Analytische Zahlentheorie,
Wiederholungsblatt 15

hhu Düsseldorf
SoSe 2022

Keine Abgabe! Nur zur Besprechung in der Übung am 13.07.22

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/`

Beantworten Sie die Wissensfragen, hier für die letzten Kapitel AnZ26–AnZ29.

Beachten Sie dabei:
(i) Gehen Sie – soweit wie es Ihnen sinnvoll erscheint – bei der Beantwortung ins Detail.
(ii) Nennen Sie (mindestens) ein **Beispiel** bzw. eine Beispielanwendung pro Frage. Beispiele erhalten Sie typischerweise durch geeignetes Einsetzen von konkreten Argumenten, Funktionen, usw. Erläutern Sie dabei kurz, welchen Sachverhalt Sie mit dem Beispiel darlegen.
(iii) Bringen Sie bei der Beantwortung jeder der Fragen mindestens drei Formeln unter (jede Formel soll dabei eines der Zeichen $=, \leq, \ll$ oder $\sim$ enthalten).

Wissensfragen zu AnZ26–AnZ29 (nur mündlich, ohne Abgabe):

AnZ26:

(1) Wie kann die Summe über $\Lambda(n)n^{-s}$, wenn n über die Progression a mod q läuft, mit den Vielfachheiten der Nullstelle $s = 1$ von $L(s, \chi)$ in Verbindung gebracht werden? Was bedeutet es dabei, wenn diese Vielfachheit gleich Null ist?

(2) Was ist ein reeller Charakter, was ein komplexer Charakter?

(3) Für welche Charaktere ist $L(1, \chi) \neq 0$ leichter zu zeigen, für die reellen oder für die komplexen?

(4) Warum kann man sich beim Beweis von $L(1, \chi) \neq 0$ auf reelle Charaktere beschränken?

(5) Warum ist die zahlentheoretische Funktion $\chi * \mathbf{1}$ und die davon erzeugte Dirichletreihe beim Beweis davon so nützlich?

(6) Inwiefern spielt der Satz von Landau dabei eine Rolle?

(7) Welches Ergebnis wird nun mit der Aussage $L(1, \chi) \neq 0$ unmittelbar erzielt?

AnZ27:

(1) Wie lautet der Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Progressionen?

(2) Wie folgt er unmittelbar aus dem letzten Ergebnis von AnZ26?

(3) Welche Dirichlet-Dichte haben die Primzahlen der Restklasse a mod q in der Menge aller Primzahlen, und wie kann dies aus dem letztem Ergebnis von AnZ26 gefolgert werden?

(4) Welchen Weg muss man einschlagen, um die natürliche Dichte der Primzahlen der Restklasse a mod q in der Menge aller Primzahlen zu bestimmen?

(5) Wie muss der Nachweis von $L(1 + it, \chi) \neq 0$ für $t \in \mathbb{R}$ geführt werden? Was ist anders als beim analogen Beweis für $\zeta(1 + it) \neq 0$?

(6) Mit welchem analytischen Hilfsmittel kommt man dann zum Primzahlsatz in Progressionen?

(7) Welche äquivalenten Umformulierungen des Primzahlsatzes in Progressionen kennen Sie?

AnZ28:

(1) Welche Restgliedversionen des PZSes in APs kann man o.A.u.V. formulieren?

(2) Wie kann eine Aussage über die Abhängigkeit des Restterms von q getroffen werden? Inwiefern spielen auch hier die Nullstellen von $L(s, \chi)$ eine wesentliche Rolle?

(3) Was ist eine Siegelnullstelle?

(4) Welche untere Schranke für $L(1, \chi)$ kann man zeigen? Welches Effektivitätsproblem liegt dann vor?

(5) Welche obere Abschätzung gilt für eine Siegelnullstelle?

(6) Welche Primzahlsätze für Primzahlen in Progressionen ergeben sich damit?

AnZ29:

(1) Wie lautet die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung (GRH)?

(2) Wie sind die Nullstellen von $L(s, \chi)$ mit der Funktion $\psi(x, \chi)$ verbunden?

(3) Ist die Funktion $\psi(x, \chi)$ eine Primzahlzählfunktion?

(4) Wie hängt $\psi(x; q, a)$ mit den $\psi(x, \chi)$ zusammen?

(5) Welche Umformulierungen der (GRH) können (analog zur (RH)) mit den Funktionen $\psi(x; q, a)$, $\vartheta(x; q, a)$ und $\pi(x; q, a)$ gegeben werden?

(6) Könnte man noch weitreichendere Vermutungen als die (GRH) aussprechen?

(7) Mit welchen Konsequenzen muss man rechnen, wenn die Existenz einer Siegelnullstelle angenommen wird?

Stellen Sie die Ihrer Meinung nach wichtigsten Formeln der Vorlesung zusammen. Erschließen Sie ihre Bedeutung und überlegen Sie sich jeweils ein (Anwendungs-)beispiel, etwa mit bestimmten zahlentheoretischen Funktionen. Bringen Sie Ihre Fragen mit in die Besprechung.