

Abgabe: bis Montag 13.06.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung in U1.72

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/>

---

**Aufgabe 1 (5 Punkte): Dirichletsche Hyperbelmethode, vgl. mit AnZ17**

(a) Zeigen Sie  $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \ll \log \log(x)$ .

(b) Sei  $P_{(2)}$  die Menge der  $n \in \mathbb{N}$ , die Produkt zweier Primzahlen sind. Sei  $x \geq 4$ . Zeigen Sie, dass für die Zählfunktion  $\pi_{(2)}(x) := \#\{n \leq x; n \in P_{(2)}\}$  die Abschätzung

$$\pi_{(2)}(x) \ll x \frac{\log \log(x)}{\log(x)}$$

gilt. **Möglicher Ansatz:**

$$\#\{(p_1, p_2); p_1 p_2 \leq x\} = \sum_{p_1 \leq \sqrt{x}} \sum_{p_2 \leq x/p_1} 1 + \sum_{p_2 \leq \sqrt{x}} \sum_{p_1 \leq x/p_2} 1 - \sum_{p_1 \leq \sqrt{x}} \sum_{p_2 \leq \sqrt{x}} 1.$$

**Aufgabe 2 (5 Punkte): Verschiedene Zeta-Werte aus der Funktionalgleichung, AnZ19**

Bestimmen Sie die Zeta-Werte  $\zeta(-1)$  und  $\zeta(-3)$  aus der Funktionalgleichung (der Wert für  $\zeta(4)$  kann recherchiert und zitiert werden). Warum kann  $\zeta(1/2)$  so nicht bestimmt werden?

**Hinweis:** Ramanujans erster Brief an Hardy (im Jahr 1913) erhielt folgende Formeln:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots = \frac{1}{120}$$

**Wissensfragen zu AnZ19, AnZ20 (nur mündlich, ohne Abgabe):**

---

**AnZ19:**

- (1) Wie wird die Theta- und die Psi-Reihe definiert?
- (2) Zu welchem Zweck kann man diese Funktionen studieren?
- (3) Welche Funktionalgleichungen erfüllen sie?
- (4) Welches Ergebnis aus der Theorie der Fourierreihen wird benötigt, um die Funktionalgleichung für die Theta-Reihe herzuleiten?
- (5) Wie kann die Funktionalgleichung der Zetafunktion besonders kurz formuliert werden?
- (6) Welche trivialen Nullstellen hat die Zetafunktion und warum?
- (7) Welche Symmetrieeigenschaft über die Lage der nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion ergibt sich daraus?

**AnZ20:**

- (1) Was ist eine Fourierreihe und wie definiert man deren Fourierkoeffizienten?
- (2) Was ist die Fouriertransformierte einer Funktion, wann kann diese definiert werden?
- (3) Was besagt die Poissonsche Summenformel? Welche Voraussetzung ist dafür wesentlich?