Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 27.11.2007
Dr. Karin Halupczok

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 6

Abgabe: Dienstag, den 04.12.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Für $a, q \in \mathbb{Z}$ sei

$$\delta_q(a) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad a \equiv 0 \ (q), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass gilt

a) $\delta_q(a) = \dfrac{1}{q} \displaystyle\sum_{m=1}^{q} e\Big(\frac{am}{q}\Big)$

b) Für $(a, q) = 1$, $b \in \mathbb{Z}$, gelten $\delta_q(ab) = \delta_q(b)$ und $\sum_{k=1}^{q} \delta_q(ak + b) = 1$.

c) Für $q_1 \in \mathbb{N}$ gelten

$$\delta_{q_1 q}(q_1 a) = \delta_q(a), \quad \sum_{b=1}^{q_1} \delta_{q_1 q}(a + qb) = \delta_q(a).$$

d) Für $(q_1, q) = 1$ gilt $\delta_{q_1 q}(a) = \delta_{q_1}(a)\delta_q(a)$.

Aufgabe 2.
Betrachte für $a, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$, die Ramanujan–Summe

$$c_q(a) := \sum_{\substack{1 \leq r < q \\ (r,q)=1}} e\Big(\frac{ar}{q}\Big).$$

Zeige:

(a) $c_q(a)$ ist eine multiplikative zahlentheoretische Funktion in q.

(b) $c_q(a) = \displaystyle\sum_{d|(a,q)} \mu\Big(\frac{q}{d}\Big) d.$

(c) $c_q(a) = \dfrac{\mu\big(q/(q,a)\big)\varphi(q)}{\varphi(q/(q,a))}.$

Aufgabe 3.
Sei $R_1(n) = \displaystyle\sum_{p_1+p_2+p_3=n} \log p_1 \log p_2 \log p_3$ und $R_2(n) = \displaystyle\sum_{k_1+k_2+k_3=n} \Lambda(k_1)\Lambda(k_2)\Lambda(k_3).$
Zeige: $R_2(n) = R_1(n) + \mathrm{O}\big(n^{3/2}(\log n)^3\big)$.

(Die in der Vorlesung für R_1 hergeleitete asymptotische Formel gilt also auch für R_2.)