Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 08.01.2008
Dr. Karin Halupczok

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 10

Abgabe: Dienstag, den 15.01.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) Überprüfe die folgenden Identiäten:

$$8(x^2+y^2-z^3) = (2x+2y)^2 + (2x-2y)^2 - (2z)^3,$$
$$2x+1 = (x^3-3x^2+x)^2 + (x^2-x-1)^2 - (x^2-2x)^3,$$
$$2(2x+1) = (2x^3-2x^2-x)^2 + (2x^3-4x^2-x+1)^2 - (2x^2-2x-1)^3,$$
$$4(2x+1) = (x^3+x+2)^2 + (x^2-2x-1)^2 - (x^2+1)^3.$$

(b) Zeige, dass jede ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ in der Form

$$m = a^2 + b^2 - c^3, \ a, b, c \in \mathbb{Z},$$

geschrieben werden kann.

Aufgabe 2.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $q := \lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \rfloor$. Zeige, dass $g(k) \geq 2^k + q - 2$ gilt, indem die Zahl $n := q \cdot 2^k - 1$ untersucht wird.

Aufgabe 3.

Für $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}_0$, $\mathcal{B} := \{n \in \mathbb{N}_0;\ \exists a_1, \ldots, a_L \in \mathcal{A} : n = a_1 + \cdots + a_L\}$ betrachte $R(n) := \#\big\{(a_1, \ldots, a_L) \in \mathcal{A}^L;\ n = a_1 + \cdots + a_L\big\}$.

(a) Zeige, dass $B(N) \sum\limits_{n \leq N} R^2(n) \geq \big(\sum\limits_{n \leq N} R(n)\big)^2$.

(b) Unter welchen Voraussetzungen kann gezeigt werden, dass $\mathcal{B}$ positive Schnirelman–Dichte hat? Ist $\mathcal{A}$ dann eine Basis?

Aufgabe 4.

Sei $k \geq 2$ und $T(n)$ die Anzahl der $n \leq N$, die als Summe von k vielen nichtnegativen k–ten Potenzen geschrieben werden können.

(a) Zeige, dass $T(N) \leq \frac{N}{k!} + \mathrm{O}_k(N^{(k-1)/k})$ gilt, indem die Darstellungen von $n = a_1^k + \cdots + a_k^k$ mit $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq N^{1/k}$ für $n \in N$ gezählt werden.

(b) Folgere, dass $G(k) \geq k + 1$ ist.