Analytische Zahlentheorie, Blatt 6

hhu Düsseldorf
SoSe 2022

Abgabe: Montag 16.05.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung in U1.72

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/`

Aufgabe 1 (3 Punkte): Eulerprodukt mit Potenzteilersummen

Leiten Sie die Eulerproduktdarstellung der Dirichletreihe $D_a(s) = \sum_{n\geq 1} \sigma_a(n) n^{-s}$ her, wo $\sigma_a(n) = \sum_{t|n} t^a$ die Potenzteilersummenfunktion bezeichnet, mit $a \in \mathbb{C}$.
Für (zumindest) welche $s \in \mathbb{C}$ gilt diese?

Aufgabe 2 (6 Punkte): Zeta nahe 1

Sei $\gamma := 1 - \int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$ die Eulersche Konstante. Zeigen Sie, dass für $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|s-1| < 1$ gilt:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \mathrm{O}(|s-1|).$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Funktion $f(s)$ in der Darstellung $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 + sf(s)$ aus Kapitel AnZ10 in eine Taylorreihe um 1 und benutzen Sie die Cauchysche Integralformel zur Abschätzung der Koeffizienten.

Aufgabe 3 (6 Punkte): Zur Zeta-Fortsetzung auf $\sigma > 0$

Führen Sie einen anderen Beweis für die Fortsetzbarkeit der ζ-Funktion auf $\sigma > 0$ mit einzigem möglichen Pol bei $s = 1$, indem Sie schrittweise zeigen:

(a) Die durch die Dirichletreihen

$$1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \ldots \text{ und } 1 + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{2}{6^s} + \ldots$$

definierten Funktionen f und g sind holomorph auf $\sigma > 0$.

(b) Für $\sigma > 1$ gilt $f(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ und $g(s) = (1 - 3^{1-s})\zeta(s)$.

(c) $s = 1$ ist die einzige gemeinsame Nullstelle von $1 - 2^{1-s}$ und $1 - 3^{1-s}$.

Hinweis: Verwenden Sie dabei $\log(2)/\log(3) \notin \mathbb{Q}$.

(d) ζ ist auf $\sigma > 0$ fortsetzbar mit einzigem möglichen Pol bei $s = 1$.

Wissensfragen zu AnZ9, AnZ10 (nur mündlich, ohne Abgabe):

AnZ9:

(1) Welche Eulerproduktdarstellung hat die Zetafunktion?

(2) Wie lauten die Eulerproduktdarstellungen für Dirichletreihen, die von bestimmten zahlentheoretischen Funktionen erzeugt sind?

(3) Nennen Sie eine Eulerproduktdarstellung für eine Dirichletreihe, die nicht von einer der zahlentheoretischen Grundfunktionen erzeugt wird, sondern von einer erzeugt wird, die aus Grundfunktionen zusammengesetzt ist.

AnZ10:

(1) Mit welcher Formel kann die Zetafunktion in die Halbebene $\{\sigma > 0\}$ meromorph fortgesetzt werden? Wo hat diese Pole? Von welcher Vielfachheit und mit welchem Residuum?

(2) Was ist der kritische Streifen der Zetafunktion?

(3) In welchen Punkten $s = 1+it$ mit $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ konvergiert die Dirichletreihe der Zetafunktion noch?