<u>Bew.</u> Laut Additivität der Eulerchar. (T1.IV.2.10) gilt $2\chi(M) - \chi(\partial M) = \chi(DM) \overset{\text{III.5.1}}{=} 0$. $\square$

<u>Korollar III.5.4</u> Ist eine Mannigfaltigkeit M ein Rand (d.h. $M = \partial W$), ist $\chi(M)$ gerade.

<u>Bew.</u> Ist $\dim M$ ungerade, gilt $\chi(M) = 0 \in 2\mathbb{Z}$. Ist $\dim M$ gerade, folgt dies, weil $\chi(W) \in \mathbb{Z}$ nach Def. $\square$

- Also sind die nicht-($\mathbb{Z}$-)orientierbaren Flächen ungeraden Geschlechts N_{2k-1} keine Ränder, denn $\chi(N_{2k-1}) = 2 - (2k-1) = 2(1-k) + 1$.
- Insbesondere ist $\mathbb{RP}^2$ und allgemeiner $\mathbb{RP}^{2n}$ kein Rand, denn $\chi(\mathbb{RP}^{2n}) = 1$.
- Weil $\chi(\mathbb{CP}^{2n}) = 2n+1$, ist $\mathbb{CP}^{2n}$ eine $\mathbb{Z}$-orientierte Mannigfaltigkeit, die kein Rand ist
- N_{2k}, $\mathbb{RP}^{2n+1}$ und $\mathbb{CP}^{2n+1}$ sind Ränder! („nullbordant" $\rightsquigarrow$ Bordismus)

<u>Satz III.5.5</u> Sei M geschlossen und R-orientiert. Dann ist die R-bilineare Abbildung

$$H^{d-q}(M;R) \times H^q(M;R) \longrightarrow R$$
$$(\alpha,\beta) \longmapsto \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle$$

nicht ausgeartet (d.h. die induzierten Abb.en
$\varphi: H^q(M;R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H^{d-q}(M;R), R)$ und
$\psi: H^{d-q}(M;R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H^q(M;R), R)$ sind Iso.s),
falls R ein Körper ist oder falls $R = \mathbb{Z}$ und
wir $H^*(M;R)$ durch $H^*(M;R)/\text{Torsion}$ ersetzen.

<u>Bew.</u> Für $\alpha \in H^{d-q}(M;R)$ ist die Komposition

$$F: H^q(M;R) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}(H_q(M;R),R) \xrightarrow{P_q(M)^*} \mathrm{Hom}(H^{d-q}(M;R),R) \xrightarrow{ev_\alpha} R$$

gegeben durch $F(\beta) = \langle \beta, [M] \cap \alpha \rangle = \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle$.
Weil h (nach Voraussetzung und U.K.S.) und
$P_q(M)^*$ (nach Poincaré-Dualität) Iso.s sind,
ist auch φ ein Iso. Weil $\langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle =$
$= (-1)^{q(d-q)} \langle \beta \cup \alpha, [M] \rangle = (-1)^{q(d-q)} \langle \alpha, [M] \cap \beta \rangle$,
ist auch ψ ein Iso. $\square$

<u>Korollar III.5.6</u> Sei M geschlossen und orientiert
und sei $\alpha \in H^{d-q}(M;\mathbb{Z})$ unendlicher Ordnung und
kein echtes Vielfaches. Dann gibt es $\beta \in H^q(M;\mathbb{Z})$,
sodass $\alpha \cup \beta$ $H^d(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt.

Bew. Nach Voraussetzung ist $\langle\alpha\rangle \cong \mathbb{Z}$ ein direkter Summand von $H^{d-k}(M;\mathbb{Z})$, also gibt es eine nicht-triviale $\mathbb{Z}$-Linearform $\delta: H^{d-k}(M;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ mit $\alpha \longmapsto 1$. Nach III.5.5 erfüllt $\beta := \varphi^{-1}(\delta)$ die Relation $\langle \alpha \cup \beta, [M]\rangle = 1$. Also ist $\alpha \cup \beta \in H^{d}(M;\mathbb{Z})$ ein Erzeuger. $\square$

Def. III.5.7 Für eine geschlossene orientierte $4k$-dim. Mannigfaltigkeit M heißt die symmetrische $\mathbb{Z}$-Bilinearform

$$H^{2k}(M;\mathbb{Z})/_{\text{Torsion}} \times H^{2k}(M;\mathbb{Z})/_{\text{Torsion}} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(\alpha, \beta) \longmapsto \langle \alpha\cup\beta, [M]\rangle$$

die Schnittform von M.

