Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Dr. Karin Halupczok

13.11.2007

Übungen zur Vorlesung

Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 4

Abgabe: Dienstag, den 20.11.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ symmetrisch, F_A die zugehörige quadratische Form,
$U = (u_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n\times m}$ und sei $B := U^T AU = (b_{ij})$.
Zeige dass

$$b_{jj} = F_A(u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj})$$

für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt.

Aufgabe 2.

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ symmetrisch und F_A die zugehörige ternärquadratische Form. Zeige, dass dann

$$a_{11}F_A(x) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 + G_{A^*}(x_2, x_3)$$

mit der binärquadratischen Form G_{A^*} zur Matrix

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 & a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} \\ a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} & a_{11}a_{33} - a_{13}^2 \end{pmatrix}$$

gilt, wobei disc $G_{A^*} = a_{11}$ disc F_A ist.

Aufgabe 3.

Sei F_A eine positiv definite binärquadratische Form zur symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Bestimme $R > 0$ so, dass F_A den Wert

$$m := \min\left\{F(x, y); (x, y) \in \mathbb{Z}^2\backslash 0\right\}$$

bereits in $\left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2;\ |x| \le R,\ |y| \le R\right\}$ annimmt.

Aufgabe 4.

Sei n auf zwei verschiedene Arten in eine Summe zweier Quadrate zerlegt: $n = s^2 + t^2 = u^2 + v^2$, $s \ge t > 0$, $u \ge v > 0$, $s > u$. Zeige, dass dann $d := (su - tv, n)$ ein nichttrivialer Teiler von n ist. Liefert dies ein praktisch geeignetes Faktorisierungsverfahren?