

Abgabe: Montag 02.05.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung in U1.72

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/>

Aufgabe 1 (5 Punkte): Asymptotik der Teilersummenfunktion

Gegeben sei die Teilersummenfunktion $\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{d}$. Zeigen Sie die Formel

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\zeta(2)}{2} x^2 + O(x \log x).$$

Hinweis: Benutzen Sie für $\sum_{\substack{n \leq N \\ d|n}} \frac{n}{d} = \sum_{k \leq N/d} k$ den kleinen Gauß $\sum_{k \leq M} k = M(M+1)/2$ und die

Approximationen $[y] = y + O(1)$ und $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + O(1)$ aus der Vorlesung bzw. Blatt 3,

Aufgabe 1(a). (Oder alternativ eine Asymptotik für $\sum_{n \leq x} \frac{\sigma(n)}{n}$ zeigen und dann part. Summ.)

Aufgabe 2 (5 Punkte): Aufgabe zu Konvergenzabszissen

Bestimmen Sie die Konvergenzabszisse zu den Dirichletreihen $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ mit den Koeffizienten

- (a) $a_n = n^{-1/2}$, (b) $a_n = (-1)^n n^{-1/2}$, (c) $a_n = \log(n)$,
 (d) $a_n = 1$ falls $n = k^2$, und $a_n = 0$ sonst, (e) $a_n = \varphi(n)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Darstellungen von n als Produkt von Faktoren > 1 und ζ

(a) Zeigen Sie, dass es ein $\alpha_0 > 1$ so gibt, dass für alle $\sigma > \alpha_0$ und $t \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $|\zeta(\sigma + it)| \leq 2$ gilt.

(b) Sei $f(1) := 1$, und für $n > 1$ sei

$$f(n) := \sum_{k \geq 1} \#\{(d_1, \dots, d_k) \in (\mathbb{N}_{>1})^k; d_1 \cdots d_k = n\}$$

die Anzahl der multiplikativen Zerlegungen von n in Faktoren > 1 .

Zeigen Sie für $\sigma > \alpha_0$ die Formel

$$\sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s} = \frac{1}{2 - \zeta(s)}.$$

Wissensfragen zu AnZ5, AnZ6 (nur mündlich, ohne Abgabe):

AnZ5:

- (1) Wie lautet die k -te Ableitung einer Dirichletreihe? Auf welchem Definitionsbereich ist diese bildbar?
- (2) Wie lässt sich die Riemannsches Zetafunktion für $\sigma > 1$ als Dirichletreihe definieren?
- (3) Wie hängt die Multiplikation von Dirichletreihen mit dem Dirichletschen Faltungsprodukt zahlentheoretischer Funktionen zusammen?
- (4) Wie kann man demnach die von der Möbiusfunktion erzeugte Dirichletreihe mit ζ ausdrücken? Für welche s gilt dies?
- (5) Welche Formel gilt für die von der von Mangoldt-Funktion Λ erzeugte Dirichletreihe mit ζ und ζ' ?

AnZ6:

- (1) Welchen Wert hat $\zeta(2)$, ausgedrückt mit π ?
- (2) Welche Methode kennen Sie, diesen Wert der Zetafunktion an der Stelle $s = 2$ herzuleiten?