Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Dr. Karin Halupczok

22.01.2008

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 12

Abgabe: Dienstag, den 29.01.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Zeige die duale Möbius–Inversionsformel: Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{N}$ eine endliche, teiler–abgeschlossene Menge, und f, g auf $\mathcal{D}$ definierte Funktionen.
Falls $\forall\, k \in \mathcal{D} : f(k) = \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ k \mid d}} g(d)$,
so folgt $\forall\, d \in \mathcal{D} : g(d) = \sum_{\substack{k \in \mathcal{D} \\ d \mid k}} \mu\Big(\frac{k}{d}\Big) f(k)$ und umgekehrt.

Aufgabe 2.
Zeige für $n \geq 2, r \geq 0$, dass $\sum_{\substack{d \mid n \\ \omega(d) \leq 2r+1}} \mu(d) \leq 0 \leq \sum_{\substack{d \mid n \\ \omega(d) \leq 2r}} \mu(d)$.

Aufgabe 3.
Sei $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ die Siebfunktion zum Sieb des Eratosthenes mit $\mathcal{P} = \mathbb{P}$ und $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$.
Zeige mit Aufgabe 4 von Blatt 11, dass

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = n \prod_{p<z} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) + \mathrm{O}(2^z).$$

Aufgabe 4.
Welche obere Schranke für $\pi(x)$ ergibt sich mit Aufgabe 3 unter Anwenden der Mertens–Formel von Aufgabe 4 auf Blatt 1?