Analytische Zahlentheorie, Blatt 14

hhu Düsseldorf
SoSe 2022

Abgabe: bis Montag 04.07.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung in U1.72

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/`

Aufgabe 1 (5 Punkte): PZS in AP

Folgern Sie aus dem Primzahlsatz in Progressionen, dass unendlich viele Primzahlen existieren, deren Dezimaldarstellung mit 1 beginnt und mit 7 endet.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Gaußsche Summen mod q

Sei $\chi \neq \chi_0$ mod q ein Charakter, sei $\xi := \exp(2\pi i/q)$ und $\tau_\chi(n) := \sum_{m=1}^{q} \chi(m)\xi^{nm}$ die zu χ gehörige Gaußsche Summe. Zeigen Sie:

(a) Für $(n, q) = 1$ ist $\tau_\chi(n) = \overline{\chi}(n)\tau_\chi(1)$.

Hinweis: Mit r durchläuft auch nr ein vollständiges Restsystem mod q, und man hat $\chi(r) = \overline{\chi}(n)\chi(nr)$.

(b) Falls $q = p$ eine Primzahl ist, so ist $|\tau_\chi(1)| = p^{1/2}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Koeffizienten im Produkt aller L-funktionen mod q untersuchen

Zeigen Sie: Für $\sigma > 1$ gilt

$$\prod_{\chi(q)} L(s,\chi) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

mit $a_1 = 1$ und $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 2$.

Anleitung: Nehmen Sie den log der l.S., entwickeln Sie die log-Summanden mit der log-Reihe, die Koeffizienten der entstehenden Dirichlet-Reihe seien b_m. Zeigen Sie deren Nichtnegativität durch Beweis von $b_{p^k} \geq 0$. Durch Exponentiation der Reihe mit den b_m kommt man wieder zu den a_n.

Wissensfragen zu AnZ24, AnZ25 (nur mündlich, ohne Abgabe):

AnZ24:

(1) Was ist ein Charakter auf der reduzierten Restklassengruppe mod q?

(2) Wie erhält man damit einen Dirichletcharakter mod q auf $\mathbb{Z}$?

(3) Wieviele Dirichletcharaktere mod q gibt es, und warum?

(4) Wie lauten die Orthonormalitätsrelationen für Charaktere?

(5) Was nennt man die Charaktergruppe mod q?

AnZ25:

(1) Wie wird die L-Reihe $L(s,\chi)$ definiert?

(2) Wie kann man $L(s,\chi)$ auf $\sigma > 0$ meromorph fortsetzen? Wo gibt es Pole, wo ist die Funktion holomorph?

(3) Welche Eulerproduktdarstellung haben L-Funktionen?

(4) Wie kann eine Summe über eine Funktion $f(n)$ mit Laufindex n, der über eine arithmetische Progression läuft, mit Charakteren umgeschrieben werden?

(5) Welche Konsequenz hat dies für die Funktion $f(n) = \Lambda(n)n^{-s}$?

(6) Kann auch für L-Funktionen eine Funktionalgleichung wie für ζ gezeigt werden?