Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Dr. Karin Halupczok

23.10.2007

Übungen zur Vorlesung

Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 1

Abgabe: Dienstag, den 30.10.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

a) Sei $v(2)$ die kleinste Zahl, so dass jedes $N \in \mathbb{N}$ in der Form $N = \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_{v(2)}^2$, die $x_i \in \mathbb{N}_0$, geschrieben werden kann. Zeige, dass $v(2) = 3$ gilt.

b) Zeige: Die Dreieckszahlen (der Form $\frac{1}{2}n(n+1)$) sind keine Basis der Ordnung 2.

Aufgabe 2.

a) Zeige Bertrands Postulat: $\forall\, n \geq n_0\ \exists\, p : n < p < 2n$.
Hinweis: „Chebyshev said it, but I'll say it again: There's always a prime between n and $2n$" (N.J. Fine)

b) Sei p_n die n–te Primzahl. Zeige die Existenz von Konstanten $A, B > 0$ mit $An \log n < p_n < Bn \log n$ für alle $n > 1$.

Aufgabe 3.
Sei p_n die n–te Primzahl. Zeige:

a) Aus dem Primzahlsatz folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1$.

b) Aus der Riemannschen Vermutung (RH) folgt $p_{n+1} - p_n = \mathrm{O}\big(p_n^{1/2}(\log p_n)^{2+\varepsilon}\big)$ für beliebiges $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 4.
Zeige: $\frac{n}{\varphi(n)} \ll \log\log n$.

Hinweis: Benutze die Mertens–Formel

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = C \log x + \mathrm{O}(1)$$

und betrachte die Menge

$$\mathcal{R} := \Big\{ n \leq N;\ \forall\, m < n : \frac{\varphi(n)}{n} < \frac{\varphi(m)}{m} \Big\}.$$