Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Dr. Karin Halupczok

30.10.2007

Übungen zur Vorlesung

Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 2

Abgabe: Dienstag, den 06.11.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

Sei f eine vollständig multiplikative zahlentheoretische Funktion und $\mathbb{P}$ eine endliche Menge von Primzahlen. Zeige die Euler–Produktformel

$$\sum_{n \in \mathcal{N}(\mathbb{P})} f(n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - f(p)},$$

wobei $\mathcal{N}(\mathbb{P}) := \big\{n \in \mathbb{N};\, p|n \Rightarrow p \in \mathbb{P}\big\}$.

Aufgabe 2.

a) Sei $k(n) := [1, \dots, n]$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $1, \dots, n$. Zeige, dass für $n \to \infty$ gilt:

$$k(n) = \exp\big(n(1 + \mathrm{o}(1))\big).$$

Hinweis: Betrachte $\exp\big(\psi(n)\big)$.

b) Zeige unter Annahme der Riemannschen Vermutung, dass zwischen zwei Kuben n^3 und $(n+1)^3$, $n \geq n_0$, stets eine Primzahl liegt.

Aufgabe 3.

a) Folgere aus dem Dirichletschen Primzahlsatz, dass es unendlich viele Primzahlen mit Leitziffer 1 und Endziffer 7 gibt.

b) Seien $p_1, \dots, p_k$ verschiedene ungerade Primzahlen und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{1, -1\}$. Zeige, dass die Primzahlmengen

$$M_1 := \Big\{p;\, \Big(\frac{p}{p_1}\Big) = \varepsilon_1, \dots, \Big(\frac{p}{p_k}\Big) = \varepsilon_k\Big\}$$

und $$M_2 := \Big\{p;\, \Big(\frac{p_1}{p}\Big) = \varepsilon_1, \dots, \Big(\frac{p_k}{p}\Big) = \varepsilon_k\Big\}$$ unendlich sind.

Aufgabe 4.

Sei $n, h \in \mathbb{N}, \mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ und für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$S(\alpha) := \sum_{\substack{m \in \mathcal{A} \\ m \leq n}} e(\alpha m).$$

Sei $R_h(n) := \#\big\{(x_1, \dots, x_h) \in \mathcal{A}^h;\, n = x_1 + \dots + x_h\big\}$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von h vielen Elementen aus $\mathcal{A}$.
Zeige, dass

$$R_h(n) = \int_0^1 S(\alpha)^h \, e(-n\alpha)\, d\alpha.$$