Analytische Zahlentheorie hhu Düsseldorf
Anwesenheitsblatt 0 SoSe 2022

Ohne Abgabe! Nur Besprechung am Mittwoch 6.4.2022 in der Übung

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/`

Besprechungs-Aufgabe 1: Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log(n+1)$.

Besprechungs-Aufgabe 2:
Den Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ seien die Dirichletreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ gegenübergestellt (ohne Konvergenzbetrachtungen).
Werden sämtliche Koeffizienten einer Potenzreihe gleich 1 gesetzt, so entsteht die geometrische Reihe $1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z}$,
werden sämtliche Koeffizienten einer Dirichletreihe gleich 1 gesetzt, so entsteht die Zetafunktion $1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots + n^{-s} + \cdots =: \zeta(s)$.
Die Anzahl der Teile von n ist $\sum_{t\le n} 1 = n+1$, die Anzahl der Teiler von n ist $\sum_{t|n} 1 =: \tau(n)$.
Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \tau(n) z^n = \zeta(s)^2.$$

Besprechungs-Aufgabe 3: Der n-te Koeffizient in der Entwicklung des Produktes

$$\frac{1}{1-z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ist } \sum_{t\le n} a_t,$$

der in

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \text{ ist } \sum_{t|n} a_t.$$

Besprechungs-Aufgabe 4: Sind $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$ beliebig und $A_n := \sum_{t\le n} a_t$ für $n \in \mathbb{N}_0$, so ist offenbar

$$a_0 = A_0,\ a_1 = A_1 - A_0,\ a_2 = A_2 - A_1,\ \dots,\ a_n = A_n - A_{n-1}, \dots$$

Sind $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$ beliebig und $A_n := \sum_{t|n} a_t$ für $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$a_1 = A_1,\ a_2 = A_2 - A_1,\ a_3 = A_3 - A_1,\ a_4 = A_4 - A_2,\ a_5 = A_5 - A_1,\ a_6 = A_6 - A_3 - A_2 + A_1,\ \dots$$

und allgemein

$$a_n = \sum_{d|n} \mu(d) A_{n/d}$$

für $n \in \mathbb{N}$, wobei $\mu(n)$ das Möbiussche Symbol ist.

Besprechungs-Aufgabe 5: Inwiefern würden Sie der folgenden Behauptung zustimmen:
Die Potenzreihen sind das richtige Werkzeug für die additive, die Dirichletreihen sind es für die multiplikative Zahlentheorie.