Analytische Zahlentheorie, Blatt 9

hhu Düsseldorf
SoSe 2022

Abgabe: bis Mittwoch 01.06.2022

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/AnZ/`

Aufgabe 1 (5 Punkte): Anwendungen des Primzahlsatzes

(a) Sei $k(n)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, 2, \dots, n$. Zeigen Sie mit dem Primzahlsatz in der ψ-Version, dass dann

$$k(n) = \exp(n(1 + \mathrm{o}(1))) \qquad \text{für } n \to \infty \text{ gilt.}$$

(b) Zeigen Sie unter Verwendung des Primzahlsatzes: Sind m Ziffern $z_1, z_2, \dots, z_m$ gegeben, dann existiert eine Primzahl, deren Dezimaldarstellung mit $z_1 z_2 \dots z_m$ beginnt.

Hinweis: Wenden Sie die Aussage von Aufgabe 1(b) von Blatt 7 an auf $x = 10^k n$ und $c = 1/n$, wo n geeignet.

Wissensfragen zu AnZ15, AnZ16 (nur mündlich, ohne Abgabe):

AnZ15:

(1) Wie folgt der Primzahlsatz aus Newmans Taubersatz für Laplace-Transformierte?

(2) Wie geht im so geführten Beweis des Primzahlsatzes das Nichtverschwinden von ζ auf $\sigma = 1$ ein?

(3) Inwiefern wird im Beweis die Monotonie von $\psi(x)$ benötigt?

AnZ16:

(1) Wie ist die Mertensfunktion $M(x)$ definiert? Wächst diese monoton? Wie wächst $M(x)$ im Vergleich zu x?

(2) Wie kann mit Newmans Taubersatz für Dirichletreihen die Konvergenz von $\sum_{n \geq 1} \mu(n)/n$ hergeleitet werden?

(3) Wie folgt daraus die Konvergenz von $M(x)/x$ gegen 0?

(4) Mit welcher Idee kann man aus der Aussage $M(x) = \mathrm{o}(x)$ den Primzahlsatz herleiten?

(5) Welche Asymptotik für die Teileranzahlfunktion $\tau(n)$ wird dabei im Beweis benötigt?