Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 11.05.2006
Dr. K. Halupczok

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2006

Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, den 18.05.2006, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) $(ca, cb) = |c| \cdot (a, b)$.
(b) $[ca, cb] = |c| \cdot [a, b]$.
(c) $(2a + b, a + 2b) \in \{1, 3\}$ falls $(a, b) = 1$.
(d) $(a + b, a^2 + b^2) \in \{1, 2\}$ falls $(a, b) = 1$.

Aufgabe 2.

Eine unbewiesene Vermutung lautet: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $2^n - 1$, wie z. B. $3 = 2^2 - 1$.

(a) Man finde vier weitere Primzahlen dieser Art.
(b) Zeige, daß die Zahl k bei Primzahlen der Form $2^k - 1$ außer im Fall $k = 2$ eine ungerade Zahl ist.

Aufgabe 3.

Für $x \geq 1$ sei $\pi(x) := \#\{p \leq x\}$. Zeige:

(a) $\pi(x) \leq \frac{x}{3}$ für $x \geq 33$,
(b) $\pi(x) \geq \log_2 \log_2 x$ für $x \geq 2$.

(**Hinweis:** Sei $2 < p_1 < p_2 < \dots$ die Folge der Primzahlen.
Der Euklidische Beweis zeigt $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$.)

Aufgabe 4.

Sei $2 < p_1 < p_2 < \dots$ die Folge der Primzahlen. Zeige:

(a) $p_n \geq 2n - 1$ für $n \geq 1$.
(b) Keine der Zahlen $P_n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ ist eine Quadratzahl.
(c) Die Summe

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}$$

kann für kein $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl sein.