Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Dr. Karin Halupczok

20.11.2007

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 5

Abgabe: Dienstag, den 27.11.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

Seien $u_{11}, u_{21}, u_{31} \in \mathbb{Z}$ mit $(u_{11}, u_{21}, u_{31}) = 1$ gegeben. Zeige, dass es sechs ganze Zahlen $u_{ij},\ i = 1, 2, 3,\ j = 2, 3$, gibt mit $U := (u_{ij}) \in SL_3(\mathbb{Z})$.

Aufgabe 2.

Sei $h \geq 1$ beliebig. Begründe, warum die Mengen $k^{\mathbb{N}_0} := \{1, k, k^2, k^3, \dots\}$ und $k \cdot \mathbb{N}_0 := \{0, k, 2k, 3k, \dots\}$ für kein $k \geq 2$ eine Basis bezüglich h sein können.

Aufgabe 3.

Zeige, dass aus der ternären Goldbachschen Vermutung folgt, dass sich jede natürliche Zahl $n > 8$ als Summe von genau vier Primzahlen schreiben lässt, wovon eine gleich 2 oder 3 ist. Wie könnte man diese Aussage noch verfeinern, so dass auch die Umkehrung gilt?

Aufgabe 4.

a) Zeige: Ist $n = pq$ mit Primzahlen $p \equiv q \equiv 1(4)$, so lässt sich n auf zwei verschiedene Arten als Summe zweier Quadrate schreiben. Liefert dies mit Aufgabe 4, Blatt 4, ein praktisch geeignetes Faktorisierungsverfahren für zusammengesetzte Zahlen n dieser Art?

b) Liefert der Beweis des Dreiquadratesatzes ein praktisch geeignetes Verfahren, Darstellungen von $n = 4^a m,\ m \equiv 1, 2, 3, 5(8)$, als Summe dreier Quadrate zu berechnen? Könnte man so auch alle Darstellungen als Summe zweier Quadrate erhalten?