Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 04.05.2006
Dr. K. Halupczok

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2006

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, den 11.05.2006, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.
(b) Für $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $[x]\,[y] \leq [xy]$.
(c) Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$ und $a < x < a + 1$ gilt $\left[\frac{x+b}{c}\right] = \left[\frac{a+b}{c}\right]$.
(d) Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ gilt $\left[\frac{nm}{k}\right] \geq n\left[\frac{m}{k}\right]$.

Aufgabe 2.

Eine Zahl heißt *Dreieckszahl*, wenn sie Summe von mit der 1 beginnenden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist, d. h. wenn sie von der Form $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ ist.

(a) Eine Zahl ist genau dann eine Dreieckszahl, wenn sie für ein $n \geq 1$ von der Form $n(n + 1)/2$ ist. (Pythagoras, etwa 550 v.u.Z.)

(b) Die Zahl n ist genau dann eine Dreieckszahl, wenn $8n + 1$ eine Quadratzahl ist. (Plutarch, etwa 100.)

(c) Die Summe zweier aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen ist eine Quadratzahl. (Nikomachos, etwa 100.)

(d) Ist n eine Dreieckszahl, so sind auch $9n+1$, $25n+3$ und $49n+6$ derartige Zahlen. (Euler, 1775.)

Aufgabe 3.

(a) Zeige: Für $m, n, k \in \mathbb{Z}$ gilt $(m, n) = (n, m-kn)$. Berechne damit $(495, 210)$.
(b) Bestimme ganze Zahlen x, y, z, die der Gleichung $(198, 288, 512) = 198x + 288y + 512z$ genügen.

Aufgabe 4.

Zeige, daß der Ausdruck $n^4 + 4n^2 + 11$ für jedes ungerade $n \in \mathbb{Z}$ von der Form $16k$, $k \in \mathbb{Z}$, ist.

Bitte wenden

Anwesenheitsaufgaben für die Übungen vom 8.-10. Mai

(1) Zeige, daß jede ganze Zahl der Form $6k+5$ auch von der Form $3k+2$ ist, aber nicht umgekehrt.

(2) Das Quadrat einer jeden ganzen Zahl ist entweder von der Form $3k$ oder $3k+1$.

(3) Zeige, daß es in der Folge der Zahlen

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

keine Quadratzahl gibt.

(4) Zeige oder widerlege: Gilt $a \mid (b+c)$, so ist entweder $a \mid b$ oder $a \mid c$.

(5) $21 \mid (4^{n+1} + 5^{2n-1})$.

(6) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt $4 \nmid (a^2+2)$.

(7) Für alle $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ zeige $(a, a+n) \mid n$,
und schließe daraus $(a, a+1) = 1$.

(8) Aus $(a,b) = 1$ und $c \mid (a+b)$ folgt $(a,c) = (b,c) = 1$.

(9) Berechne $(272, 1479)$.

(10) Zeige: Für einen gemeinsamen Teiler d von a und b gilt
$d = (a,b) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

(11) Folgt aus $(a,b) = 1$ die Behauptung $(a+b, ab) = 1$?

(12) $133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1})$.