Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Dr. Karin Halupczok

29.01.2008

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 13

Abgabe: Dienstag, den 05.02.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Zeige die Abschätzung

$$\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right) \ll \log\log n.$$

Aufgabe 2.
Zeige die Abschätzung

$$\prod_{p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \gg \log z.$$

unter Verwendung des Tricks $1-x \le e^{-x}$.

Aufgabe 3.
Der Mittelwert des Primzahlzwillingspaars 5 und 7 ist eine vollkommene Zahl. Gibt es noch weitere solche Primzahlzwillinge?
Hinweis: $3|\frac{p+1}{2}$.

Aufgabe 4.
Sei $\Psi(x,z) := \sum_{\substack{n\le x\\ p|n\Rightarrow p<z}} 1$ die Anzahl der ***z*–glatten Zahlen** $\le x$.

Zeige die Abschätzung $\Psi(x,z) \ll x(\log z)\exp\left(-\frac{\log x}{\log z}\right)$ und diskutiere das Ergebnis für z in Abhängigkeit von x.

Anleitung:

1. Benutze **Rankins Trick** $1 \le \left(\frac{x}{n}\right)^{\delta}$.
2. Schreibe die $\sum$ als ein $\prod$, das durch $\prod_{p<z}\left(1-\frac{1}{p^{\delta}}\right)$ abgeschätzt werden kann.
3. Weiter mit $1+x \le e^{x}$, $\delta = 1-\eta$, $\eta > 0$, und $p^{\eta} \le 1 + (\eta\log p)z^{\eta}$.
4. Wähle η so, dass die Behauptung folgt.