

Abgabe: bis Montag 20.06.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung in U1.72

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/>

---

**Aufgabe 1 (5 Punkte): Asymmetrische Form der Funktionalgleichung**

Zeigen Sie für  $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$  die asymmetrische Form der Funktionalgleichung für  $\zeta$ , nämlich

$$\zeta(s) = \zeta(1-s) 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin(\pi s/2).$$

**Hinweis:** Benutzen Sie das Spiegelungsprinzip  $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin(\pi s)$  für  $\Gamma(s/2)$  und die Legendresche Verdopplungsformel  $\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = \sqrt{\pi} 2^{1-2s} \Gamma(2s)$ ,  $2s \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$  (ist nicht zu zeigen).

**Aufgabe 2 (5 Punkte): Nullstellen von  $\zeta$  bzw.  $\xi$  bzw.  $\Xi$**

Die Riemann–Siegel-Funktion  $\Xi(t)$  ist definiert als

$$\Xi(t) := -\frac{1}{2} \left( t^2 + \frac{1}{4} \right) \pi^{-1/4-it/2} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

Zeigen Sie, dass  $\Xi(t)$  eine auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion ist, die reellwertig und zudem gerade ist für  $t \in \mathbb{R}$  (d. h.  $\Xi(t) = \Xi(-t)$  für  $t \in \mathbb{R}$ ).

Wie könnte man mit Hilfe dieser Funktion die  $\zeta$ -Nullstellen des Realteils  $1/2$  auffinden?

**Hinweis:** Variablentransformation  $s \mapsto t = i/2 - is$  bei  $\xi$ .

**Aufgabe 3 (5 Punkte): Anwendungen des Satzes von Mertens**

(a) Zeigen Sie, dass  $\sum_{x < p \leq 3x} \frac{1}{p} = O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)$  für  $x \rightarrow \infty$  gilt.

(b) Zeigen Sie, dass  $\sum_{p|n} \frac{1}{p} \leq \log \log \log(n) + c$  mit einer Konstanten  $c \in \mathbb{R}$  und alle  $n \geq e^{e^e}$  gilt.

**Wissensfragen zu AnZ21 (nur mündlich, ohne Abgabe):**

---

**AnZ21:**

(1) Wie lautet der Satz von Mertens über  $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$ ?

(2) Welchen Wert hat darin die Meissel–Mertens-Konstante  $\beta$ , ausgedrückt mit der Euler–Mascheroni-Konstante  $\gamma$ ?

(3) Wie lautet dabei die Definition der Konstanten  $\alpha$ ?

(4) Welche Asymptotik folgt für das Produkt  $\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ ?

(5) Welche Asymptotiken ergeben sich für ähnliche Euler-Produkte?