Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 18.05.2006
Dr. K. Halupczok

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2006

Blatt 3

Abgabe: Bitte die Lösungen bis spätestens Freitag, den 26.05.2006, 11 Uhr, ins Postfach von K. Halupczok im 3. Stock der Eckerstr. 1 legen.

Aufgabe 1.

Sei $H := \{n \in \mathbb{N};\ n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge der Hilbertzahlen. Eine Zahl $n \in H$ heißt H-prim, falls n nicht als Produkt von zwei Zahlen $\neq 1$ aus H geschrieben werden kann. Zeige:

(a) H ist abgeschlossen unter Multiplikation.
(b) Jedes $n \in H$ ist Produkt von H-primen Zahlen.
(c) H-Primfaktorzerlegungen sind i. a. nicht eindeutig.
(d) Jedes $n = 4k+3$ hat einen Primfaktor $p = 4\ell + 3$.
(e) Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4k+3$.
(Hinweis: Sind $p_1, \dots, p_m$ solche, dann betrachte $N = 4p_1 \dots p_m - 1$.)

Aufgabe 2.

Zeige, daß jede ganze Zahl x mindestens eine der folgenden Kongruenzen erfüllt:

$$\begin{aligned} x &\equiv 0\ (2) \\ x &\equiv 0\ (3) \\ x &\equiv 1\ (4) \\ x &\equiv 3\ (8) \\ x &\equiv 7\ (12) \\ x &\equiv 23\ (24) \end{aligned}$$

Bitte wenden

Aufgabe 3.

Zeige für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\varphi(2n) = \begin{cases} \varphi(n), & \text{falls } 2 \nmid n, \\ 2\varphi(n), & \text{falls } 2 \mid n. \end{cases}$

(b) Für gerades n gilt: $\varphi(n) = \frac{n}{2} \Leftrightarrow n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

(c) Ist $\varphi(n) \equiv 2\ (4)$, so ist $n = 4$ oder n hat die Gestalt p^a oder $2p^a$ mit $a \in \mathbb{N}$ und einer Primzahl $p \equiv 3\ (4)$.

Aufgabe 4.

Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen nach Axel Thue (1863-1922):

Seien $p_1 < \cdots < p_k$ k viele Primzahlen, und für $x \geq 2$ sei $N = N(x, p_1, \ldots, p_k)$ die Anzahl der $n \leq x$, in deren Primfaktorzerlegung *nur* die Primteiler $p_1, \ldots, p_k$ vorkommen können. Zeige:

(a) Dann gibt es ein $C = C(k) > 0$ mit $N \leq C \cdot (\ln x)^k$.

(b) Die Annahme, daß $p_1, \ldots, p_k$ alle Primzahlen sind, die es gibt, führt mit (a) zum Widerspruch.