Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 15.01.2008
Dr. Karin Halupczok

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 11

Abgabe: Dienstag, den 22.01.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Zeige: Ist f eine multiplikative zahlentheoretische Funktion, so gilt $f\big([d_1, d_2]\big)\, f\big((d_1, d_2)\big) = f(d_1)\, f(d_2)$ für alle $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.
Eine Menge $\mathcal{D}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{D} \subseteq \mathbb{N}$ heißt **teilerabgeschlossen**, falls $\forall n \in \mathcal{D}$: $d|n \Rightarrow d \in \mathcal{D}$. Seien f, g auf einer teilerabgeschlossenen Menge $\mathcal{D}$ definierte Funktionen nach $\mathbb{C}$. Zeige:

(a) Ist $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, so folgt $f(n) = \sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) g(d)$ für alle $n \in \mathcal{D}$.

(b) Ist $f(n) = \sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) g(d)$, so folgt $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ für alle $n \in \mathcal{D}$.

Aufgabe 3.
Zeige: Für eine quadratfreie Zahl $d \in \mathbb{N}$ gibt es genau $3^{\omega(d)}$ viele geordnete Paare $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ mit $d = [d_1, d_2]$.

Aufgabe 4.
Zeige mit dem Sieb des Eratosthenes und dem Inklusions–Exklusions–Prinzip, dass

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1 = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ (k,P)=1}} = \sum_{d|P} \mu(d) \cdot \lfloor \frac{n}{d} \rfloor,$$

wobei

$$P := \prod_{\substack{p \leq \sqrt{n} \\ \text{prim}}} p.$$

Hinweis: Für die Primzahlen $p_1, \ldots, p_r \leq \sqrt{n}$ betrachte $A_i = \{m \in \mathbb{N};\ 2 \leq m \leq n,\ p_i|m\}$ und $A = A_1 \cup \cdots \cup A_r$.