Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Dr. Karin Halupczok

04.12.2007

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 7

Abgabe: Dienstag, den 11.12.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) Zeige mit dem Dirichletschen Approximationssatz:
Ist α irrational, so gibt es unendlich viele rationale Zahlen $\frac{a}{q}$ mit $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

(b) Zeige, dass die Eigenschaft in (a) irrationale Zahlen charakterisiert, d.h. eine rationale Zahl α erlaubt nur endlich viele Approximationen $\frac{a}{q}$ mit $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Aufgabe 2.
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die **Farey–Reihe** $\mathcal{F}_n$ der Stufe n, das ist die Menge der **Farey–Brüche**

$$\mathcal{F}_n := \left\{\frac{a}{q} \in \mathbb{Q};\ 0 \le a \le q \le n,\ (a,q) = 1\right\}.$$

So ist

$$\mathcal{F}_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\} \subseteq \mathcal{F}_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\} \subseteq \mathcal{F}_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\} \subseteq \dots.$$

(a) Zeige: Für zwei aufeinanderfolgende Fareybrüche $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ in $\mathcal{F}_n$ gilt $b\,c - a\,d = 1$.

(b) Bestimme eine asymptotische Formel für $\#\,\mathcal{F}_n$, wenn $n \to \infty$. [Benutze ein Ergebnis aus der elementaren Zahlentheorie].

Aufgabe 3.
Für zahlentheoretische Funktionen a, b, c, d mit $a = c * b,\ d * b = \varepsilon$ betrachte die zugehörigen Dirichlet–Reihen

$$A(s) = \sum_{m \ge 1} \frac{a(m)}{m^s},\ B(s) = \sum_{m \ge 1} \frac{b(m)}{m^s},\ \frac{A(s)}{B(s)} = \sum_{m \ge 1} \frac{c(m)}{m^s},\ \frac{1}{B(s)} = \sum_{m \ge 1} \frac{d(m)}{m^s}.$$

Für $U, V \ge 1$ sei $F(s) = \sum_{m \le U} \dfrac{c(m)}{m^s},\ G(s) = \sum_{m \le V} \dfrac{d(m)}{m^s}$.

(a) Zeige:

$$\frac{A}{B}(s) = F(s) - B(s)\,G(s)\,F(s) + A(s)\,G(s) + \Big(\frac{A}{B}(s) - F(s)\Big)\big(1 - B(s)\,G(s)\big).$$

(b) Aus (a) ergibt sich durch Koeffizientenvergleich eine Formel für $c(m)$ als Summe von 4 zahlentheoretischen Funktionen. Bestimme diese. [Vaughans Identität]