Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Dr. K. Halupczok

14.06.2006

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

SoSe 2006

Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, den 22.06.2006, zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) Ein Ei wiegt 55 g, ein Eßlöffel Mehl 10 g, ein Eßlöffel Zucker und Butter je 15 g. Es soll ein Rührteig hergestellt werden, der aus gleichen Teilen Eier, Mehl, Zucker und Butter besteht. Es ist noch ein Eigelb (20 g) und ein halbes Päckchen Backpulver übrig, die mitverwendet werden sollen; ein Päckchen Backpulver reicht für 500 g Mehl. Wie läßt sich mit diesen Angaben ein Rührteig abmessen? Dabei sind nur ganzzahlig viele zusätzliche Eier, ganze zusätzliche Backpulverpäckchen und ganzzahlig viele Eßlöffel Mehl, Zucker und Butter erlaubt. Eine Kuchenform faßt gut 1.5 kg Teig. Wieviele Kuchen lassen sich aus dem Rührteig backen?

(b) Aus einem alten chinesischen Rechenbuch: 19 Räuber stehlen einen Sack mit Goldstücken. Beim Versuch, die Beute gerecht aufzuteilen, bleiben fünf Goldstücke übrig. Es kommt darüber zum Streit, bei dem ein Räuber erschlagen wird. Die restlichen 18 versuchen erneut, gerecht aufzuteilen. Diesmal bleiben 12 Goldstücke übrig. Erneuter Streit. Wieder wird einer erschlagen. Unter den restlichen 17 Räubern geht die Teilung auf. Wieviele Goldstücke waren mindestens im Sack?

Aufgabe 2.

(a) Zeige: Das Kongruenzensystem $x \equiv a\ (m)$, $x \equiv b\ (n)$ kann unlösbar in x sein, falls m und n nicht teilerfremd sind. Gilt hingegen $(m, n) \mid (b - a)$, so ist es lösbar.

(b) Zeige: Ist das Kongruenzensystem

$$x \equiv a_i\ (m_i), \quad i = 1, \ldots, r,$$

lösbar, so gilt $\forall\ i \neq j : (m_i, m_j) \mid (a_j - a_i)$. Wie erhält man dann aus einer speziellen Lösung alle Lösungen?

(c) Bestimme die kleinste natürliche Zahl, die bei Division durch $10, 9, \ldots, 3, 2$ die Reste $9, 8, \ldots, 2, 1$ läßt.

Aufgabe 3.

Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq a < m$, $f_a(x) = f(x) + a$. Mit $\rho_a(m)$ sei die Lösungsanzahl der Kongruenz $f_a(x) \equiv 0\ (m)$ bezeichnet. Dann gilt

$$\sum_{a=0}^{m-1} \rho_a(m) = m.$$

Aufgabe 4.

Sei $P := \{3, 7, 5, 17, 13, 241\}$. Konstruiere eine Restklasse $r + m\mathbb{Z}$, so daß es für jedes $N \in r + m\mathbb{Z}$ und jede Zweierpotenz 2^k eine Primzahl $p \in P$ gibt mit $N \equiv 2^k\ (p)$.

Hinweis: Verwende Aufgabe 2 von Blatt 3.