Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 11.12.2007
Dr. Karin Halupczok

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die additive Zahlentheorie – WS 2007/08
Blatt 8

Abgabe: Dienstag, den 18.12.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Zeige, dass die reelle Zahl

$$\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0,110001000\ldots$$

irrational ist.

Aufgabe 2.
Sei $d(n)$ die Teileranzahlfunktion.Zeige:

(a) $\displaystyle\sum_{n\le N} d(n) = 2 \sum_{\substack{uv\le N\\ u>\sqrt{N}}} 1 + [\sqrt{N}]^2$

(b) $\displaystyle\sum_{n\le N} d(n) = N\log N + \mathrm{O}(N)$

(c) $\displaystyle\sum_{n\le N} d(n)^2 \ll N(\log N)^3$ unter Benutzung von $d(ab) \le d(a)\,d(b)$.

Aufgabe 3.
Für zwei Farey–Brüche $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (vgl. Blatt 7, Aufgabe 2) sei ihr **Mediant** durch $\frac{a+c}{b+d}$ definiert. Zeige:

(a) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

(b) Die Elemente von $\mathcal{F}_n\backslash\mathcal{F}_{n-1}$ sind die Medianten von Elementen aus $\mathcal{F}_{n-1}$.

(c) Zu $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_n$ definiere den **Ford–Kreis**

$$\mathcal{C}\Big(\frac{a}{b}\Big) := \Big\{z \in \mathbb{C}; \Big|z - \Big(\frac{a}{b} + \frac{i}{2b^2}\Big)\Big| = \frac{1}{2b^2}\Big\}.$$

Finde eine zeichnerische Methode mit Ford–Kreisen, um für eine reelle Zahl α den Farey–Bruch $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_n$ mit kleinstem Abstand zu α zu finden.