Die Fast-Ganzzahligkeit der Ramanujan-Konstante

(1) $j(E) \in \mathbb{A}$ für elliptische Kurven E mit komplexer Multiplikation.
Somit: Ist K ein imaginärquadratischer Zahlkörper mit Klassenzahl $h_K = 1$, so folgt für eine elliptische Kurve E mit $\mathrm{End}(E) \cong \mathcal{O}_K$ wegen Satz 2.33: $j(E) \in \mathbb{Z}$.

(2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ hat Klassenzahl $h_K = 1$.
Somit, da $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\tau]$ mit $\tau = \frac{1+\sqrt{-163}}{2}$: $\quad j\left(\frac{1+\sqrt{-163}}{2}\right) \in \mathbb{Z}$.

(3) q-Reihen-Entwicklung von j: Setze $q := e^{2\pi i\tau}$, dann ist

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n$$

wobei die $c(n) \in \mathbb{Z}$, $c(0) = 744$. [Modulformen]

(4) Die $c(n)$ wachsen nicht allzu stark.
Somit gilt für $\tau = \frac{1+\sqrt{-163}}{2}$, d. h. $q = -e^{-\pi\sqrt{163}}$, wegen

$$j\left(\frac{1+\sqrt{-163}}{2}\right) = -e^{\pi\sqrt{163}} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)(-1)^n e^{-n\pi\sqrt{163}}$$

also
$$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 744 - j\left(\frac{1+\sqrt{-163}}{2}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Die Güte der Approximation folgt aus der q-Reihen-Entwicklung. $\square$