Def. III.5.8 Für M wie in III.5.7 definieren wir die Signatur $\sigma(M) \in \mathbb{Z}$ als die Signatur der Schnittform $(\#\{\text{pos. EWe}\} - \#\{\text{neg. EWe}\}$ nach $(\cdot)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R})$

Bsp. $\sigma(\mathbb{C}P^{2n}) = 1$.

Bem. σ : „Bordismusring der $4k$-Mfken" $\longrightarrow \mathbb{Z}$ ist ein Ringhomomorphismus!

Die Poincaré-Dualität erlaubt oft eine vereinfachte Berechnung des Kohomologierings einer Mannigfaltigkeit:

<u>Bsp.</u> $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ ist ein H^*-Iso. für $* \leq 2n-2$.
Nach Ind.-vor. gilt $H^*(\mathbb{C}P^{n-1}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^n)$, $|\alpha| = 2$.
Laut III.5.6 gibt es $r \in \mathbb{Z}$, sodass $\alpha \cup r\alpha^{n-1}$
$H^{2n}(\mathbb{C}P^n)$ erzeugt, insbesondere also $r = \pm 1$, d.h.
auch $\alpha^n \in H^{2n}(\mathbb{C}P^n)$ ist ein Erzeuger und
$H^*(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$.
Genauso: · $H^*(\mathbb{H}P^n) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$, $|\alpha| = 4$
· $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$.

<u>Def.</u> Eine zusammenhängende, geschlossene d-dim. Mannigfaltigkeit heißt Homologiesphäre, falls $H_*(M) \cong H_*(S^d)$.

<u>Prop. III.5.9</u> Eine zshgde geschl. 3-Mannigfaltigkeit mit $H_1(M) = 0$ ist eine Homologiesphäre.

<u>Bew.</u> Weil $(\pi_1 M)_{ab} = 1$, gibt es kein $H \leq \pi_1 M$ mit $[\pi_1 M : H] = 2$ und daher hat M keine zshgde zweiblättrige Überlagerung, ist also orientierbar.
Es folgt $H_2(M) \overset{P.D.}{\cong} H^1(M) \overset{u.k.S}{\cong} \mathrm{Hom}(H_1(M); \mathbb{Z}) \cong 0$
und $H_3(M) \overset{P.D.}{\cong} H^0(M) \overset{u.k.S}{\cong} \mathrm{Hom}(H_0(M); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

Poincaré: Es gibt eine 3-dim. Homologiesphäre M mit $M \not\cong S^3$. (Quotient eines ausgefüllten Dodekaeders nach Identifizieren gegenüberliegender Seiten mit 72°-Drehung. $\pi_1 M \cong A_5$, $(\pi_1 M)_{ab} = 1$.)

<u>Satz III.5.10</u> (Poincaré-Vermutung)
Eine einfach zusammenhängende d-dim. Homologiesphäre ist homöomorph zu S^d.

<u>Bem.</u> • $d=2$: klar.
• $d \geq 5$: [S. Smale, 1961] Fields-Medaille 1966
• $d = 4$: [M. Freedman, 1982] Fields-Medaille 1986
• $d = 3$: [G. Perelman, 2003] Fields-Medaille 2006
(abgelehnt) Einzig gelöstes Millennium-Problem. □

<u>III.6 Wie geht es weiter?</u>

- Homotopietheorie, insbesondere:
- Klassifizierung von Faserbündeln $(b_G(X) \cong [X, BG])$
- Charakteristische Klassen (nat. Trafo. $c: b_G \xrightarrow{\cong} H^*$, Yoneda: nat. Trafo. $(b_G, H^*) \cong H^*(BG)$)
- Kohomologieoperationen (nat. Trafo. $\eta: H^* \to H^{*+8}$ z.B. $\cup: H^n \to H^{2n}$, Steenrod algebra)
- K-Theorie ($\mathrm{Vect}(X)$ mit $\oplus$, $\rightsquigarrow$ Grothendieck $\rightsquigarrow K^0(X)$)

- Spektralsequenzen $F \hookrightarrow E \to B$, $H^p(B, H^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(E)$
- Spektren und die homotopietheoretische Konstruktion der Kohomologie. $H^n(X;G) \cong [X, K(G,n)]$

$$f^*c \leftarrow\!\shortmid f$$

$$\begin{aligned} H^n(K(G,n);G) &\cong \mathrm{Hom}(H_n(K(G,n)), G) \cong \\ &\cong \mathrm{Hom}(\pi_n(K(G,n)), G) \cong \\ &\cong \mathrm{Hom}(G, G) \\ c &\mapsto id_G \,, \end{aligned}$$

$\Omega K(G,n) \simeq K(G, n-1) \to$ Brown-Darstellungssatz

(reduzierte zelluläre) Kohomologietheorien werden von „Ω-Spektren" dargestellt.