Analytische Zahlentheorie, Blatt 8

hhu Düsseldorf
SoSe 2022

Abgabe: bis Montag 30.05.2022, 12:30 Uhr in der Vorlesung in U1.72

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/`

Aufgabe 1 (5 Punkte): Zusammenhang zwischen $M(x) = \mathrm{o}(x)$ und $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n}$

Zeigen Sie:

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wenn $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert, dann ist $\sum_{n\leq x} na_n = \mathrm{o}(x)$.

(b) Die Aussage $M(x) = \mathrm{o}(x)$ für $x \to \infty$ folgt aus der Existenz von $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n}$.

(Dabei bezeichnet $M(x) := \sum_{n\leq x} \mu(n)$ die Mertensfunktion.)

Aufgabe 2 (5 Punkte): Asymptotische Formeln mit Λ und $\log(p)$

(a) Zeigen Sie die Formel

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log(x) + \mathrm{O}(1).$$

Hinweis: Lemma der Vorlesung.

(b) Leiten Sie aus (a) die folgende Formel her:

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log(p)}{p} = \log(x) + O(1).$$

Hinweis: Die Rechnung in AnZ1.6 ist hilfreich.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Analogon des Satzes von Landau AnZ7.2 für Dirichlet-Integrale

Sei $A : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf jedem endlichen Intervall $[1, \lambda]$ integrierbar. Das Dirichlet-Integral $F(s) = \int_1^\infty A(x)x^{-s}\,\mathrm{d}x$ konvergiere im Punkt $s = \sigma \in \mathbb{R}$ (so dass es gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ konvergiert und demnach eine holomorphe Funktion auf $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ darstellt, welche die n-te Ableitung $F^{(n)}(s) = \int_1^\infty A(x)(-\log(x))^n x^{-s}\,\mathrm{d}x$ besitzt.)
Zeigen Sie analog zum Satz von Landau:
Ist $\rho := \inf\{\sigma; F(\sigma) \text{ kgt.}\}$, dann ist $s = \rho$ eine Singularität von F.

Wissensfragen zu AnZ13, AnZ14 (nur mündlich, ohne Abgabe):

AnZ13:

(1) Warum hat ζ im Bereich $\sigma > 1$ keine Nullstelle?

(2) Mit welcher trigonometrischen Ungleichung zeigt man, dass ζ auch auf der Geraden $\sigma = 1$ keine Nullstelle besitzt?

(3) Wie wird dieser Beweis mit der logarithmischen Ableitung ζ'/ζ von ζ geführt?

AnZ14:

(1) Wie lautet der abelsche Grenzwertsatz für Potenzreihen?

(2) Ist die Umkehrung des abelsches Grenzwertsatzes, d. h. ein Taubersatz, ohne weiteres möglich? Was nennt man eine Tauberbedingung?

(3) Wie lautet ein Taubersatz für Potenzreihen?

(4) Wie lautet der Satz von Landau–Wiener–Ikehara? Warum ist er ein Taubersatz für Dirichletreihen?

(5) Inwiefern spielt das Nichtverschwinden von ζ auf $\sigma = 1$ eine Rolle im Beweis des Primzahlsatzes, wenn man ihn mit dem Satz von Landau–Wiener–Ikehara beweist?

(6) Was ist die Laplace-Transformierte einer Funktion?

(7) Wie lautet der Newmansche Taubersatz für Laplace-Transformierte?