Analytische Zahlentheorie, Blatt 2

Abgabe: Mittwoch 20.4.2022, 14:30 Uhr in der Vorlesung in 03.73

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/`

Aufgabe 1 (3 Punkte): Distributivgesetz für Multiplikation und Faltung

(a) Seien $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, und sei h vollständig multiplikativ. Zeigen Sie das Distributivgesetz

$$(f * g) \cdot h = (f \cdot h) * (g \cdot h),$$

die Multiplikation zweier Funktionen ist dabei punktweise definiert.

(b) Zeigen Sie, dass das Distributivgesetz in (a) im Allgemeinen nicht für multiplikative zahlentheoretische Funktionen gilt.

(c) Zeigen Sie, dass das "umgekehrte" Distributivgesetz $(f \cdot g) * h = (f * h) \cdot (g * h)$ nicht mal dann gilt, wenn f und g vollständig multiplikativ sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Faltungsidentitäten

Gegeben seien die zahlentheoretischen Funktionen $\tilde{\tau}(n) := \tau(n^2)$, $\hat{\tau}(n) := n\tau(n)$, $\tilde{\omega}(n) := 2^{\omega(n)}$. Zeigen Sie die Faltungsidentitäten

(a) $\tilde{\tau} = \tilde{\omega} * \mathbb{1}$ (b) $\tau^3 * \mathbb{1} = (\tau * \mathbb{1})^2$ (c) $\sigma * \mathrm{id} = \hat{\tau} * \mathbb{1}$

Aufgabe 3 (5 Punkte): Die zahlentheoretische Funktion φ

Sei $\varphi(n) = \#\{1 \leq a \leq n;\ (a, n) = 1\}$ die Eulersche φ-Funktion. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$. **Hinweis:** Benutzen Sie den Möbius-Trick

$$\sum_{a=1}^{n} \varepsilon((a, n)) = \sum_{a=1}^{n} \mu * \mathbb{1}((a, n)).$$

(b) Die Funktion φ ist eine multiplikative zahlentheoretische Funktion.

(c) Auf Primpotenzen p^k nimmt φ den Wert $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ an.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Formel $\varphi(n) = \prod_{p^k \| n} p^{k-1}(p-1) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

(e) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $a \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(a) = n!$. (Tipp nach Erdős: $\prod_{p \leq n}(p-1) \mid n!$)

Aufgabe 4 (2 Punkte): Wachstum der Teileranzahlfunktion τ

Zeigen Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) > 0$ gibt mit $\tau(n) \leq C(\varepsilon) n^{\varepsilon}$.
Tipp: Zuerst den Bruch $\tau(n)/n^{\varepsilon}$ betrachen, und dann die Anzahl der p^{ℓ} mit $\tau(p^{\ell}) > p^{\ell\varepsilon}$ abschätzen, sowie deren Bruch $\tau(p^{\ell})/p^{\ell\varepsilon}$.